

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12.3.2. Trigonometrik Denklemler

Terimler ve Kavramlar: Trigonometrik denklem

12.3.2.1. Trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulur.

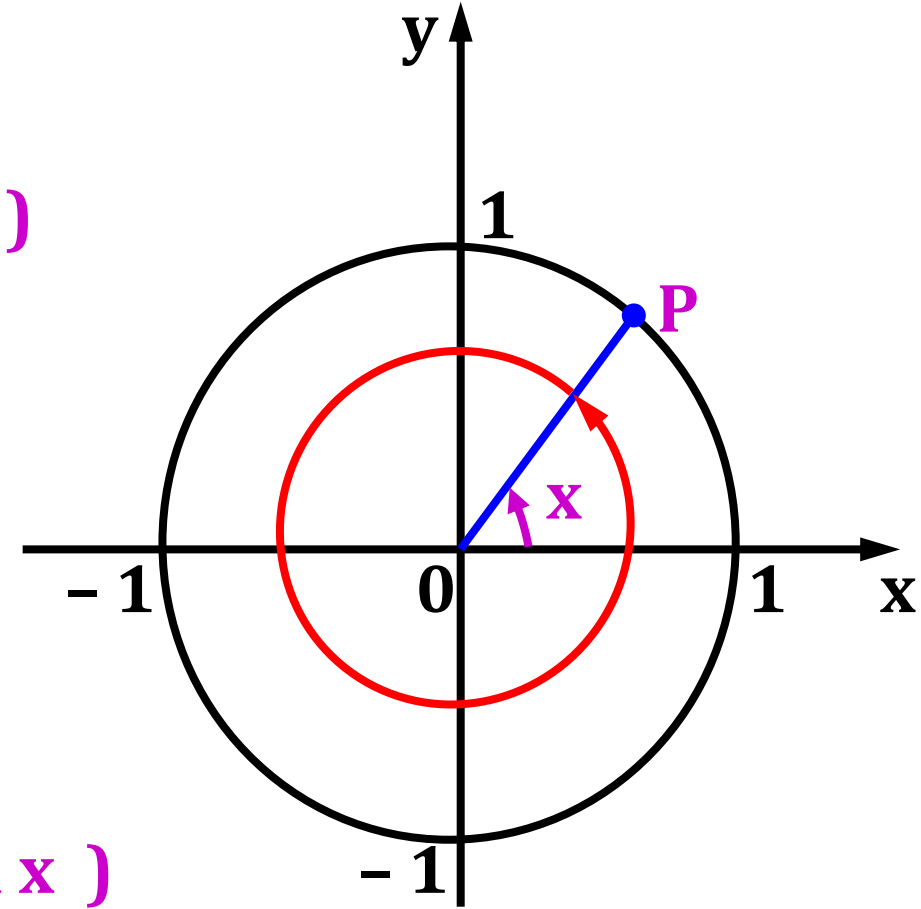
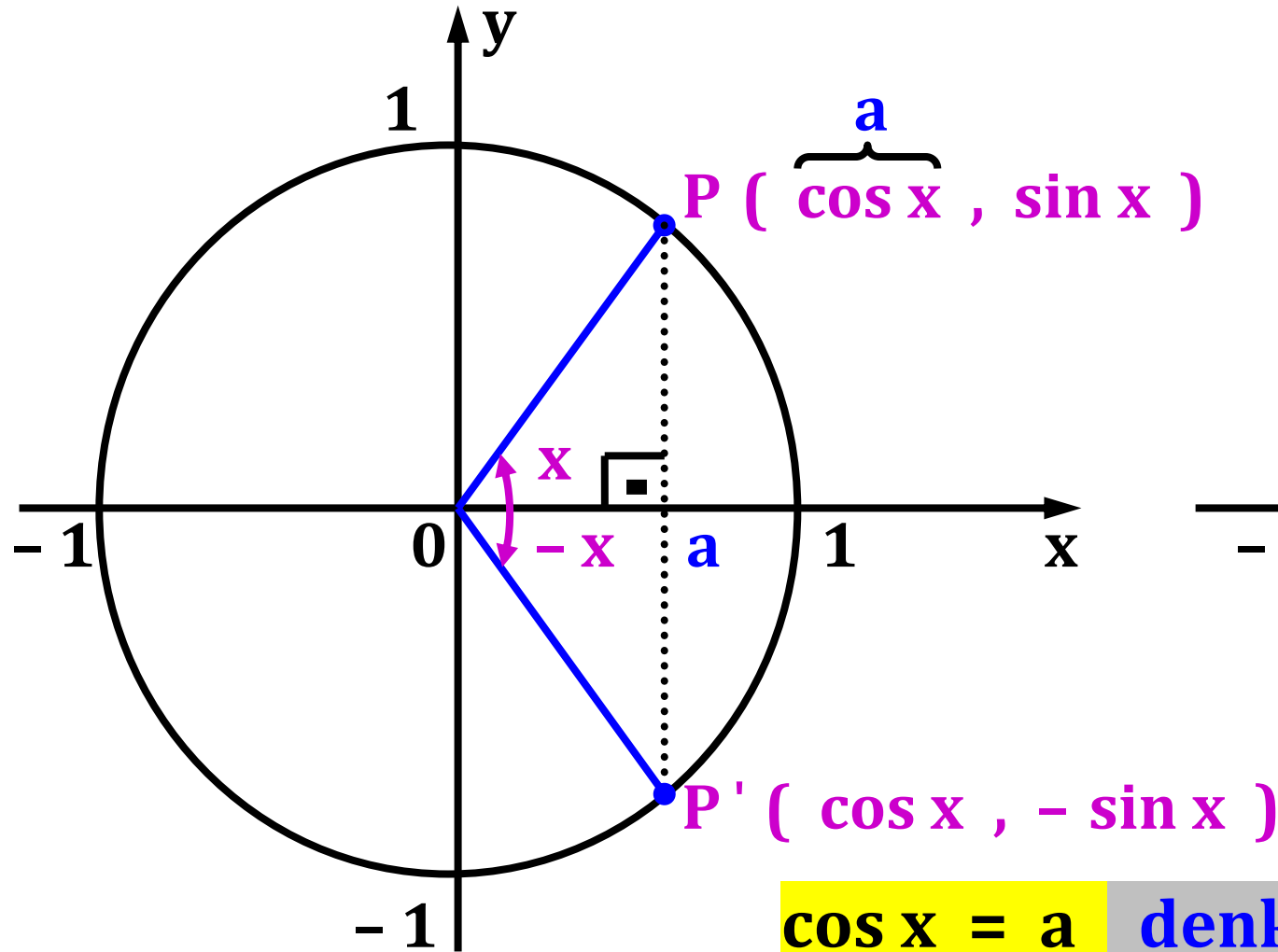
a) a, b ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a \cdot \sin f(x) + b \cdot \cos g(x) = c$ biçimindeki trigonometrik denklemlerin kökleri buldurulur ; a, b ve c katsayıları ile çözüm ilişkilendirilir.

b) Gerçek hayat problemlerine yer verilir.

Trigonometrik Denklemler

1) $\cos x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



$\cos x = a$ denkleminin çözüm kümesi

$x + k \cdot 2\pi$ veya $-x + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) olarak bulunur.

Not: Kosinüslü denklemin iki ayrı çözüm kümesi vardır. k yerine istenirse tam sayılar verilir ve sağlayan açı değerleri bulunur.

Soru: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ denkleminin çözüm kümesini (yani x'i) bulunuz.

Soru : $\cos x = \frac{1}{2}$ veriliyor. $x \in [- 2\pi , 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru: $\cos x = 0$ veriliyor. $x \in [- 360^\circ, 540^\circ]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ veriliyor. $x \in [- 2\pi , 2\pi]$ ise bu aralık-taki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos 3x = 1$ ise ; **A)** Denklemin çözüm kümesini bulunuz.

B) $x \in [-\pi , \pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cos (2x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Kural: $\cos f(x) = \cos h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $f(x) = h(x) + k \cdot 2\pi$ veya $f(x) = -h(x) + k \cdot 2\pi$
olarak alınır.

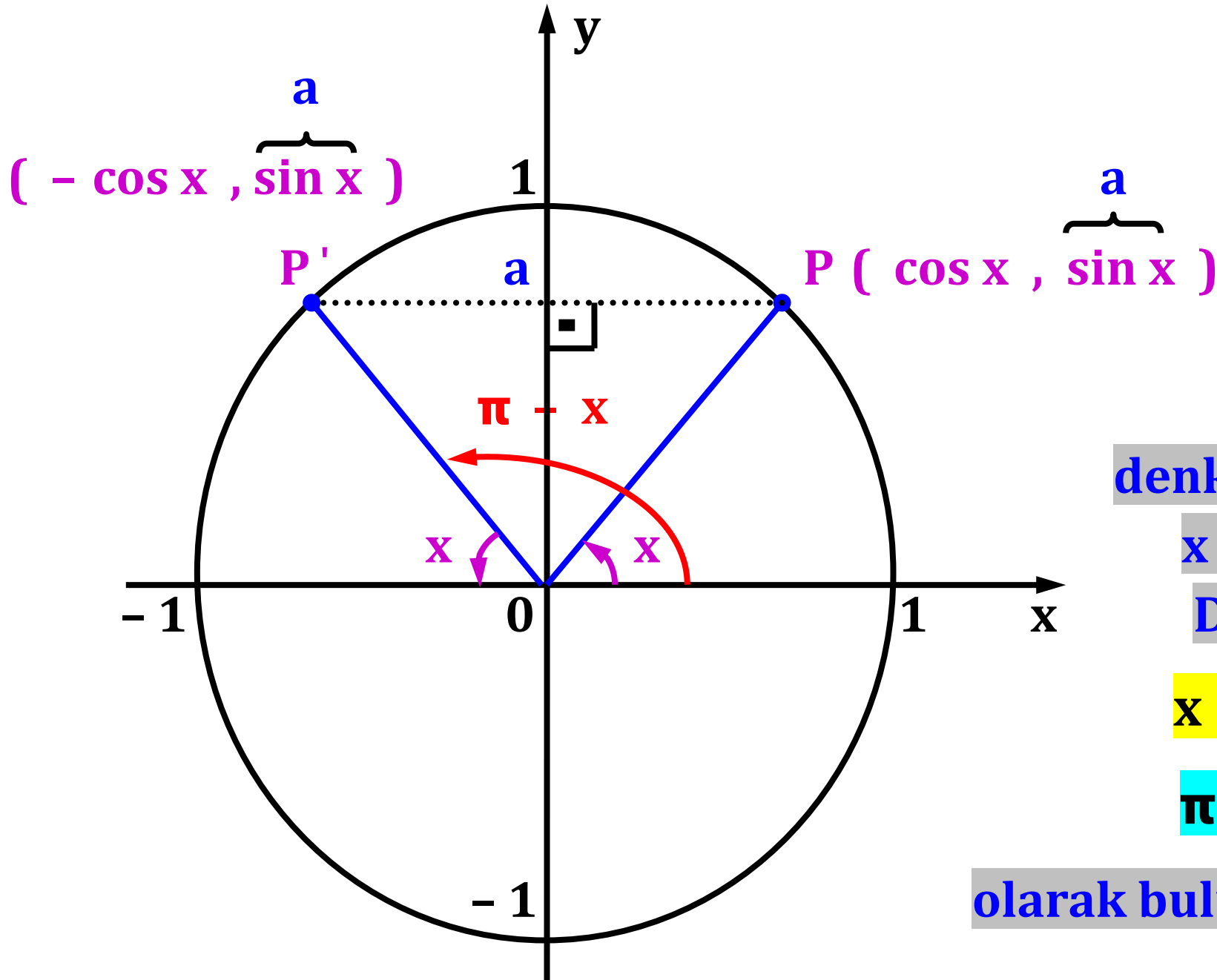
Soru: $\cos(3x - 10^\circ) = \cos(x + 10^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $\cos (2x + 40^\circ) = \cos (x + 5^\circ)$ veriliyor.

$x \in [- 2\pi , 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru: $\cos (3x + 20^\circ) = \sin x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. ($\sin a = \cos b$ ise $a + b = 90^\circ$ idi.)

2) $\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



$$\sin x = a$$

denklemini sağlayan

x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

$$x + k \cdot 2\pi \text{ veya}$$

$$\pi - x + k \cdot 2\pi$$

olarak bulunur. ($k \in \mathbb{Z}$)

Soru : $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin; **A)** Çözüm kümesini (yani x 'i) bulunuz.

B) $x \in [- 2\pi , 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ denkleminde $x \in [-2\pi , 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\sin x = 1$ denkleminde $x \in [- 370^\circ , 720^\circ]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru: $\sin (6x - 30^\circ) = - 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sin (3x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminde $x \in [-\pi , \pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sin (180^\circ - 2x) = - \sin (x + 270^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. (Dar açıya göre yazma yani indirgeme kurallarından yararlanılır.)

Soru : $\tan x - 2\sin 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

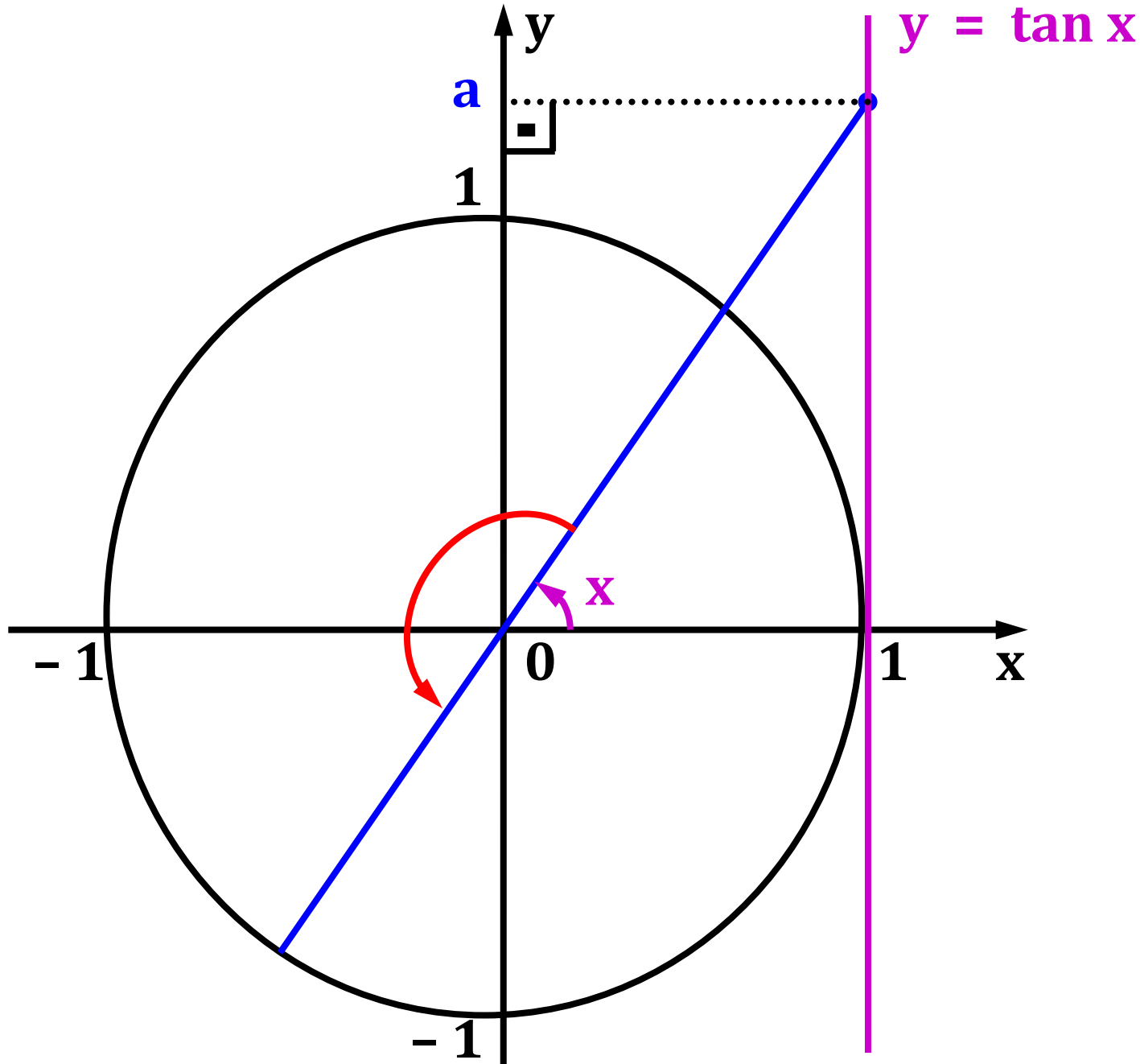
Kural: $\sin f(x) = \sin h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $f(x) = h(x) + k \cdot 2\pi$ veya $f(x) = \pi - h(x) + k \cdot 2\pi$
olarak alınır.

Soru: $\sin(x - 20^\circ) = \sin(-2x + 10^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $\sin (4x - 28^\circ) = \sin (2x + 4^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $\sin (2x + 40^\circ) = \cos (x + 5^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3) $\tan x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



$$\tan x = a$$

denklemini sağlayan

x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

$x + k \cdot \pi$ olarak

bulunur. ($k \in \mathbb{Z}$)

Soru : $\tan x = \sqrt{3}$ denkleminde $x \in [- 2\pi , 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\tan x = -1$ denkleminde $x \in [-2\pi , 2\pi]$ ise bu aralık-taki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\tan 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminde $x \in [- 180^{\circ} , 180^{\circ}]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru: $\tan (25^\circ - 4x) = 1$ denkleminde $x \in [-90^\circ , 180^\circ]$
ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

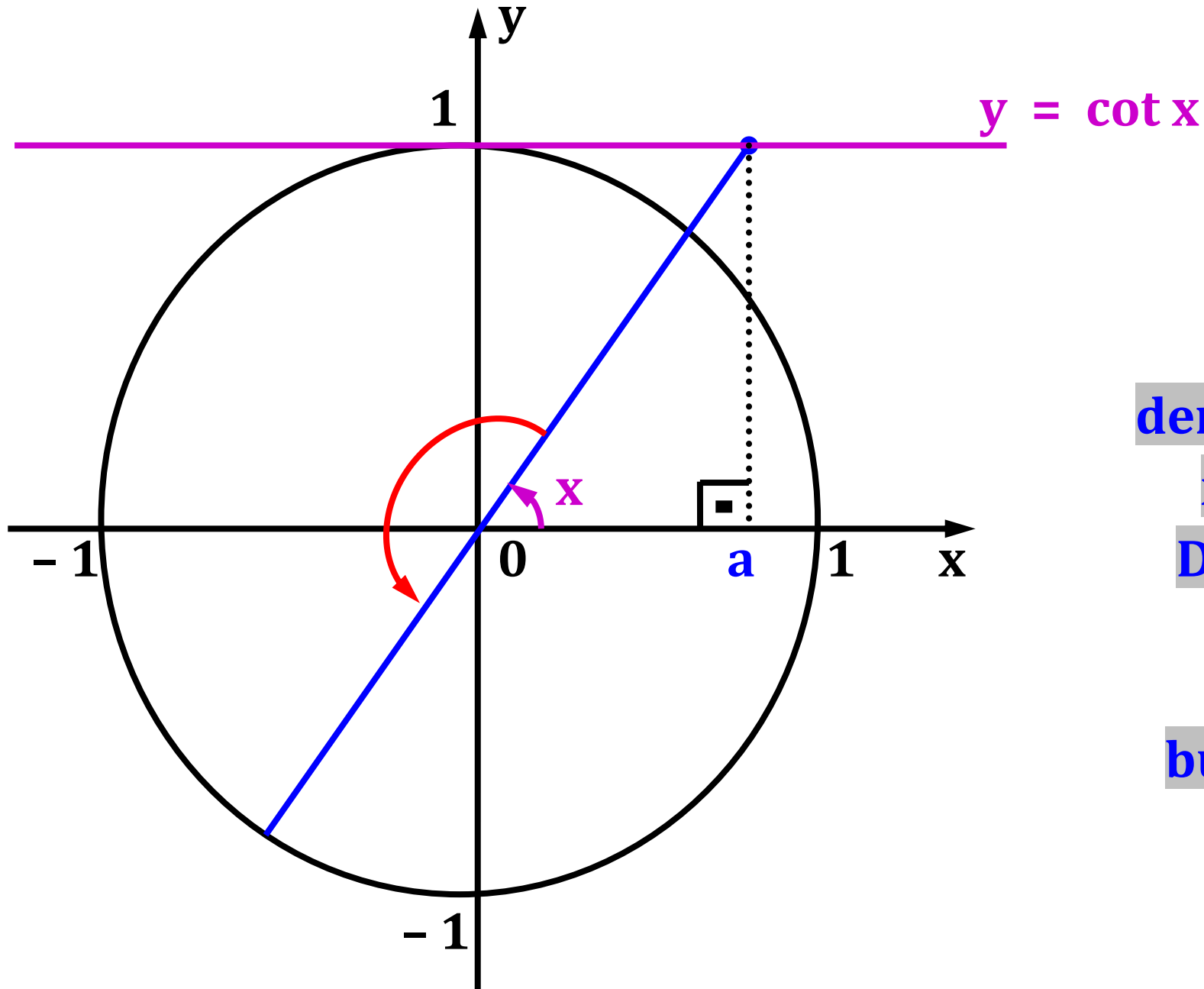
Kural: $\tan f(x) = \tan h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $f(x) = h(x) + k \cdot \pi$ olarak alınır.

Soru: $\tan 2x = \tan \left(4x - \frac{\pi}{4} \right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru: $\tan (3x - 10^\circ) = \cot (x + 20^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\tan 2x \cdot \cot 3x = \cot 2x \cdot \tan 3x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. ($\tan a = \frac{1}{\cot a}$ idi.)

4) $\cot x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



$$\cot x = a$$

denklemini sağlayan
 x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

$$x + k \cdot \pi \text{ olarak}$$

bulunur. ($k \in \mathbb{Z}$)

Soru : $\cot 5x = 1$ denkleminde $x \in [-\pi / 2 , \pi / 2]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru: $\cot (3x - 24^\circ) = - \sqrt{3}$ denkleminde $x \in [-\pi , \pi]$
ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cot \left(-5x + \frac{7\pi}{18} \right) = 0$ denkleminde $x \in [-90^\circ , 90^\circ]$

ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Kural: $\cot f(x) = \cot h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
 $f(x) = h(x) + k \cdot \pi$ olarak alınır.

Soru: $\cot 6x = \cot(4x - 52^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cot (x - 60^\circ) . \tan (12^\circ - 4x) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. ($\tan a = \frac{1}{\cot a}$ idi.)

Tanım : a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$ biçimindeki denklemlere “ birinci dereceden homojen trigonometrik denklem ” adı verilir.

Eşitlik sinüse bölünürse kotanjant, kosinüse bölünür ise tanjantlı denklemin çözümü bulunur.

Soru : $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sqrt{6} \cdot \cos x + \sqrt{2} \cdot \sin x = 0$ denkleminde $x \in [-\pi , 2\pi]$
ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cos 5x = -\sin 5x$ denkleminde $x \in [-\pi , \pi / 2]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $4\sin 2x - 4\cos 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Tanım: a , b ve c sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ biçimindeki denklemlere “ $\sin x$ ve $\cos x$ ’e göre linear (doğrusal) denklem ” adı verilir.

A) $c^2 \leq a^2 + b^2$ ise denklemin çözüm kümesi bulunabilir.

B) Denklemden ister sinüsün ister kosinüsün katsayısı 1 yapılır. Diğer terimin katsayısı tanjanta çevrilir. Tanjant yerine \sin / \cos değeri yazılarak işlemde payda eşitlemesi yapılır. Pay, toplam – fark formülleri kullanılarak bulunur. İşlemde içler – dışlar çarpımı yapılarak elde edilen denklemden çözüm bulunur.

Soru : $3\sqrt{2} \cdot \sin x + k \cdot \cos x = -5$ denkleminin çözüm kümesi
bulunabiliyorsa k yerine hangi tam sayılar kullanılmaz ?

Soru : $4 \cdot \sin x - 6 \cdot \cos x = 2t$ denkleminin çözüm kümesi yoksa
t yerine gelebilecek en küçük pozitif tam sayı kaç olur ?

Soru : $4 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sqrt{3} \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sqrt{12} \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.