

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 4. DÖNÜŞÜMLER

12. 3. 1. Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler

Terimler ve Kavramlar: Dönüşüm, öteleme, dönme, dönme merkezi, dönme açısı, simetri, simetri merkezi, simetri eksen

12. 4. 1. 1. Analitik düzlemde koordinatları verilen bir noktanın öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulur.

A) Öteleme, simetri ve dönme kavramları hatırlatılır.

B) Noktanın; noktaya, eksenlere, $y = x$ doğrusuna, bir doğruya göre simetrileri ve doğrunun noktaya göre simetrileri vurgulanır.

Doğrunun doğruya göre simetrilerine yer verilmez.

C) Bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla öteleme, simetri ve dönme ele alınır.

12.4.1.2. Temel dönüşümler ve bileşkeleriyle ilgili problem çözer.

A) Modelleme çalışmalarına yer verilir.

B) Doğadan ve mimari eserlerden örneklendirme yapılır.

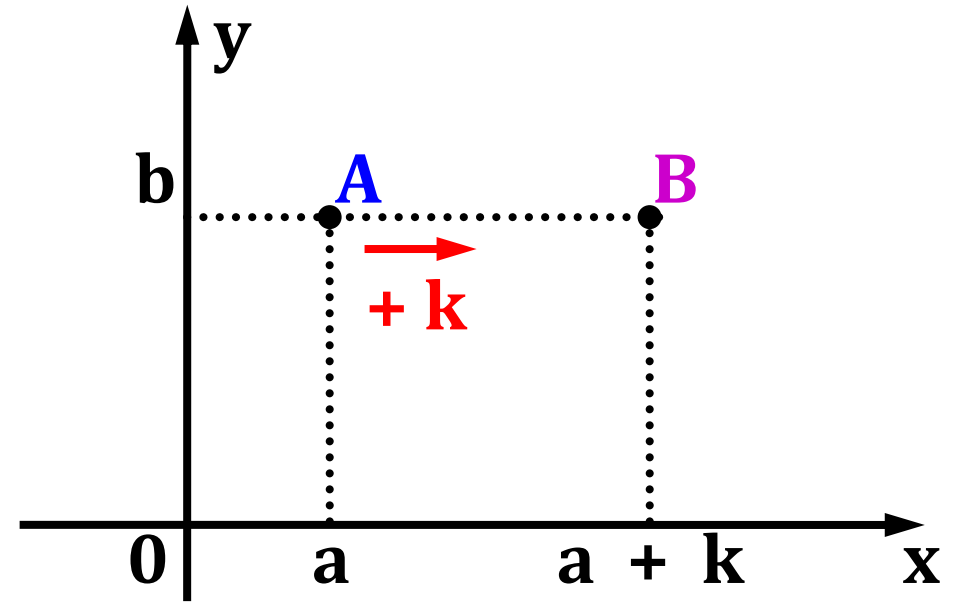
4. ÜNİTE : **DÖNÜŞÜMLER**

Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler

Öteleme

Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesine “ öteleme ” adı verilir.

Kural: A) $A (a , b)$ noktasının x eksenini boyunca pozitif yönde k br ötelenmiş hali $B (a + k , b)$ olarak bulunur. Noktanın ordinatı değişmez.



B) $A (a , b)$ noktasının x eksenini boyunca negatif yönde k br ötelenmiş hali $C (a - k , b)$ noktası olur.

C) $A (a , b)$ noktasının y eksenini boyunca pozitif yönde k br ötelenmiş hali $D (a , b + k)$ noktası olur.

D) $A (a , b)$ noktasının y eksenini boyunca negatif yönde k br ötelenmiş hali $E (a , b - k)$ noktası olur.

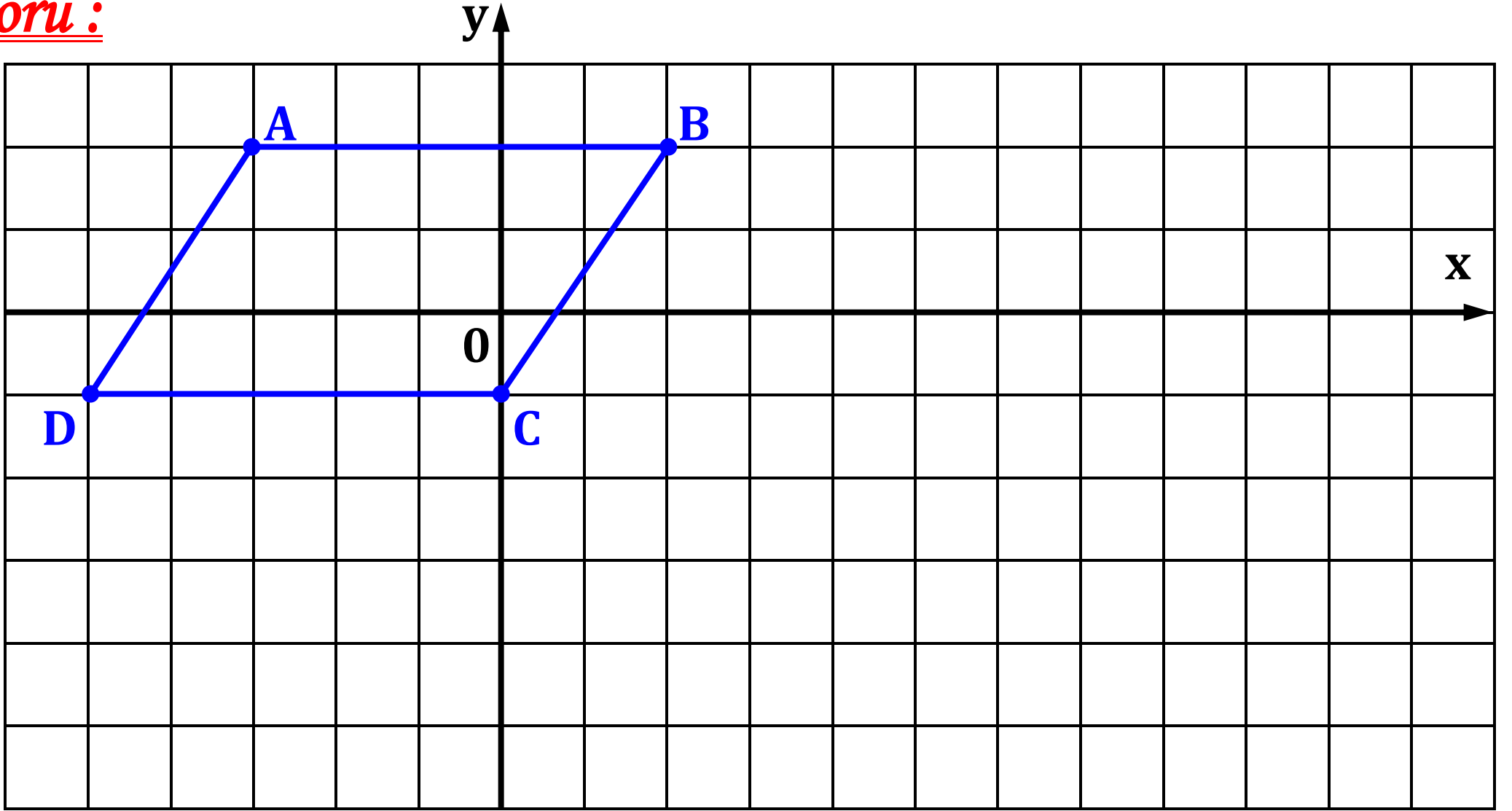
Soru : Analitik düzlemde $A (- 2 , 4)$ noktası önce y eksenini boyunca negatif yönde 3 br, sonra da x eksenini boyunca pozitif yönde 5 br ötelenmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde $A (- 1 , - 9)$ noktası önce x eksenini boyunca negatif yönde 5 br, sonra da y eksenini boyunca pozitif yönde 12 br ötelenmesi ile oluşan nokta B ise $| AB | = ?$

Soru : Analitik düzlemde $A (8 , 2)$ noktası önce x eksenini boyunca pozitif yönde 12 br, sonra da y eksenini boyunca negatif yönde 6 br ötelenmesi ile oluşan nokta $T (m + 14 , 2n + m)$ ise $m . n = ?$

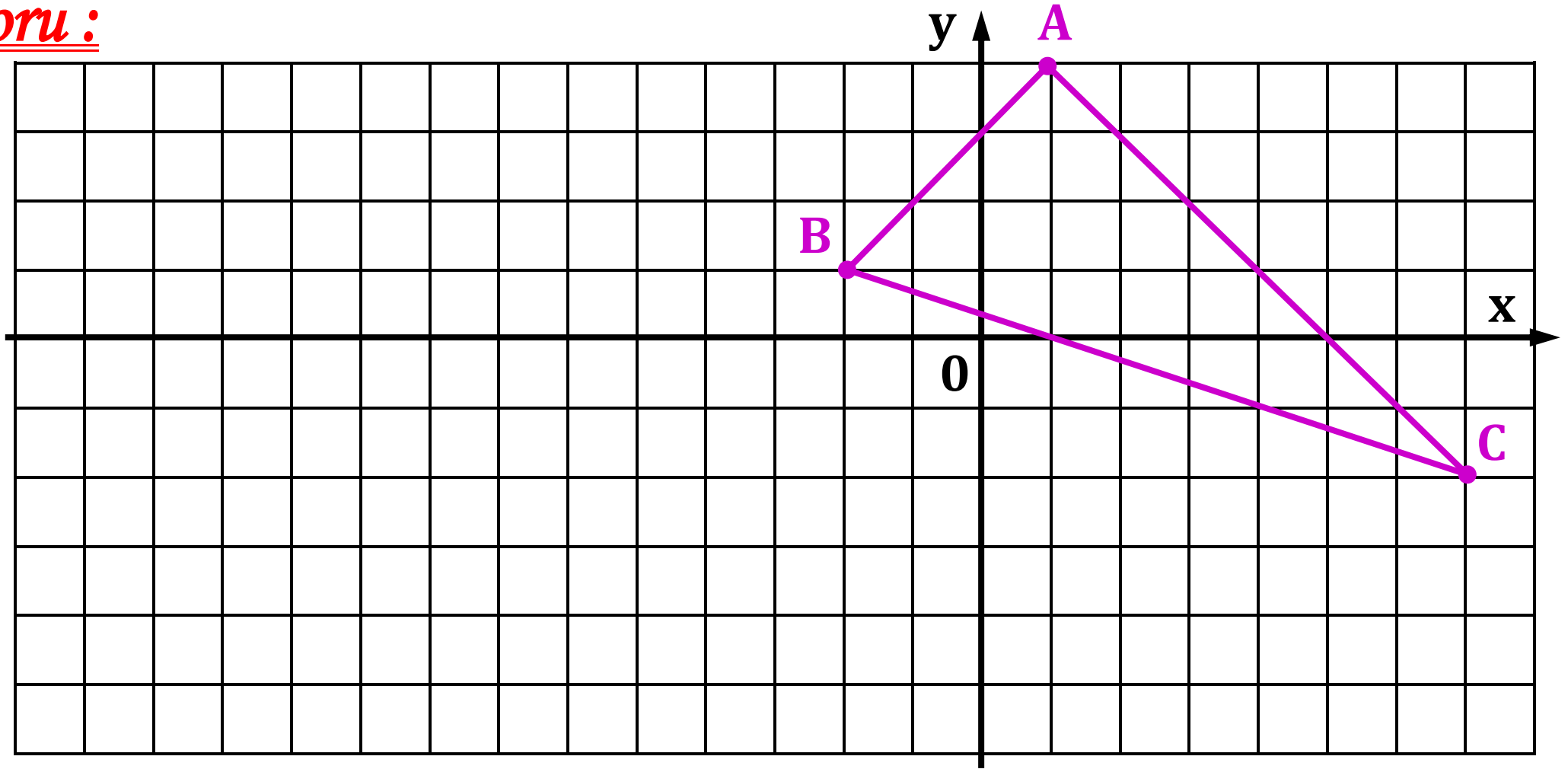
Soru : Analitik düzlemde $A (3p - 5 , q + 4)$ noktası önce hem x hem de y eksenini boyunca negatif yönde 10 br ötelenmesi ile oluşan nokta $B (p + 2 , 3)$ ise $p + q = ?$

Soru :



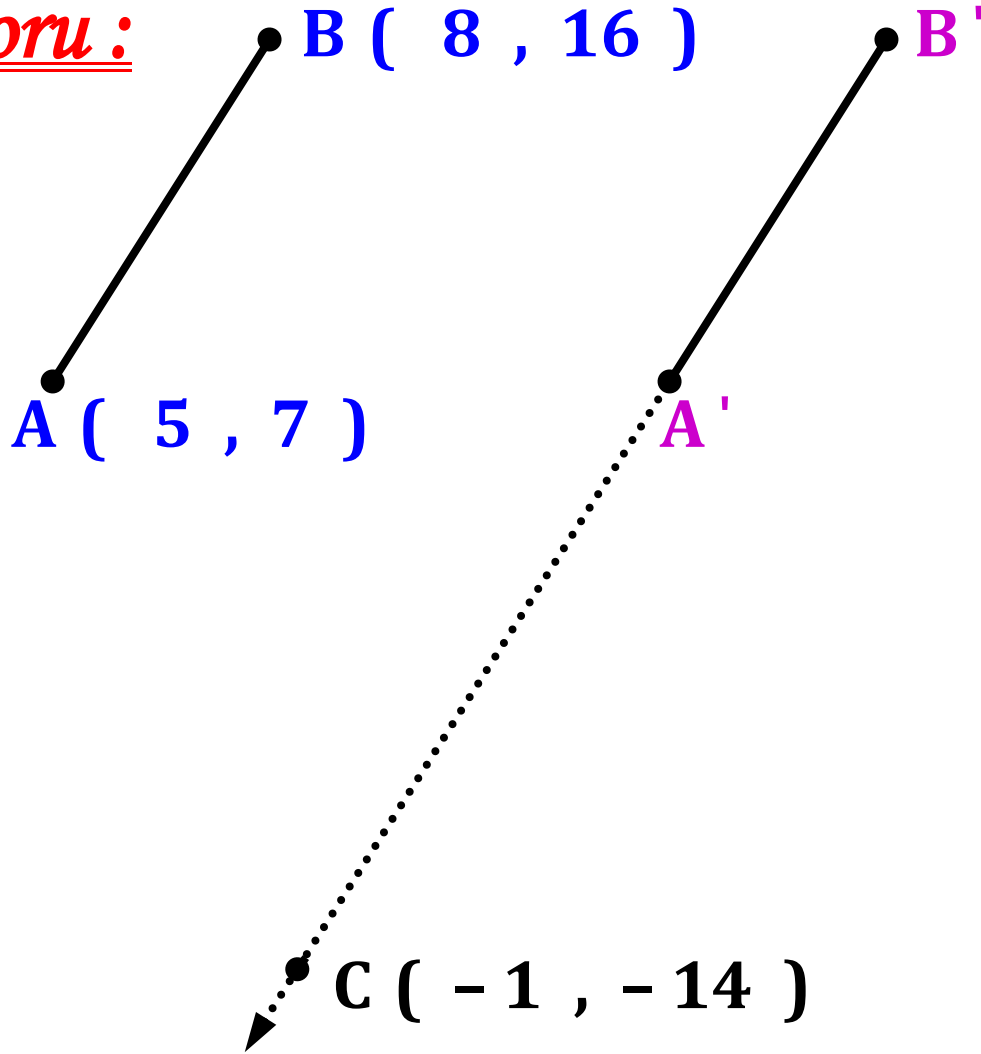
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCD paralelkenarı; x eksenini boyunca pozitif yönde 8 br, y eksenini boyunca negatif yönde 4 br ötelendiğinde oluşan A'B'C'D' paralelkenarını çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC
üçgeni; x eksenini boyunca negatif yönde 10 br,
y eksenini boyunca negatif yönde 3 br
ötelendiğinde oluşan A'B'C' üçgenini
çizip üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Soru :



[AB] doğru parçası x eksenini boyunca pozitif yönde k br ötelenmesi sonucunda elde edilen doğru parçasının uzantısı C noktasından da geçtiğine göre $k = ?$ (Eğim değişmez. $m_{AB} = m_{A'C} = m_{B'C}$ eşitliğinden çözüm bulunur.)

Hatırlatma : **A)** $y = f (x)$ olup $y = f (x + a)$ ise fonksiyonun grafiği **a br sola** (x eksenini boyunca negatif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

B) $y = f (x)$ olup $y = f (x - a)$ ise fonksiyonun grafiği **a br sağa** (x eksenini boyunca pozitif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

C) $y = f (x)$ olup $y = f (x) + a$ ise fonksiyonun grafiği **a br yukarı** (y eksenini boyunca pozitif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

D) $y = f (x)$ olup $y = f (x) - a$ ise fonksiyonun grafiği **a br aşağı** (y eksenini boyunca negatif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

2. Yol: Fonksiyonun grafiği çizilir. Öteleme yapılır ve yeni bulunan noktalardan geçen fonksiyonun denklemi bulunur.

Soru: $y = f(x) = 2x + 6$ doğrunun x eksenini boyunca pozitif yönde 2 br ötelenmesiyle elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

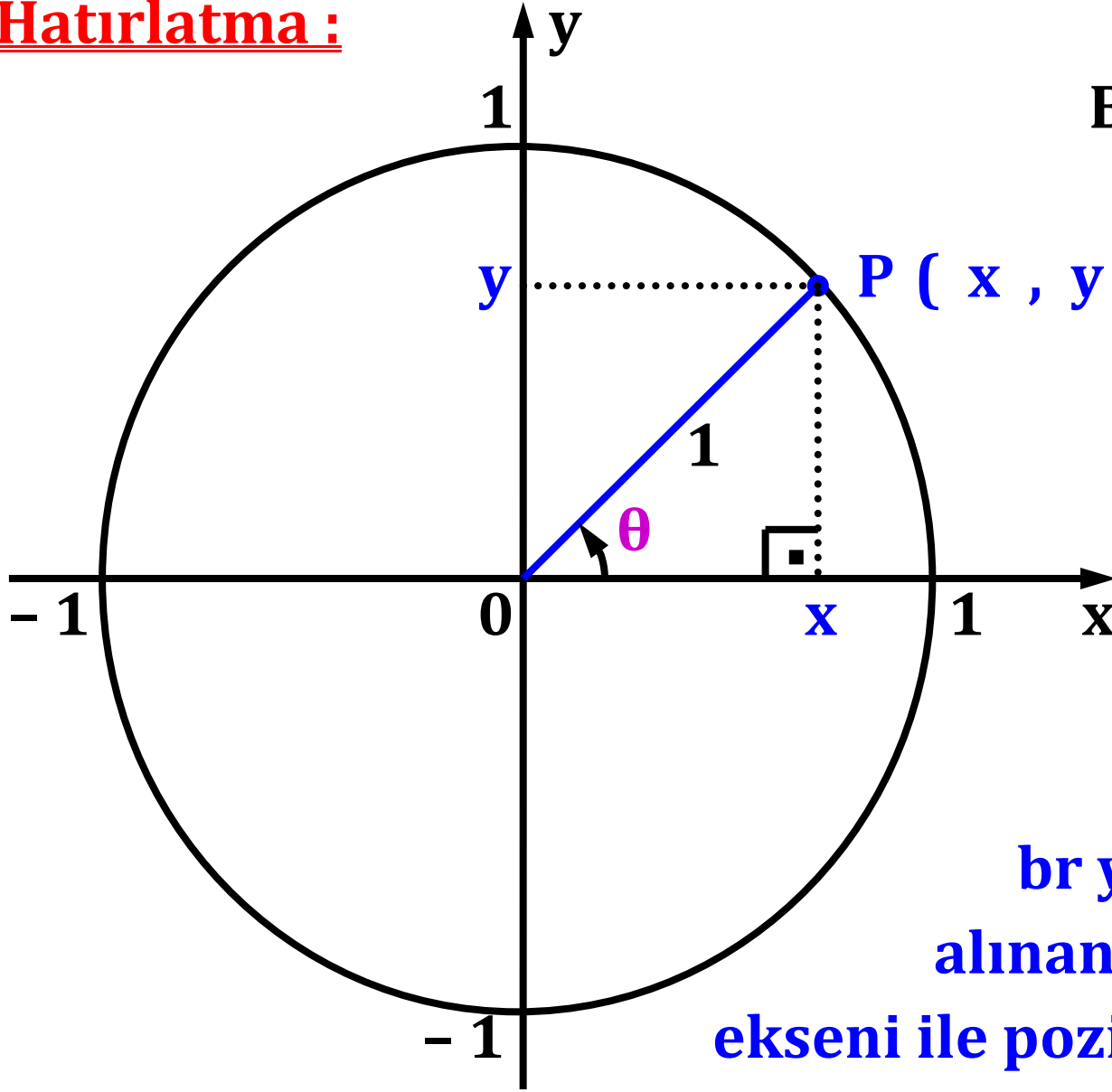
2. Vol:

Soru: $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ parabolünün x eksenini boyunca pozitif yönde 1 br ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemi ne olur?

Soru : $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ parabolünün önce; x eksenini boyunca negatif yönde 2 br, ardından da y eksenini boyunca negatif yönde 4 br ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemi ne olur ?

Dönme Dönüşümü

Hatırlatma :



Birim çember üzerinde alınan bir nokta $P (x , y)$ olsun.

$$\sin \theta = y / 1 \text{ ve} \\ \cos \theta = x / 1 \text{ olur.}$$

$$x = \cos \theta , y = \sin \theta \text{ idi.}$$

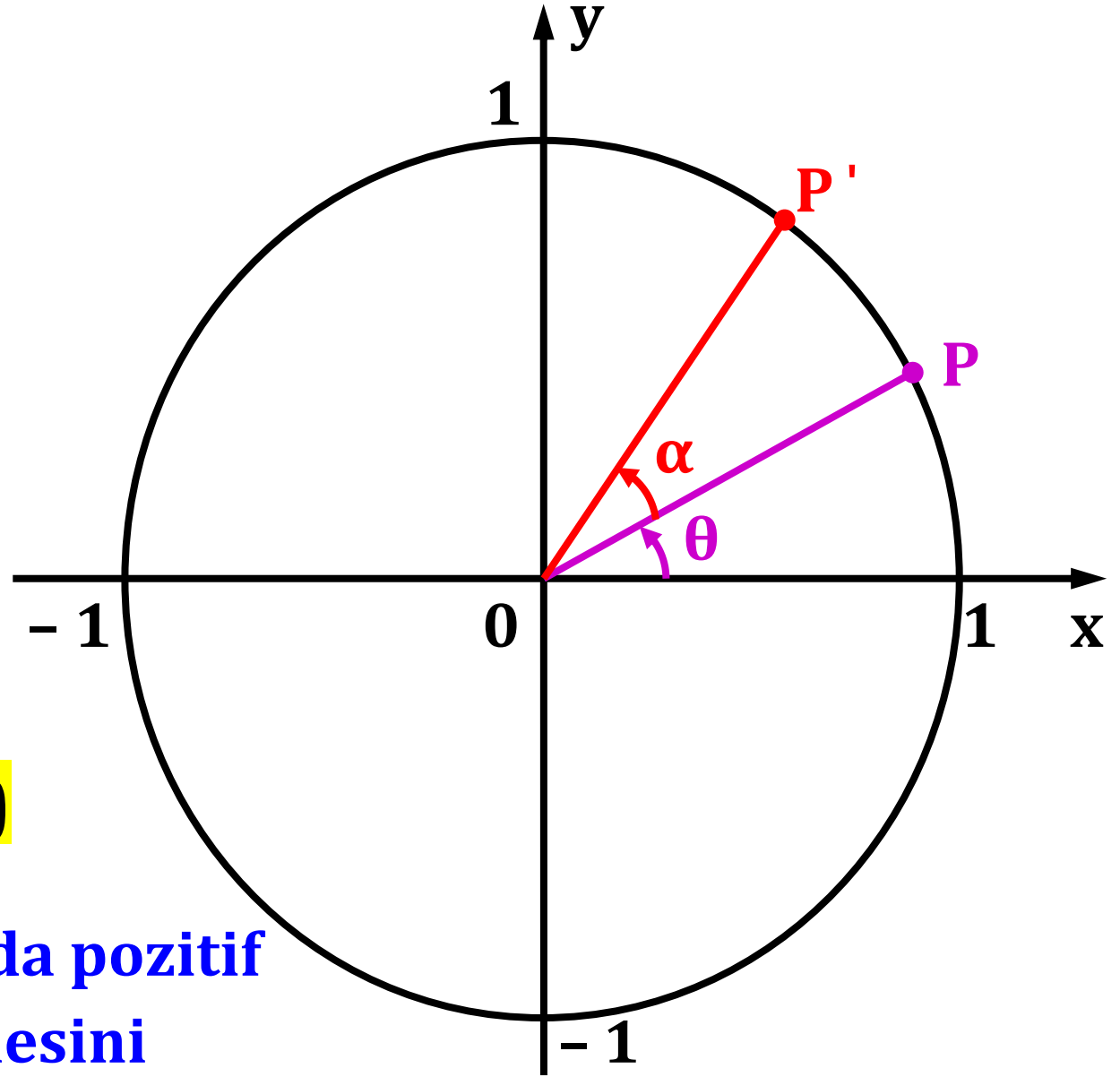
Not : Analitik düzlemde r br yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir $P (x , y)$ noktasının x eksenine ile pozitif yönde yaptığı açı θ olsun.

Buna göre $x = r . \cos \theta$, $y = r . \sin \theta$ olarak bulunur.

Kural: Analitik düzlemde r br yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir $P (x , y)$ noktasının x eksenine pozitif yönde yaptığı açı θ olsun. P noktasının orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta $P' (x' , y')$ olsun.

$$P' (x' , y') = R_{\alpha} (P)$$

P noktasının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesini simgeler. (Pozitif Yön : Saat yönünün tersi idi.)



$$x = r \cdot \cos \theta \quad , \quad y = r \cdot \sin \theta \quad \text{idi.}$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos (\theta + \alpha) = r \cdot [\cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha] \\ &= \underbrace{r \cdot \cos \theta}_x \cdot \cos \alpha - \underbrace{r \cdot \sin \theta}_y \cdot \sin \alpha = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \quad \text{bulunur.}$$

$$\begin{aligned} y' &= r \cdot \sin (\theta + \alpha) = r \cdot [\sin \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot \sin \alpha] \\ &= \underbrace{r \cdot \sin \theta}_y \cdot \cos \alpha + \underbrace{r \cdot \cos \theta}_x \cdot \sin \alpha = y \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$y' = y \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha \quad \text{bulunur.}$$

$$R_{\alpha} (P) = P' (x' , y') = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha ,$$

$$y \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha) \quad \text{olur.}$$

Soru : Analitik düzlemde $P (- 1 , \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz. (**2.Yol :** Noktayı analitik düzlemde işaretlediğimizde özel dik üçgen elde edebiliyorsak, nokta α açısı kadar döndürülür ve yeni nokta elde edilir.)

Soru : Analitik düzlemde $P (2\sqrt{3} , 2)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde $P (6 , - 6)$ noktasının orijin etrafında saat yönünde 315° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz. (Negatif yönde α açısı kadar döndürmek, noktayı pozitif yönde $360^\circ - \alpha$ açısı kadar döndürmektir.)

Soru : Analitik düzlemde $P (1 , 3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 120° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz. (Büyük açılarda açıyı dar açı türünden yazmak gerekir.)

Soru : Analitik düzlemde $P (- 4 , - 1)$ noktasının orijin etrafında saat yönünün tersi yönünde 225° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde dördüncü bölgede bulunan $P (6 , k)$ noktasının orijin noktasına olan uzaklığı $2\sqrt{13}$ br'dir. Noktanın orijin etrafında pozitif yönde 1575° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde $P (x , y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 330° döndürülmesi ile oluşan nokta $P'(2 , 2\sqrt{3})$ ise P noktasının koordinatlarını bulunuz. (Denklemlerin taraf tarafa çözümü uzundur. Çizimden sonucu bulmak daha kolay olur.)

Soru : Analitik düzlemde $P (0 , 4)$ noktası; önce orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmüş, ardından da x eksenini boyunca negatif yönde 3 br ötelendiğinde oluşan noktanın koordinatları ne olur ? (Öteleme ve dönme dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere “ ötelemeli dönme dönüşümü ” adı verilir.)

Soru : Analitik düzlemde $P (10 , - 2)$ noktası; önce orijin etrafında pozitif yönde 135° döndürülmüş, ardından y eksenini boyunca negatif yönde 2 br, ardından da x eksenini boyunca pozitif yönde 5 br ötelendiğinde oluşan noktanın koordinatları ne olur ?

Not : **A)** Bir $P (x , y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle oluşan noktayı bulalım.

$$\begin{aligned} R_{90^\circ} (P) &= P' (x' , y') = (x \cdot \cos 90^\circ - y \cdot \sin 90^\circ , \\ &\quad y \cdot \cos 90^\circ + x \cdot \sin 90^\circ) \\ &= (x \cdot 0 - y \cdot 1 , y \cdot 0 + x \cdot 1) = (-y , x) \end{aligned}$$

$$R_{90^\circ} (P) = P' (x' , y') = (-y , x) \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde alttaki sonuçlar bulunur.

$$\textbf{B)} \quad R_{180^\circ} (P) = P' (x' , y') = (-x , -y) \text{ bulunur.}$$

$$\textbf{C)} \quad R_{270^\circ} (P) = P' (x' , y') = (y , -x) \text{ bulunur.}$$

$$\textbf{D)} \quad R_{360^\circ} (P) = P' (x' , y') = (x , y) \text{ bulunur.}$$

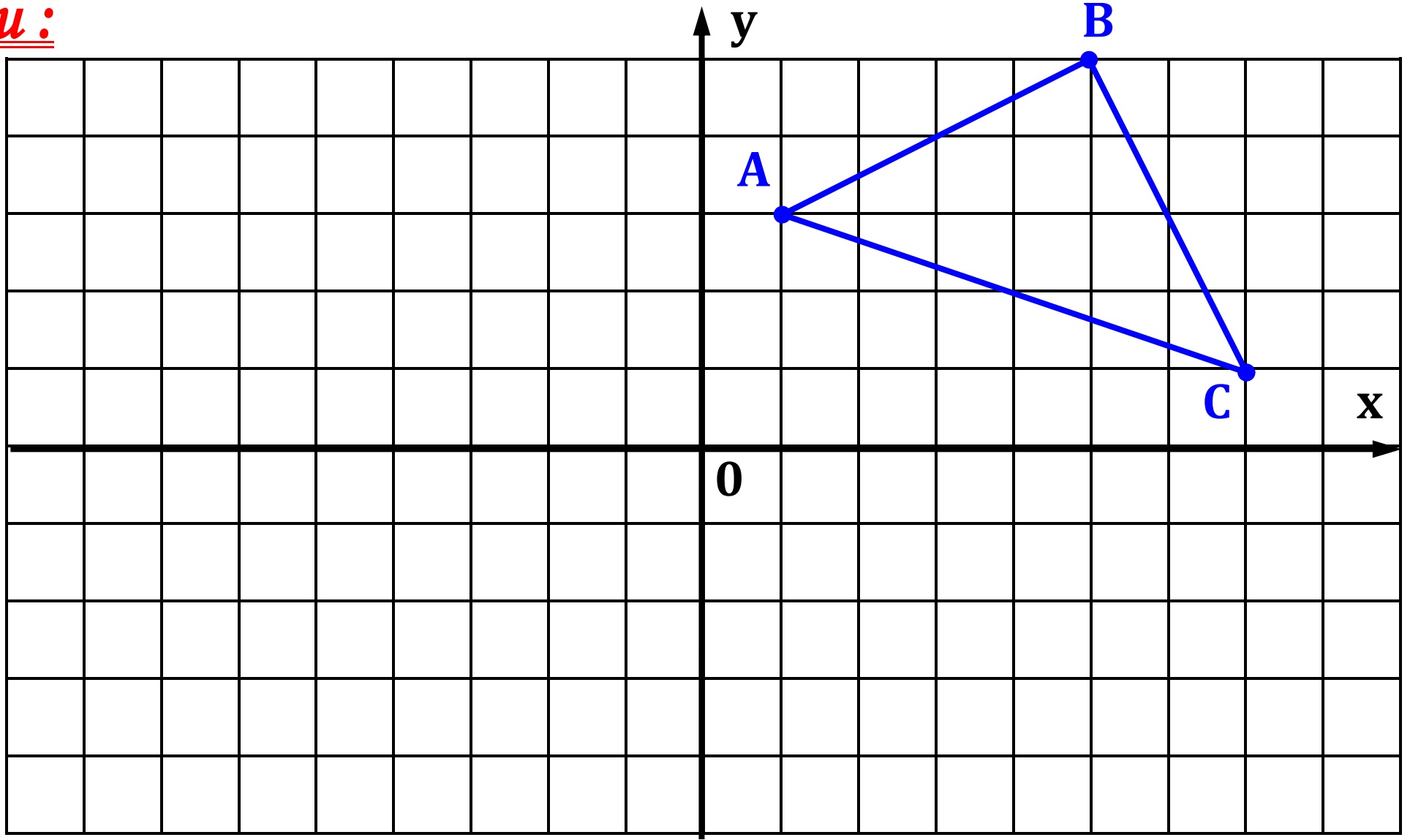
Soru : Analitik düzlemde $P (- 4 , - 1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesiyle oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde $P (- 2 , 5)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde; önce 180° , ardından da 270° döndürülmesiyle oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Analitik düzlemde $P (8 , 1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle $Q (k - 1 , m + 4)$ noktası elde ediliyorsa $k . m = ?$

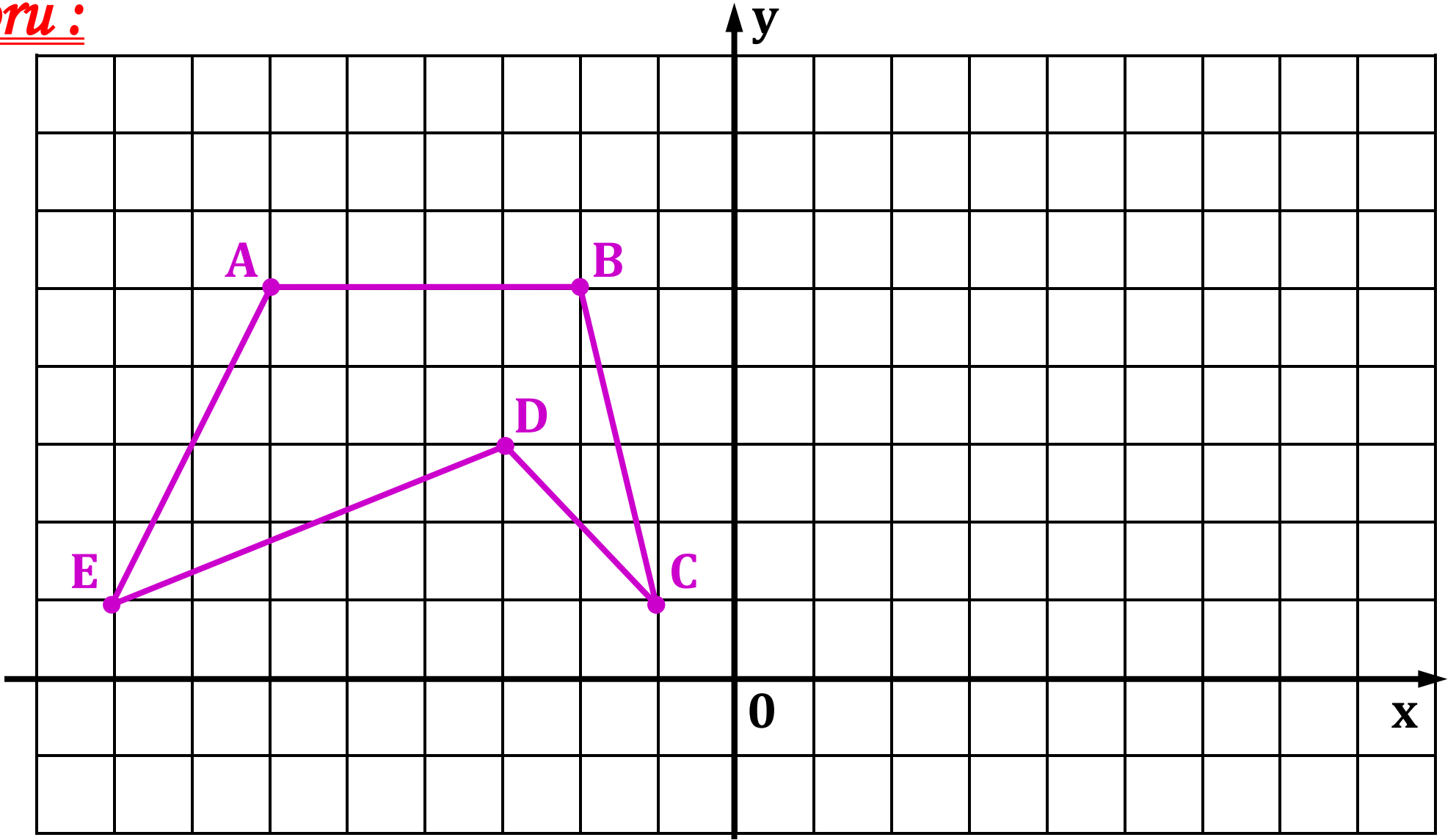
Soru : Analitik düzlemde $P (2t - 5 , 6 + z)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülmesiyle $Q (9 , - 2 + z)$ noktası elde ediliyorsa $t + z = ?$

Soru :



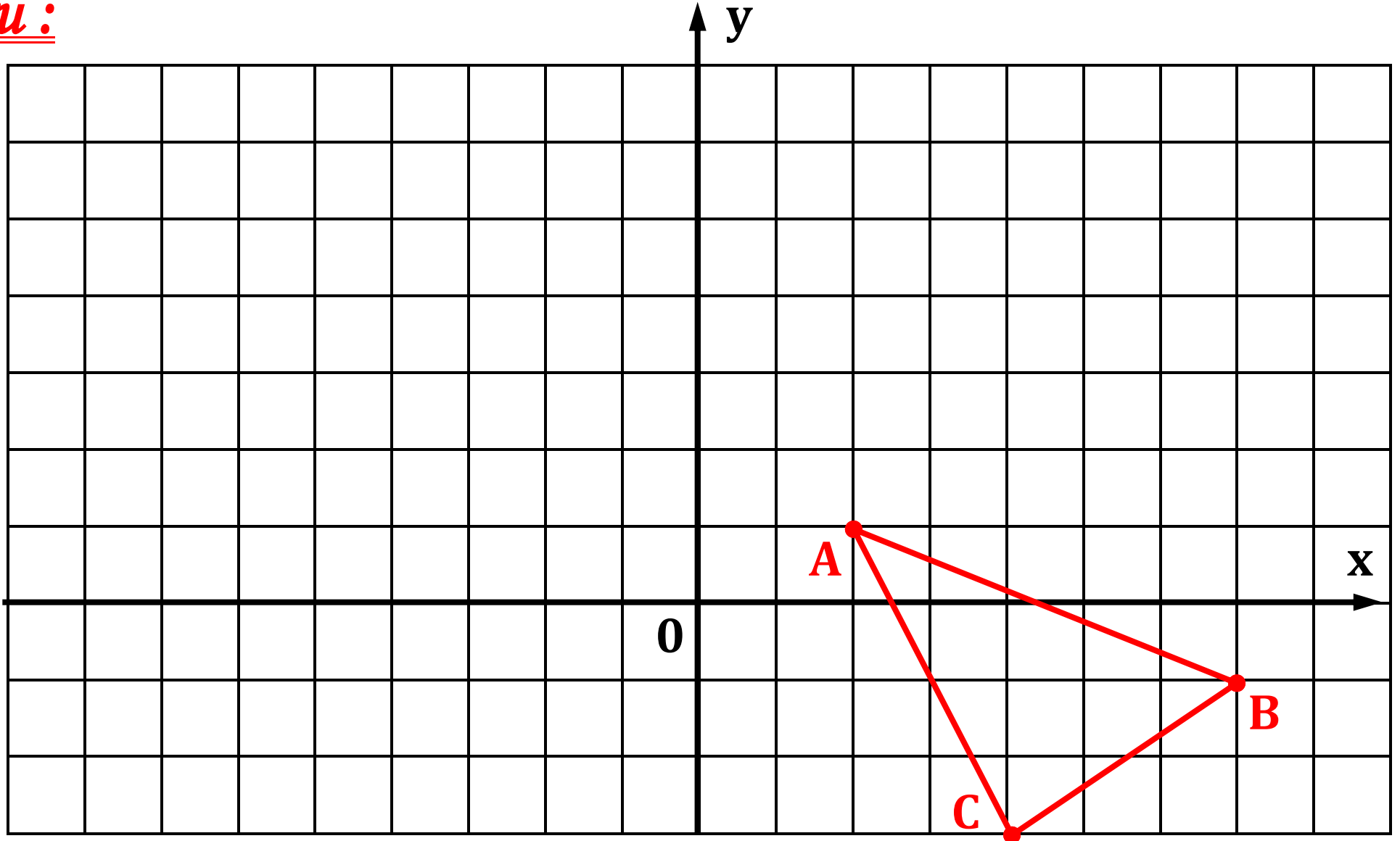
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde
ABC üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 180°
döndürüldüğünde oluşan $A'B'C'$ üçgenini çiziniz.

Soru :



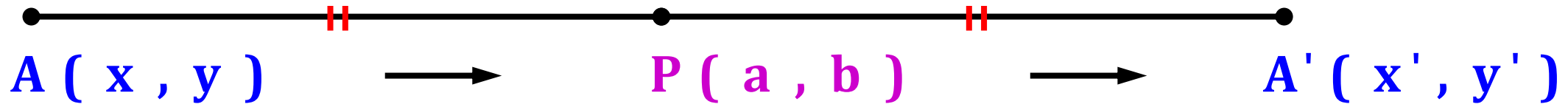
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCDE beşgeni orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürüldüğünde oluşan A'B'C'D'E' dörtgenini çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC üçgeni önce; orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmüş, ardından da x eksenini boyunca negatif yönde 4 br ötelendiğinde oluşan yeni üçgeni çiziniz.

Bir Noktanın Bir Başka Noktaya Göre Simetriği



Bir A noktasının bir P noktasına göre simetriği A' olsun. A ile A' noktalarının P noktasına olan uzaklığı aynı olacağından P noktası orta nokta olur.

$$a = \frac{x + x'}{2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{y + y'}{2} \quad \text{olarak alınır.}$$

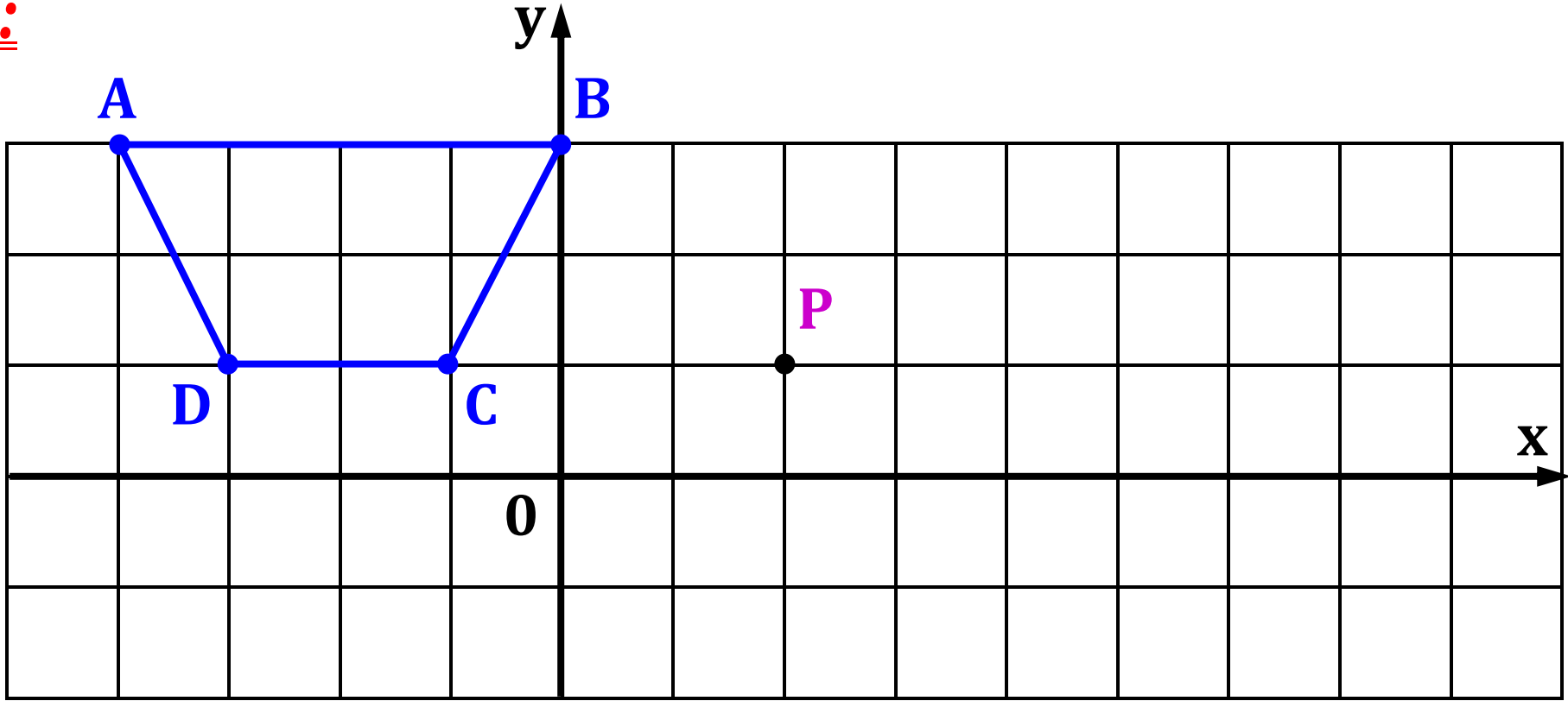
Soru : A (3 , - 12) noktasının bir P noktasına göre simetriği A' (- 9 , 20) ise P noktasını bulunuz.

Soru : A (21 , 8) noktasının bir P (5 , 10) noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz. (Artma – azalmadan da istenen değerler bulunabilir.)

Soru: $A (- 6 , 2)$ noktasının bir $P (3 , - 5)$ noktasına göre A' , P' 'nin de A' noktasına göre simetriği P' ise A' ile P' noktalarını bulunuz.

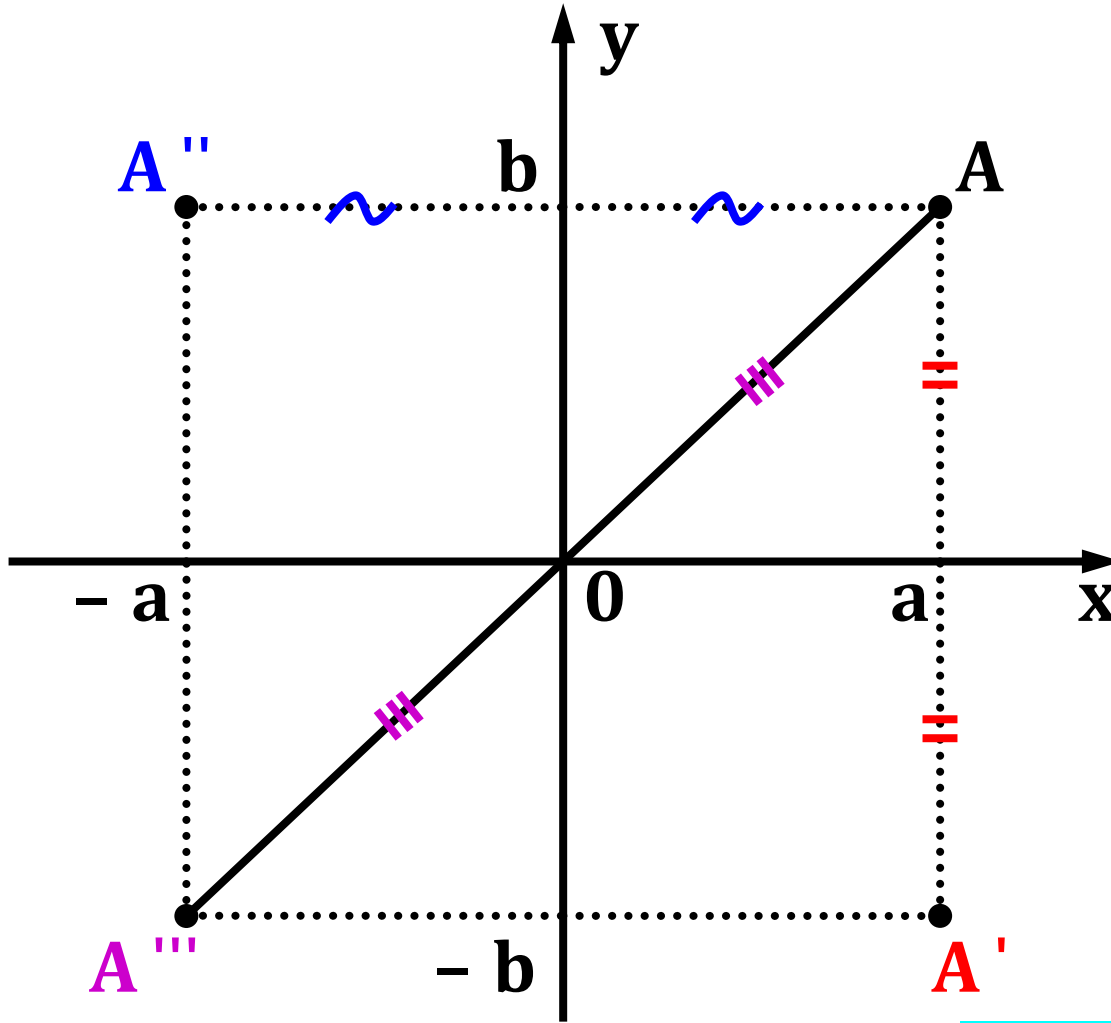
Soru: $A (k - 3 , 1)$ noktasının bir $P (1 + k , 7)$ noktasına göre simetriği $A' (2 , 3m + 10)$ ise $| AA' | = ?$

Soru :



**Birim karelere bölünmüş
analitik düzlemde
ABCD yamuğunun
P noktasına göre
simetriği olan A'B'C'D'
yamuğunu çiziniz.**

Bir Noktanın x , y ve Orijine Göre Simetriği



Bir $A (a , b)$ noktasının
 x eksenine göre simetriği

$A' (a , - b)$ olur.

Bir $A (a , b)$ noktasının
 y eksenine göre simetriği

$A'' (- a , b)$ olur.

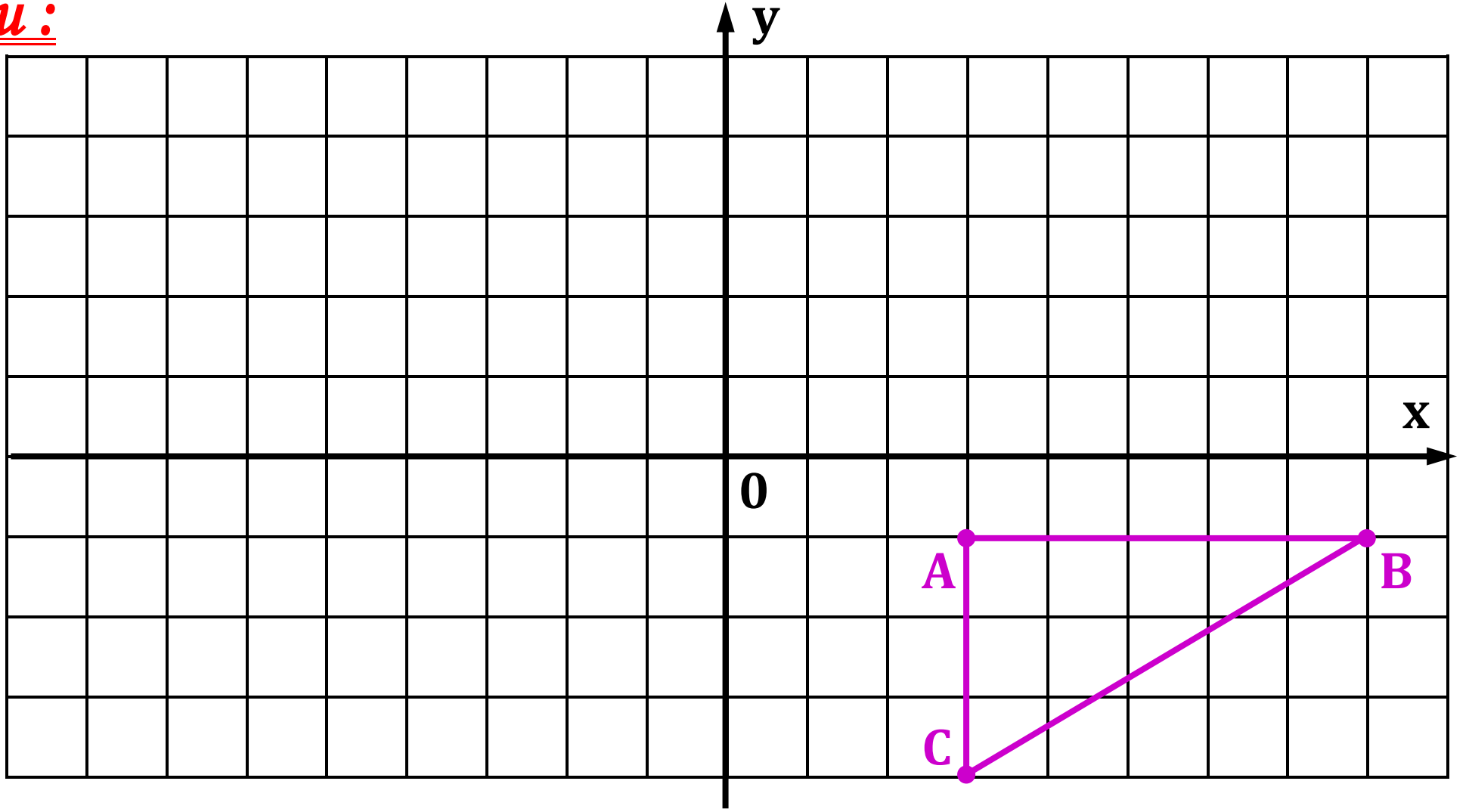
Bir $A (a , b)$ noktasının orijine
göre simetriği $A''' (- a , - b)$ olur.

Soru : A (8 , 7) noktasının orijine göre simetriği B , B noktasının da y eksenine göre simetriği C noktası ise C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Soru: A (- 10 , 1) noktasının y eksenine göre simetriği B , B noktasının x eksenine göre simetriği C , C noktasının ise x eksenine göre pozitif yönde 3 br ötelenmesiyle oluşan nokta da D ise D noktasının koordinatlarını bulunuz.

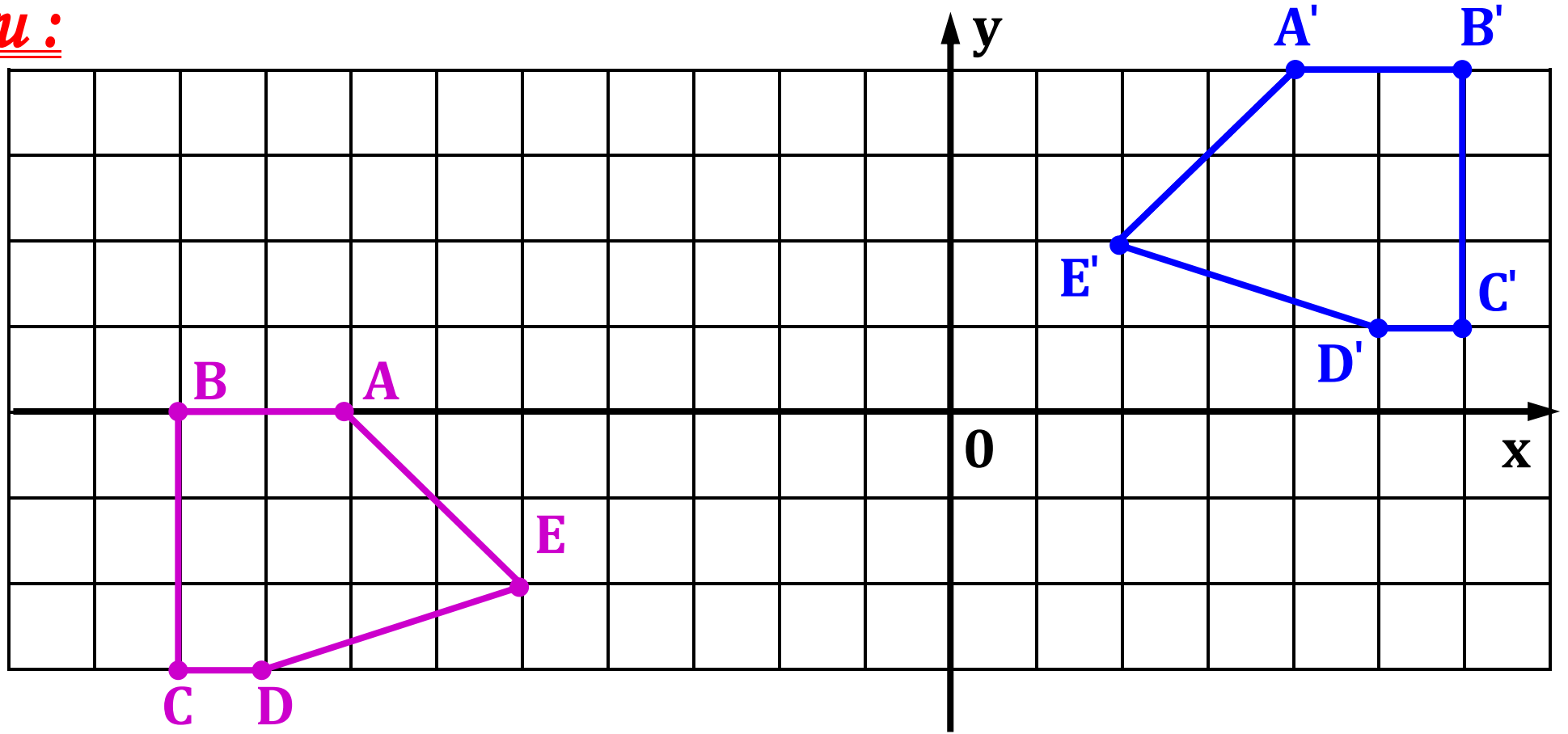
Soru: A ($3k + 7$, $4 - t$) noktasının x eksenine göre simetriği B , B noktasının da orijine göre simetriği C (13 , 9) ise $k . t = ?$

Soru :



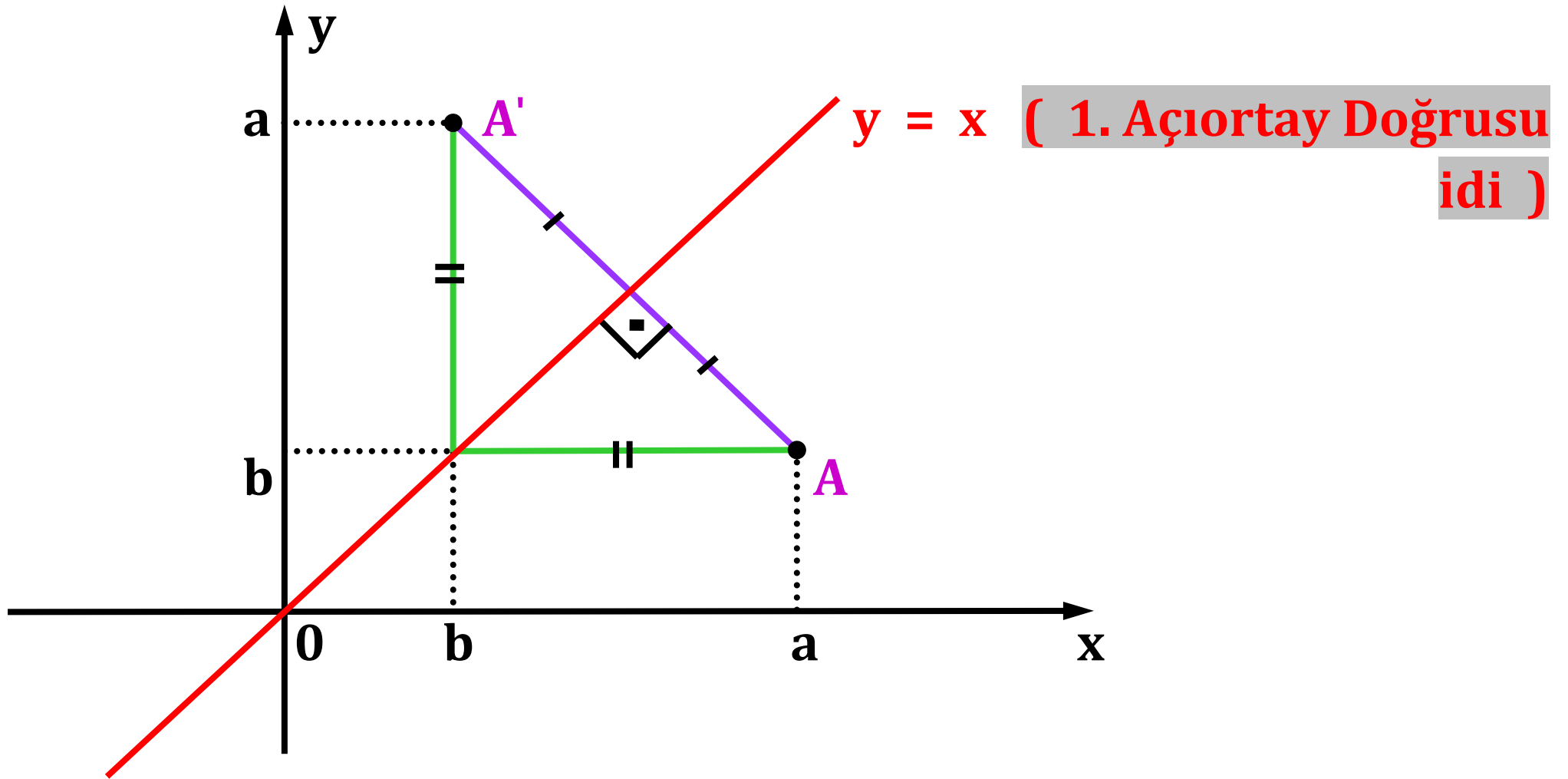
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC üçgeninin önce x eksenine göre simetriği alınıp; ardından x eksenini boyunca negatif yönde 10 br, y eksenini boyunca ise pozitif yönde 1 br ötelenmesiyle oluşan yeni üçgeni çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCDE beşgenine bir takım öteleme ve simetri aşamaları uygulanarak şekildeki gibi A'B'C'D'E' dörtgeni elde edilmiştir. Bu aşamaların ne olduğunu bulunuz.

Bir Noktanın $y = x$ Doğrusuna Göre Simetriği



Bir $A(a, b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği

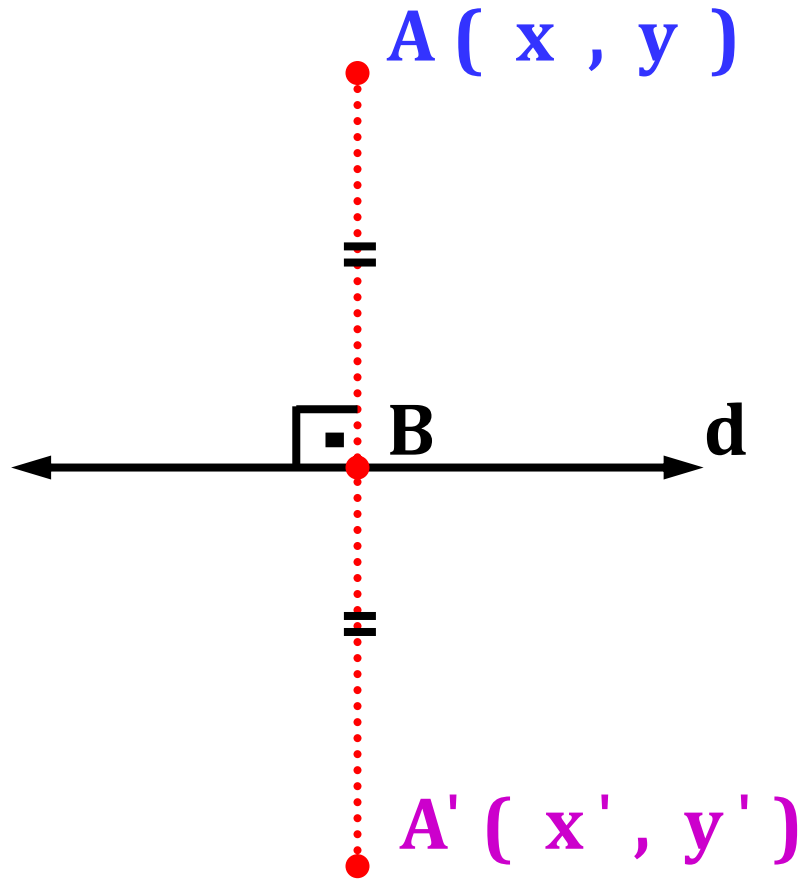
$A'(b, a)$ olur.

Soru : A ($2m - 7$, $n + 8$) noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği A' (2 , -13) ise $m + n = ?$

Soru: A (8 , 5 - t³) noktasının y = x doğrusuna göre simet-
riği B (32 , t + k - 2) ise t.k = ?

Soru : A ($3p - 5 + q$, $q + 15$) noktasının 1.açıortay doğrusuna göre simetriği B ($9 - q$, $1 + p$) ise B noktasının y eksenine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği



A noktasının bir d doğrusuna göre simetriğini bulmak için;

i. d doğrusunun eğimi bulunur.

ii. $m_{AB} \cdot m_d = -1$ idi. m_{AB} bulunur.

iii. A ile B noktalarından geçen doğrunun denklemi bulunur.

iv. İki doğru denkleminin ortak çözümünden B noktası elde edilir.

v. Orta nokta kuralından A' noktası bulunur.

Soru: Bir A (- 6 , 8) noktasının $y = 2x + 10$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Soru : Bir A (7 , 6) noktasının $y + x = - 4$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

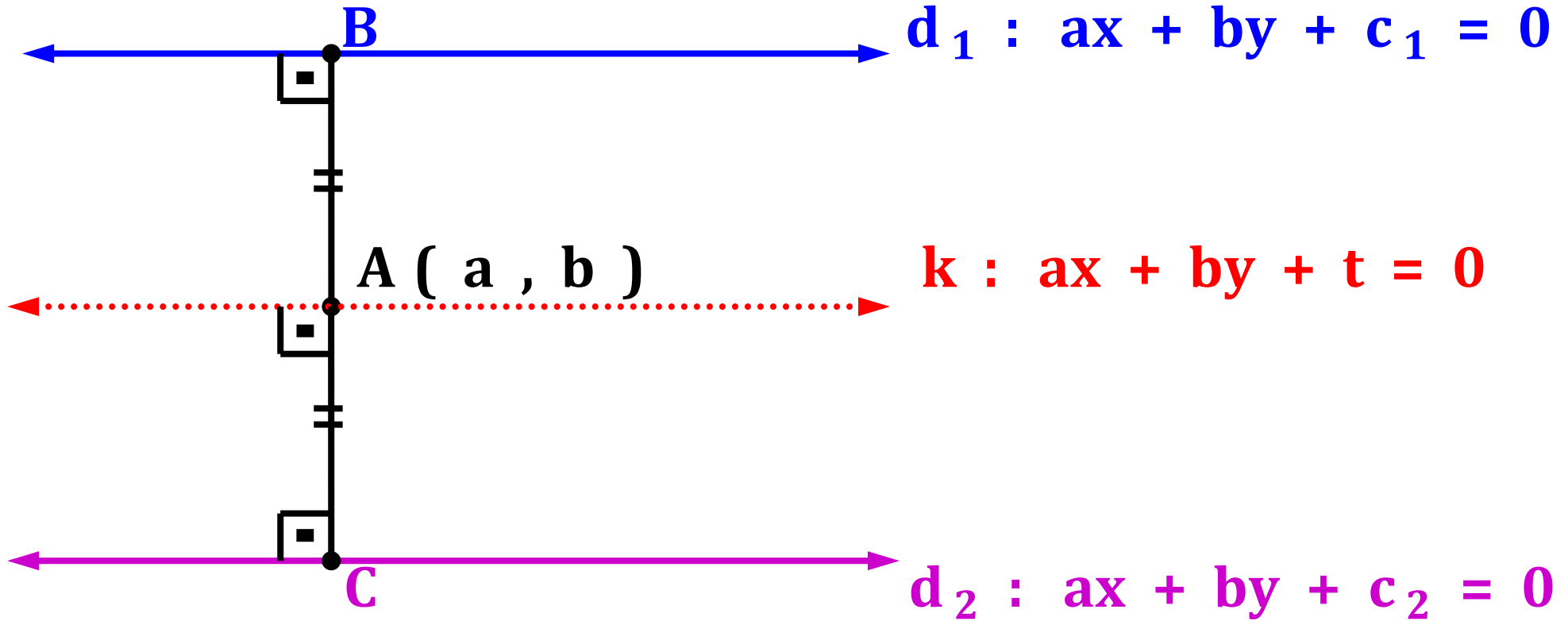
Soru : Bir $A (- 1 , 3)$ noktasının bir d doğrusuna göre simet-
riği olan nokta $A' (3 , 7)$ ise bu doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : Bir $A (2 , - 4)$ noktasının $x - y + 6 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan nokta A' ise $|AA'| = ?$ (**Kısayol:** Bir

$P (x_0 , y_0)$ noktasının bir $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan

uzaklığı $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ idi.)

Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği



Bir d_1 doğrusunun bir A noktasına göre simetriği d_2 olsun. $d_1 \parallel d_2$ olur. A noktasından geçen ve bu doğrulara **paralel** olan bir k doğrusu alınır. A noktası k doğru denklemine uygulanır ve t sayısı bulunur. t sayısı c_1 ve c_2 sayılarının ortasıdır.

Soru: Bir $2y - x + 6 = 0$ doğrusunun A (- 2 , 5) noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : Bir $3x + 2y - 12 = 0$ doğrusunun A (1 , - 3) noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

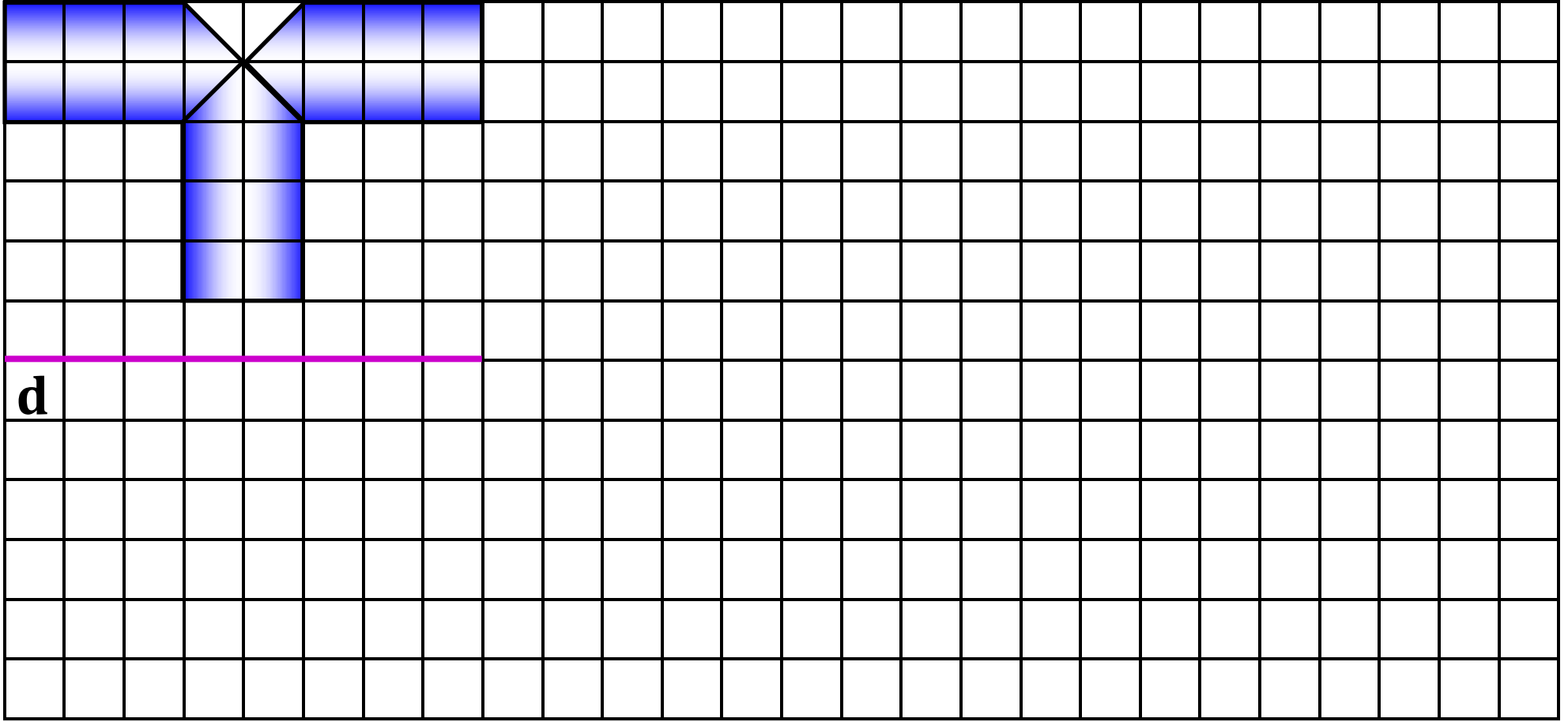
Soru : Bir $3x - 4y + 1 = 0$ doğrusunun $A (2 , 1 / 2)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini ve iki doğru arası mesafeyi bulunuz.

Örnek Uygulamalar

Öteleleme, dönme ve simetri kavramlarını; mimari eserlerde, doğada, süsleme el işlerinde v.b. alanlarda görebiliriz.

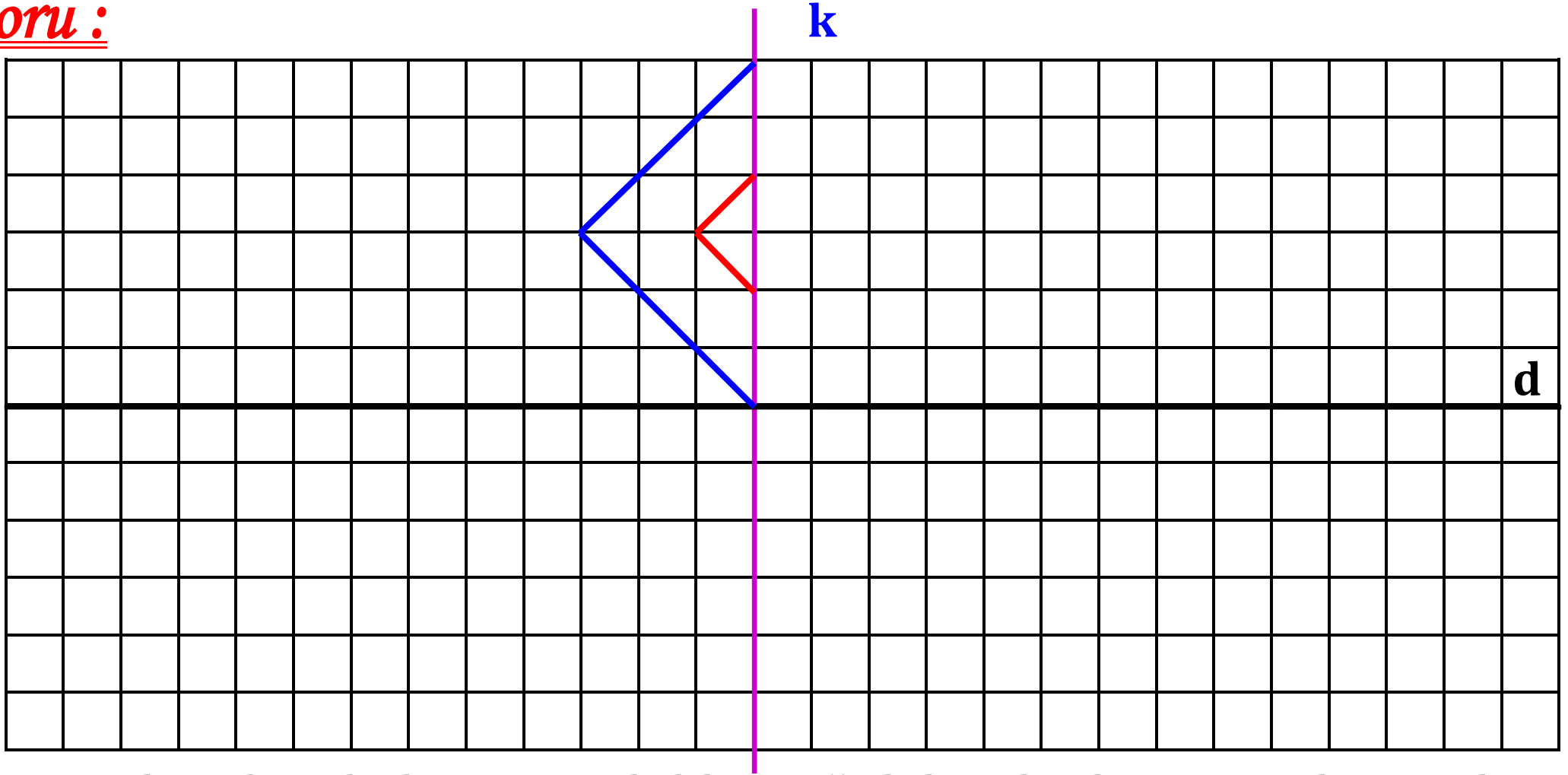


Soru :



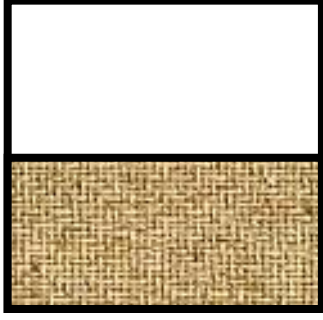
Birim karelere bölünmüş şekilde mavi boyalı şeklin önce d doğrusuna göre simetriği alınıyor. Elde edilen tüm şeklin kopyası arada bir sütun boşluk kalacak şekilde bir birim sağa öteleniyor. Aynı öteleme bir kez daha yapılırsa tüm şeklin son durumunu bulunuz.

Soru :



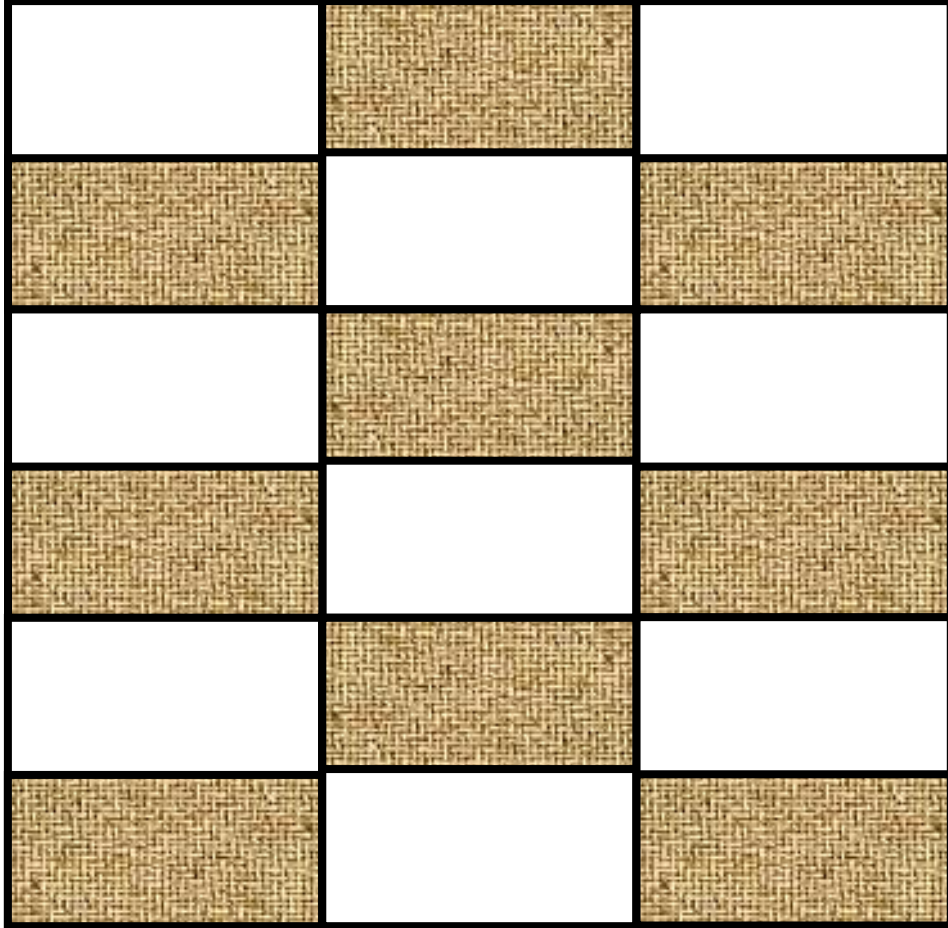
Birim karelere bölünmüş şekilde aşağıdaki adımlar sırası ile uygulanırsa oluşacak motifi bulunuz. **1)** Mavi ve kırmızı çizgilerin k doğrusuna göre simetriği alınıyor. **2)** Tüm çizgilerin d doğrusuna göre simetriği alınıyor. **3)** Elde edilen motif, iki şekil arasında bir sütun boşluk kalacak şekilde sağ ve sol tarafa öteleniyor.

Soru :

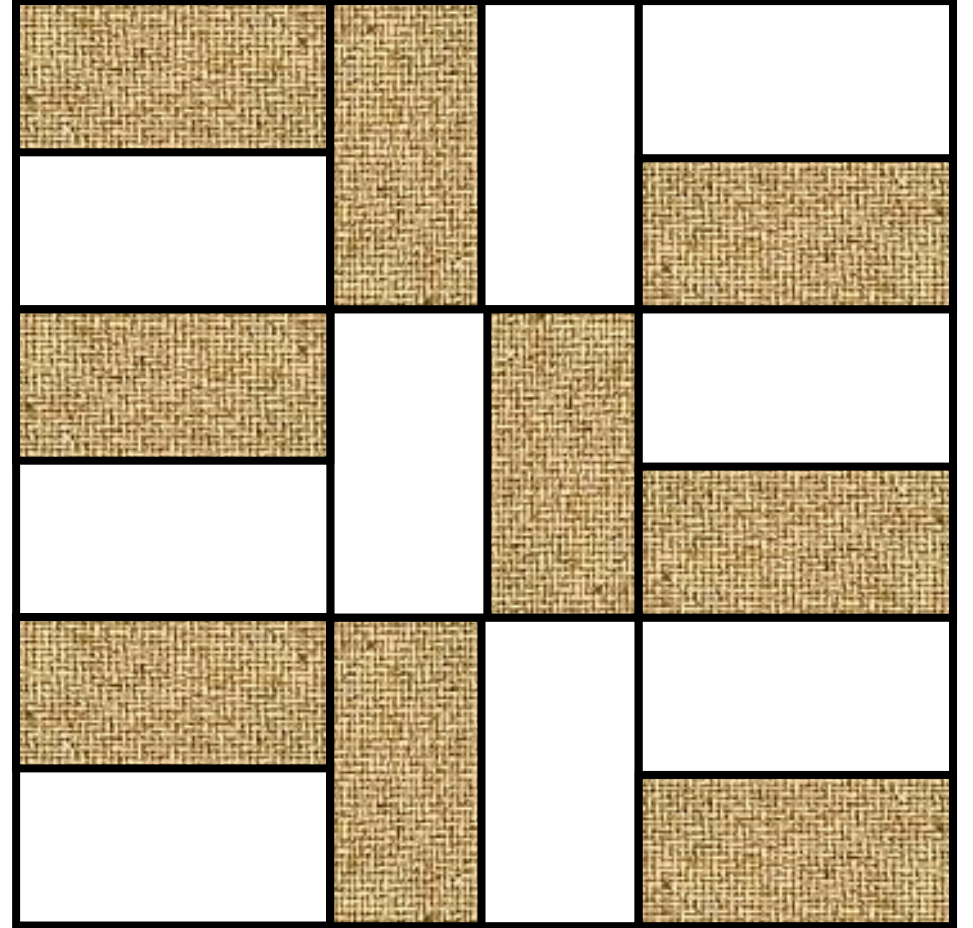


Yandaki şekle öteleme, simetri, döndürme
aşamalarından hangileri uygulanırsa alttaki
desenlerden hangisi elde edilemez ?

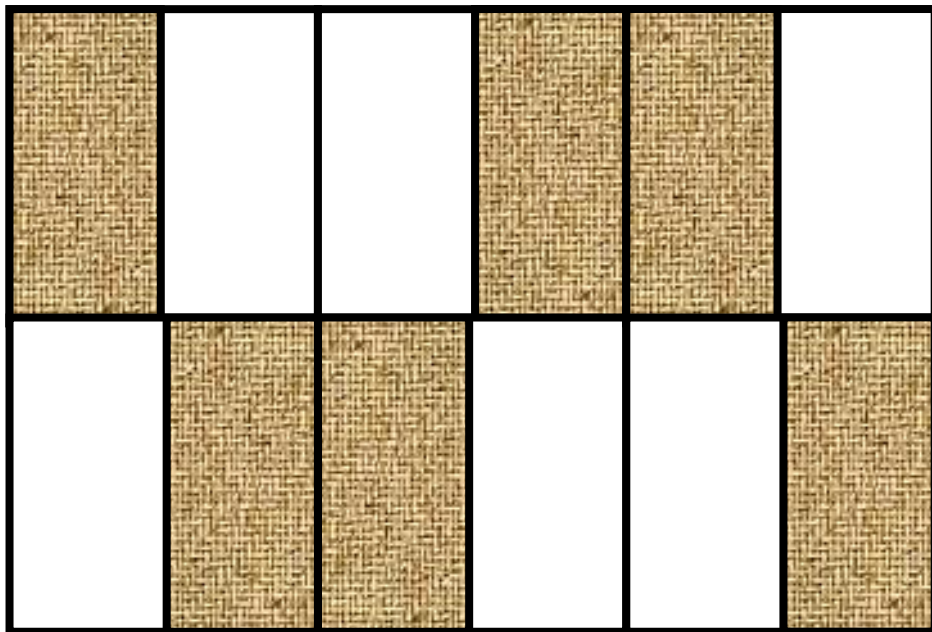
A)



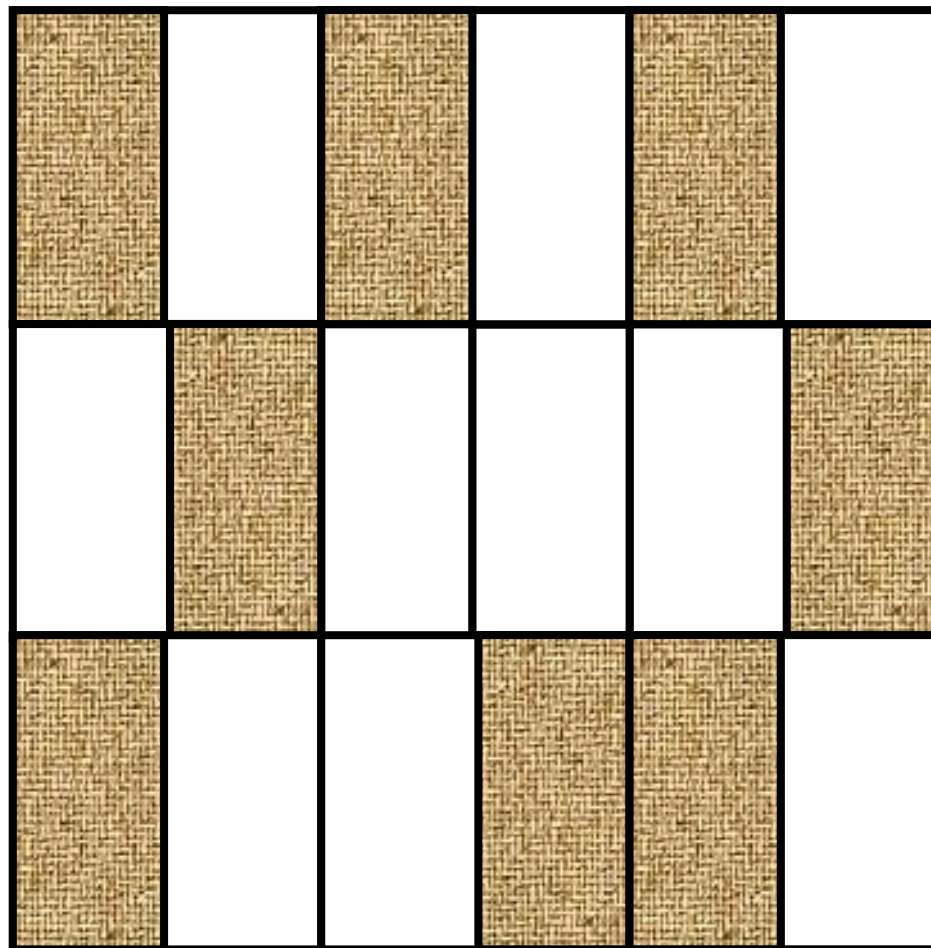
B)



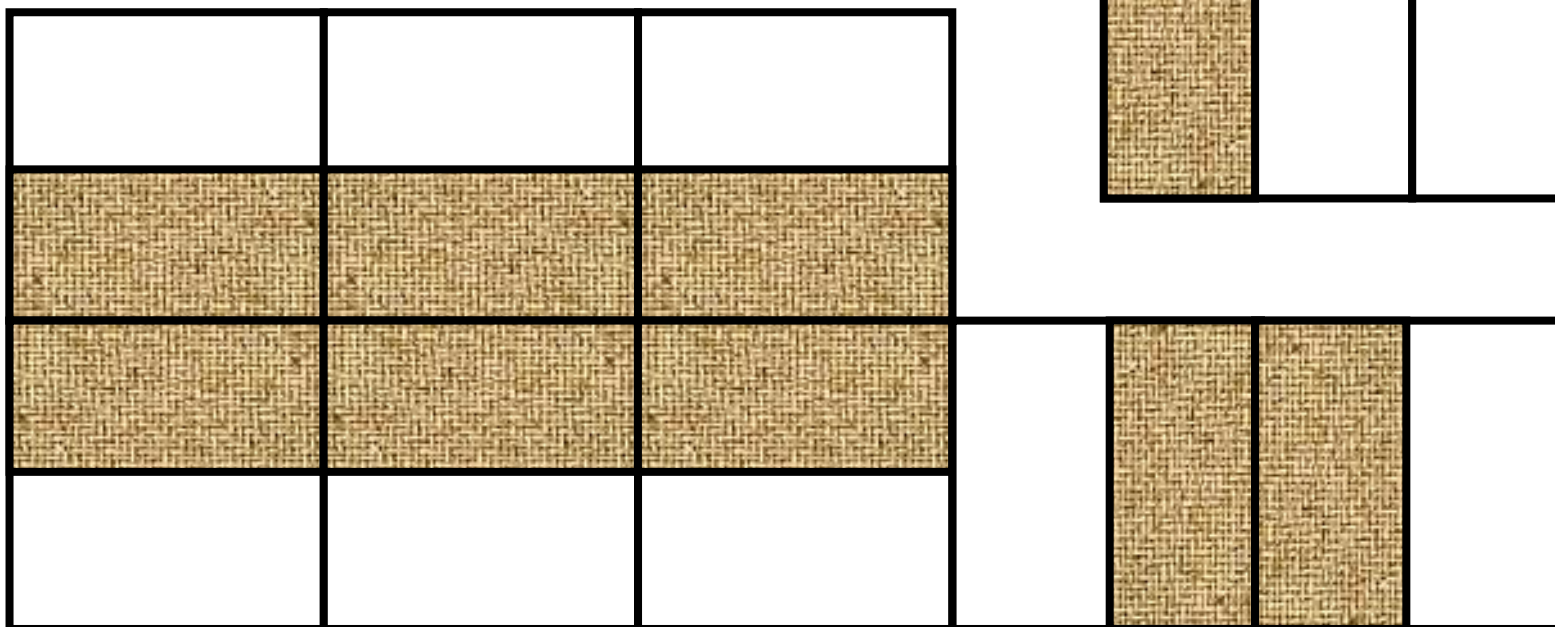
C)



D)



E)



Soru : Altta verilen harflere alttaki aşamalar uygulandıktan sonra oluşan harf sırasını d doğrusunun altına yazınız.

- 1.** Son harf en başa, diğerleri de sağa ötelenir.
- 2.** İkinci harfin d doğrusuna göre simetrisi alınır.
- 3.** Son harf saat yönünün tersi yönünde 90° döndürülür.

V

—T

H

_____ d

Soru : Altta verilen sayı grubu merkez nokta etrafında saat yönün-
de 4590° döndürülürse sayı grubunun yeni durumunu bulunuz.

0	1
2	3