

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 5. 2. Anlık Değişim Oranı ve Türev

Terimler ve Kavramlar: Anlık değişim oranı, teğetin eğimi, türev, sağdan türev, soldan türev

Sembol ve Gösterimler: $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{d^2x}$, $f'(a^+)$, $f'(a^-)$

12. 5. 2. 1. Türev kavramını açıklayarak işlemler yapar.

A) Anlık değişim oranı fizik ve geometri modellerinden yararlanılarak açıklanır.

B) Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetin eğimi arasındaki ilişki üzerinde durulur.

C) $f(x) = c$, $f(x) = ax^n$ ($a, c \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, 4$) fonksiyonlarının türevleri, türev tanımı kullanılarak hesaplatılır.

Ç) Yalnızca $f(x) = ax^n$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$) şeklindeki fonksiyonlar için türev kuralları verilir. Bunun dışındaki fonksiyonların (kapalı ve parametrik fonksiyonlar dâhil) türev kurallarına yer verilmez.

D) Rolle'nin çalışmalarına yer verilir.

12. 5. 2. 2. Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevlenebilirliğini değerlendirir.

A) Bir fonksiyonun tanım kümesinin açıkça belirtilmediği durumlarda tanım kümesi olarak, fonksiyonun kuralının geçerli olduğu en geniş küme alınır.

B) Fonksiyonun türevli olmadığı noktalarla grafiği arasında ilişki kurulur.

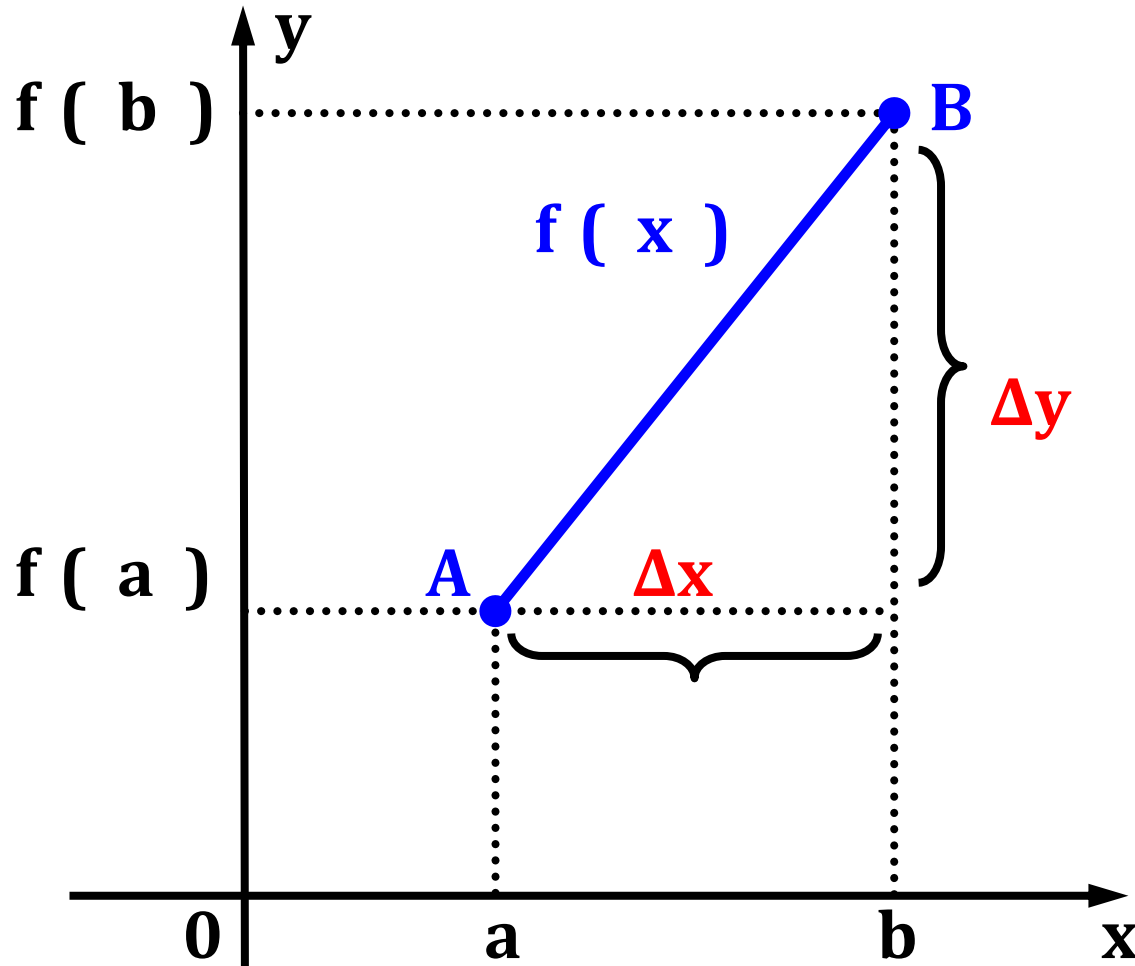
12. 5. 2. 3. Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün türevine ait kurallar yardımıyla işlemler yapar.

12. 5. 2. 4. İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturularak türev hesabı yapar.

TÜREV

Ortalama Değişim Hızı (11.Sınıf Konusu İdi)

Bir nesnede birim zamanda meydana gelen değişimler (artma , azalma vb.) “ **ortalama değişim hızı** ” olarak adlandırılır.



f fonksiyonunun $[a , b]$ aralığındaki **ortalama**

değişim hızı $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sembolü

ile gösterilirdi.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olarak alınır.

Δx : A 'dan B 'ye x değerindeki değişim ve Δy : A 'dan B 'ye y değerindeki değişimi gösterir.

Ortalama değişim hızına “ **değişim oranı** ” da denilir. V_{ort} ile de gösterilir.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = V_{ort} \text{ olarak ta alınır.}$$

Şimdiki sorularda ise;

Δx : Konumdaki değişimi (Veya ΔS olarak ta veriliyor.)

Δt : Zamandaki değişimi gösterir.

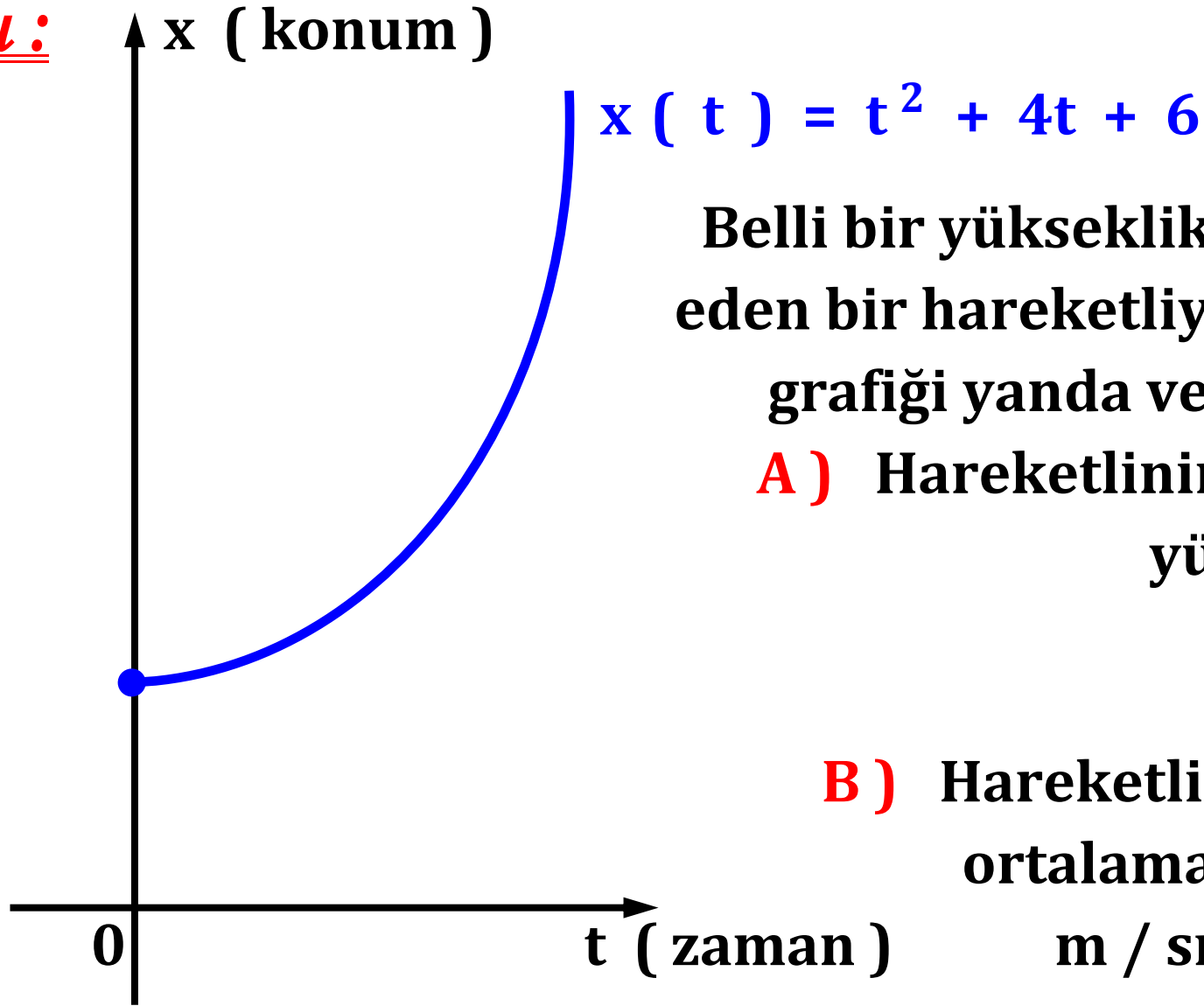
t_o (başlangıç) ile t zamanları arasındaki **değişim hızı**

$$V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o} \text{ olarak alınır.}$$

Soru : Bir hareketlinin zamana (sn) bağılı konumu (m)

$x (t) = 3t^2 - 4t + 1$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin ilk 5 saniyedeki değişim hızını (m / sn) bulunuz.

Soru :



Belli bir yükseklikten itibaren hareket eden bir hareketliye ait konum - zaman grafiği yanda verilmiştir. Buna göre;

A) Hareketlinin başlangıçta yerden yüksekliği kaç m 'dir ?

B) Hareketlinin ilk 4 saniyedeki ortalama değişim hızının kaç m / sn olduğunu bulunuz.

C) Hareketlinin 2. ve 7. saniyeler arasındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Soru : Bir hareketlinin zamana (sn) bağılı konumu (m)
 $x (t) = 2t^2 + 8t$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin ilk kaçınıcı saniyeye kadar ki değışim hızı 20 m / sn olur ?

Tanım : Bir hareketlinin t_0 ile t saniyeleri arasındaki orta-

lama hızı $V_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ olarak bulunurdu.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limit değerine hareketlinin t_0 anındaki “**anlık değişim oranı**”

adı verilir. Bir fonksiyonun anlık değişim oranına fonksiyonun t_0 noktasındaki “**türevi**” adı verilir. Türev değeri $x'(t_0)$ ile gösterilir.

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

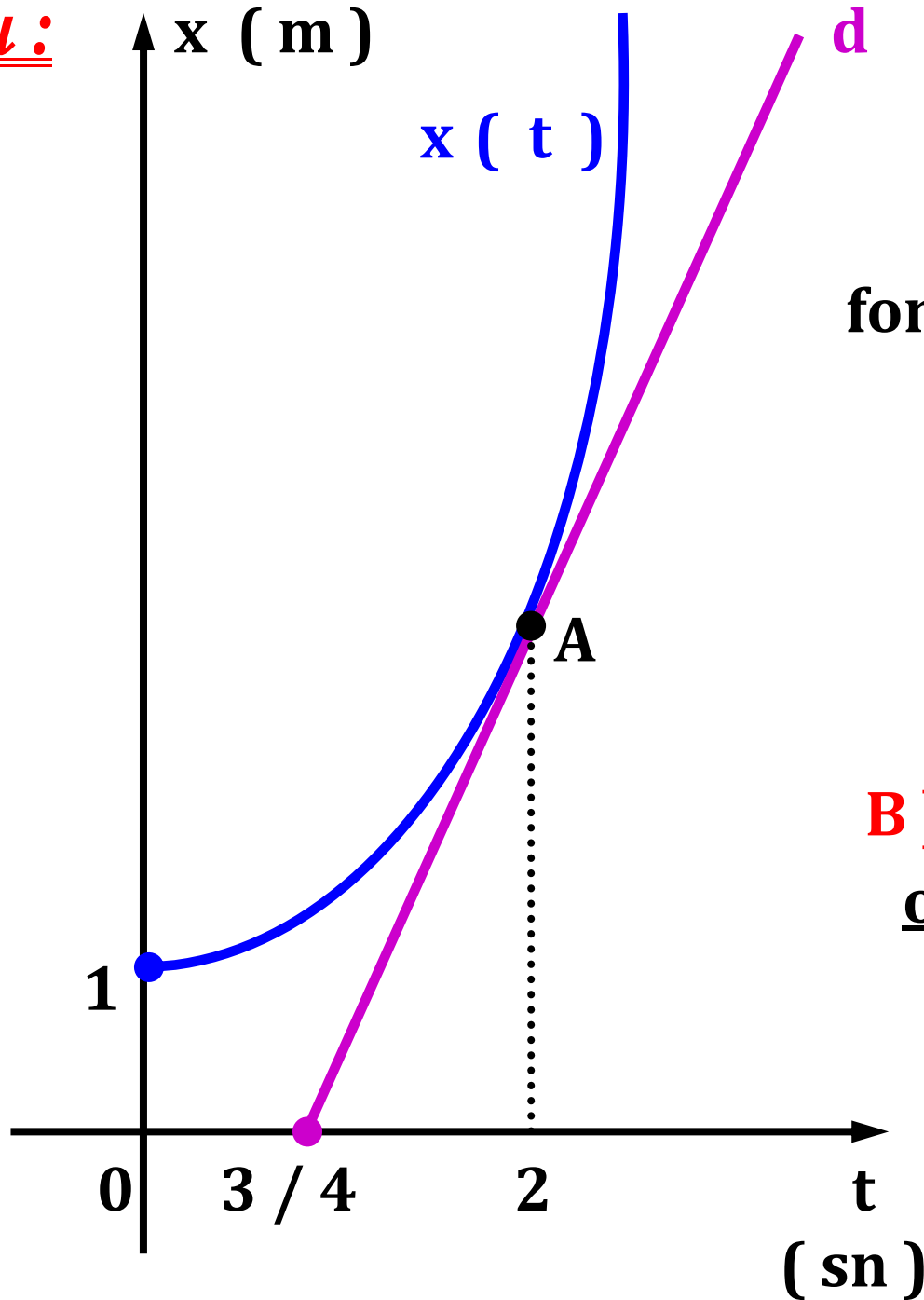
olarak alınır.

Soru : Bir hareketlinin zamana (sn) bağılı konumu (m)

$x (t) = t^2 - 9$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin 5. saniyedeki anlık değişim hızı kaç m / sn olur ?

Soru : Bir hareketlinin zamana (sn) bağılı konumu (m)
 $x (t) = t^2 + 2t + 5$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin
3. saniyedeki anlık değişim hızı kaç m / sn olur ?

Soru :



Bir hareketlinin zamana bağı konumu $x(t) = t^2 + c$ fonksiyonu ile veriliyor. A noktası fonksiyon ile d doğrusunun kesim noktasıdır. Buna göre;

A) $c = ?$

B) Hareketlinin ilk 5 saniyedeki ortalama değişim hızını bulunuz.

C) Hareketlinin 2. saniyedeki anlık değişim hızını bulunuz.

D) d doğrusunun eđimini bulunuz.

Kural: Zamana bağlı konun fonksiyonu $x(t)$ için; fonksiyona $A(t_0, x(t_0))$ noktasında **teğet** olan bir **d** doğrusu için, fonksiyonun **bu noktadaki türevi d doğrusunun eğimine eşittir.**

$$m_d = x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ olarak alınır.}$$

Bu işleme uygun olarak, $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ olarak alınır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{df(x)}{dx}$ olarak gösterilebilir.

$\frac{d}{dx}$ ifadesine “türev operatörü” adı verilir. x ’e göre türev

alınacağını belirtir.

Soru: $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $f'(7) = ?$

Soru: $f(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonu için $f'(4) = ?$

Soru: $f'(x) = -5x + 20$ için $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = ?$

Soru: $f'(x) = x^2 - 3x + k$ için $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 9$
ise $k = ?$

Not: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ işleminde $x - a = h$ dönüşümü yapılırsa;

- $x \rightarrow a$ olurken $h \rightarrow 0$ olur.
- $x - a = h$ ise $x = a + h$ olur.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olarak bulunur.

Soru çözümlerinde iki limit kuralından da çözüm yapılabilir.

Soru: $f(x) = 5x - 8$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ?$

Soru: $f(x) = 4x^2$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = ?$

Soru: $f(x) = x^2 + mx - 5$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$
ise $m = ?$

Türev Alma Kuralları

Fonksiyonların türevini limit kuralından faydalananarak çözmek yerine çözüm için türev alma kurallarını kullanmak işimizi çok kolaylaştırır.

Kural 1: (Sabit Fonksiyonun Türevi)

$c \in \mathbb{R}$ (c sabit) için $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ olarak alınır. Yani sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

Kural 2: (Üslü Fonksiyonun Türevi)

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ için $f(x) = a \cdot x^n$ ise $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olarak alınır. Üslü fonksiyonun türevinde kuvvet üslü ifadenin başına çarpım olarak indirilir ve kuvvet bir azaltılır.

Örneğin;

$$f(x) = 5 \text{ ise } f'(x) = 0$$

$$f(x) = 8x \text{ ise } f(x) = 8x^1 \text{ olup } f'(x) = 8 \cdot 1 \cdot x^0 = 8$$

$$f(x) = 3x^5 \text{ ise } f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^4 = 15 \cdot x^4 \text{ olarak bulunur.}$$

Soru: $f(x) = 4x^3$ ise $f'(-2) + f(-2) = ?$

Soru: $f(x) = 7x^{-4}$ ve $h(x) = -12$ ise
 $f'(1) + h'(9) = ?$

Soru : $f(x) = 6x^2$ ve $h(x) = \frac{2}{x^4}$ ise
 $f'(3) + h'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = -\frac{1}{x^5}$ ve $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ise
 $f'(1) + h'(8) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot x$ ise $f'(x) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{2x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$ ise $f'(x) = ?$

Kural 3: (Toplamın Türevi)

- $f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^m + \dots$ şeklindeki fonksiyonun türevinde her bir terimin türevi alınır.
- $(f + h)'(x) = f'(x) + h'(x)$
- $(f - h)'(x) = f'(x) - h'(x)$ olarak alınır.

Soru: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ ise $f'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^4 + \frac{x^2}{4} - 6$ ise $f'(2) = ?$

Soru: $f(x) = 8\sqrt{x} + 2x^2 - x^3$ ise $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 5x^2 - mx + 1$ ve $f'(8) = \frac{4}{3}$ ise

$m = ?$

Soru: $f(x) = 2x^3 + k - 4x + 6$ ve $f'(2) = f(-1)$ ise
 $k = ?$

Soru: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ve $h(x) = -x^3 + x + 3$ fonksiyonları veriliyor. Bunu göre; **A)** $(f + h)'(5) = ?$

B) $(f - h)'(-1) + (f \cdot h)(1) = ?$

Soru : $f(x) = 5x + kx^2 - 3$ ve $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 5$ fonksiyonları veriliyor. Bunu göre $(h - f)'(2) = h(3)$ ise $k = ?$

Soru : $P(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere

$P(x) + 5 \cdot P'(x) = 3x - 5$ ise $P(x)$ polinomunun denklemini

bulunuz. (Hem polinom hem de türevinin bir arada olduğu denk-

lemelerde; polinom fonksiyonunun derecesi, verilen denklemdeki

fonksiyonun derecesi ile aynı alınır. Bu soru için $P(x) = ax + b$

olarak alınır.)

Soru : $P(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere

$P'(x) - 4 \cdot P(x) = 17 - 12x$ ise $P(x)$ polinomunun denklemini bulunuz.

Soru : $P (x)$ polinom fonksiyon olmak üzere

$$P (x) + P ' (x) = 4x^2 + 5x - 6 \text{ ise } P (3) = ?$$

Soru : İki hareketlinin konum – zaman fonksiyonları

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t \text{ ve } S(t) = 2t^2 - 4t + 5 \text{ olarak veriliyor.}$$

Bunu göre hareketlilerin; **A)** 3. saniyedeki anlık hızlarını bulunuz.

B) Anlık hızları kaçınıcı saniyelerde birbirine eşit olur ?

Kural 4: (İkinci Mertebeden Türev)

$f(x)$ fonksiyonun türevi $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{df(x)}{dx}$

olarak gösterilirdi.

Türev fonksiyonunun bir daha türevi alınırsa bu fonksiyona

“ ikinci mertebeden türev ” adı verilir. $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ veya $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ile gösterilir.

$$f''(x) = [f'(x)]' \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \text{ olarak alınır.}$$

Soru : $f(x) = \frac{5}{x^4}$ ise $f''(x) = ?$

Soru : $f(x) = 5x^4 - x + x^3 + 6$ ise $f''(-1) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{2x^5}{5} - \frac{x^2}{4} + 4x^2 + 6$ ise $f''(2) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$ ise $f''(1) = ?$

Soru : $y = f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot x}{\sqrt{x}}$ ise $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

Soru: $f(x) = -x^4 + kx^3 + 2x$ ve $f'(-2) = 46$ ise
 $f''(1) = ?$

Kural 5: (Çarpımın Türevi)

$$(f . h) ' (x) = f ' (x) . h (x) + f (x) . h ' (x)$$

olarak alınır. Ya da çarpım fonksiyonunun sonucu bulunur ve ardından bulunan terimlerin türevi alınır.

$$(f . g . h) ' (x) = f ' (x) . g (x) . h (x) + f (x) . g ' (x) h (x) + f (x) . g (x) . h ' (x)$$

olarak alınır.

Daha fazla çarpım verilirse yine aynı türev alma yöntemi kullanılır.

Soru: $f(x) = x^2 + 1$ ve $h(x) = 5x - 2$ ise $(f \cdot h)'(x) = ?$

Soru: $f(x) = 2x^3 - 6x$ ve $h(x) = x^4 + x$ ise
 $(f \cdot h)'(2) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = \frac{1}{x} + 3$ ise
 $(f \cdot h)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = (x^2 - 6x) \cdot (\sqrt{x} - 7)$ ise $f'(4) = ?$

Soru: $f(x) = 5 - x^2 + 3kx$ ve $h(x) = x^3 + 2x$ ve
 $(f \cdot h)'(1) = 10$ ise $k = ?$

Soru: $f(x) = (2x - 4) \cdot (x^2 + 1) \cdot (8x - x^3)$ ise
 $f'(1) = ?$

Soru: $P(x) = (4 - x^2) \cdot (3x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (5x + 3)$ ise
 $P'(2) = ?$ (Bir çarpanı 0 yapan gruba $f(x)$ diğer çarpanlara
 $h(x)$ denirse kolay yoldan türev alınır.)

Soru: $P(x) = (x + 1) \cdot (3 - x) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot 2x$ ise
 $P'(-2) = ?$

Soru : $f(x) = (x + 20) \cdot (x + 19) \cdot (x + 18) \dots (x + 1) \cdot x$
ise $f'(0) = ?$

Kural 6: (Bölümün Türevi)

$$\left(\frac{f}{h} \right)' (x) = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

olarak

alınır.

Soru: $f(x) = \frac{1 + 2x}{x^2 + 1}$ ise $f'(3) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{3x + 1}$ ise $f'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 - x$ ve $h(x) = 3x^2$ ise $\left(\frac{f}{h}\right)'(2) = ?$

Soru: $f(x) = 2x^2 + 3x$ ve $h(x) = 4x - 3x^2$ ise
 $\left(\frac{h}{f}\right)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{(2x^2 + 1) \cdot (x - 1)}{3x + 2}$ ise $f'(0) = ?$

Soru: $f(x) = 4 - 3x$ ve $h(x) = x - 2$ fonksiyonları

veriliyor. $k(x) = \frac{(f \cdot h)(x)}{(f + h)(x)}$ ise $k'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{5x - x^2 - 6}{2x - a}$ ve $f'(1) = 0$ ise $a = ?$

Soru : $y = f(x)$ ve $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$ ise $f'(x) = ?$

Soru : $y = f(x)$ ve $x = \frac{y-1}{y+1}$ ise $f'(-5) = ?$

Soru : f tek fonksiyondur. $2 + f(-x) = 3x - x \cdot f(x)$ ise
 $f'(x) = ?$ (**Hatırlatma :** f çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$,
 f tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ olarak alınırdı.)

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2 - 4x & , \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^{-2} + x & , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ \sqrt{x} - 1 & , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{fonksiyonları veriliyor.} \\ \text{Buna göre;} \end{array}$$

A) $(f + h)'(9) = ?$ (Sayının bulunduğu şarta göre fonksiyon seçilir ve türev alınır.)

B) $(f \cdot h)'(-1) = ?$

c) $\left(\frac{f}{h}\right)'(4) = ?$