Kural 7: (Bileşke Fonksiyonun Türevi)

f ve h iki türevlenebilen fonksiyon olsun.

$(f \circ h)(x) = f(h(x))$ **olarak bulunurdu.**

$(f \circ h)'(x)$ **bileşke fonksiyonun türevi için;**

1.yol : $(f \circ h)'(x) = h'(x) \cdot f'(h(x))$ **olarak alınır.**

$$(f \circ h)'(x) = [f(h(x))]' = h'(x) \cdot f'(h(x))$$

Önce iç kısmın türevi alınır. **Sonra fonksiyonun türevi alınır.**

2. yol : **Önce bileşke fonksiyon yani $(f \circ h)(x)$ bulunur ve elde edilen fonksiyonun türevi alınır.**

Soru : $f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = 6x - 10$ ise

$(f \circ h)'(x) = ?$

2. yol :

Soru : $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ve $h(x) = x^2 + 3x$ ise

$(f \circ h)'(3) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + 4$ ve $h(x) = \dfrac{2}{x^2} + 1$ ise

$(f \circ h)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = 27 - 8x$ ve $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ise

$(h \circ f)'(3) = ?$

Soru :

x	f (x)	h (x)	f '(x)	h '(x)
1	– 5	2	1	5
2	1	2	3	4

Tabloda verilen değerlere göre;

A) $(f \circ h)'(1) = ?$

B) $(h \circ f)'(2) + (f \circ f \circ h)(2) = ?$

Soru : $f(x) = 3x - 4$, $h(x) = x^2 + x + 1$ ve $k(x) = 2x$ ise $(f \circ h \circ k)'(3/8) = ?$ **(Üçlü bileşke fonksiyonda bileşke fonksiyon bulunur ve ardından türev alınır.)**

Soru : $f(2x-4) = 4x^2 - 6x + 1$ ise $f'(2) = ?$ **(Verilen, $f(h(x))$ bileşke fonksiyon gibi görülür ve eşitliğin türevi alınır. İç kısmı sağlayan x değeri için sonuç bulunur.)**

Soru : $f(4 + 5x) = 3x - x^2 + x^3$ ise $f'(-6) = ?$

Soru : $f(x^2 - 5) = 8\sqrt{x} - 2x$ ise $x \in \mathbb{Z}^+$ için $f'(11) = ?$

Soru : $f(2x^2 - 3x) = 12x^3 - 5x$ ise $x \notin \mathbb{Z}$ için $f'(-1) = ?$

Soru : $f(3x + 7) = h(x^2 - 4x)$, $h'(12) = 21$ ise

$f'(25) = ?$

Soru : $f(8-2x) = k(4x) \cdot h(3x-1)$ eşitliği veriliyor.

$k(0) = 6$, $h(-1) = 4$, $k'(0) = 5$ ve $h'(-1) = -1$ ise

$f'(8) = ?$

Kural 8: (Parantez Kuvveti Olan Fonksiyonun Türevi)

f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $y = a \cdot [f(x)]^n$ ise (veya $y = a \cdot f^n(x)$)

$y' = a \cdot n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ olarak alınır.

Soru : $f(x) = 5 \cdot (x^4 + 3x)^2$ ise $f'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = (x^3 - 3x + 2)^3$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = (x^5 - 4x^2)^2 + \dfrac{1}{x^3}$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{5x}{(2x-1)^4}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \left(\dfrac{2x + 8}{3x - 2}\right)^3$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = [2x + (x - 5)^2]^2$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = [x^2 + (3x - 2)^3]^4$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[4]{(5x+1)^3}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ ise $f'(\sqrt{8}) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[4]{x + 6\sqrt{x}} + 10$ ise $f'(4) = ?$

Soru : $f^{3}(x) = 2x + x^{3} + 15$ ise $f'(2) = ?$

Soru : **$f^2(x) = x^4 + 4x - 1$ ise $f'(1)$ ifadesinin <u>pozitif</u> değeri kaçtır ?**

Soru : **$f^2(x+5) = 3x^2 + x^4$ ise $f'(4)$ ifadesinin <u>negatif</u> değeri kaçtır ?**

Kural 9: (Zincir Kuralı)

$y = h(t)$ ve $t = k(x)$ olsun. Yani fonksiyonlar x yerine başka bir değişkene bağlılar. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

olarak alınır. Bu yönteme " zincir kuralı " adı verilir. Yani her fonksiyonun kendi değişkenine bağlı olarak türevi alınır. Bu değişkenler x gibi düşünülür.

$y = h(t)$, $t = k(z)$ ve $z = g(x)$ olsun. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

olarak alınır.

Soru : **$y = 5t - 11$ ve $t = x^3 + 1$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 2$ için sonucunu bulunuz.**

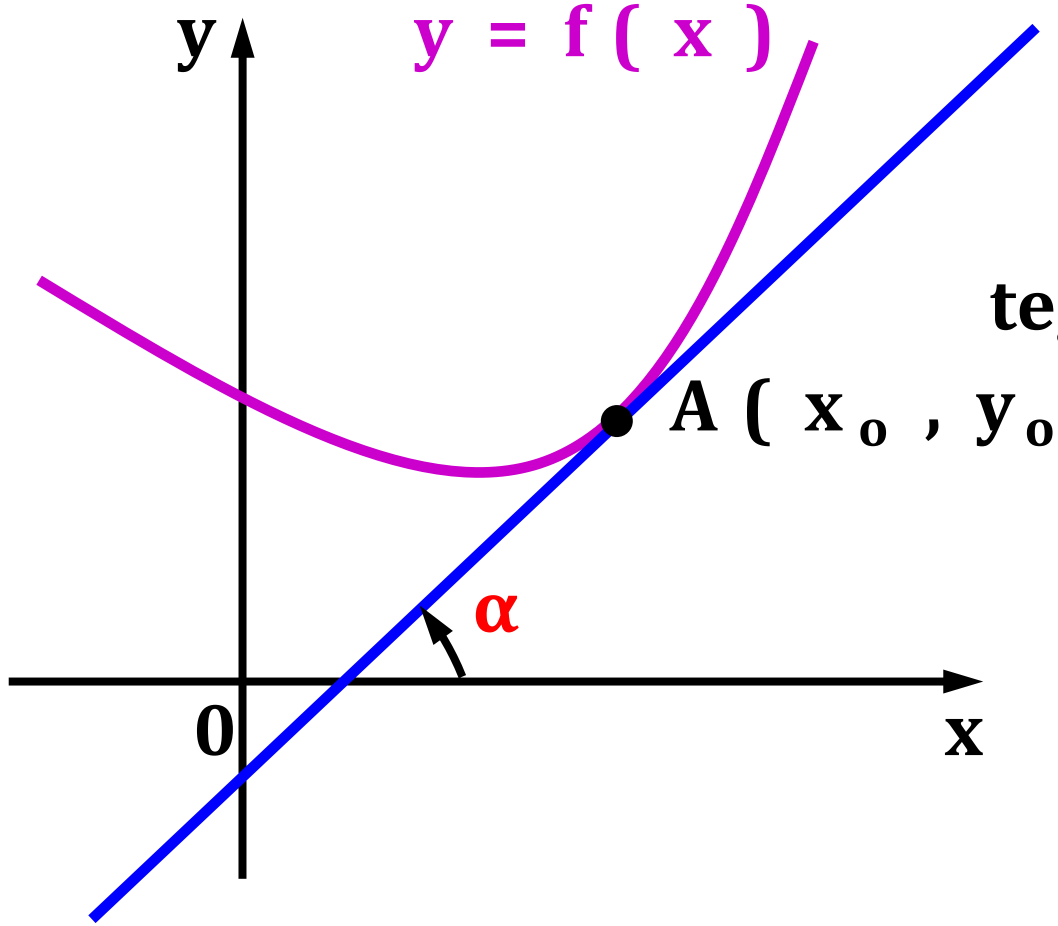
Soru : $y = 3t^2 + 2$, $t = 2u + 1$ ve $u = x^3 + x$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ için sonucunu bulunuz.

Soru : $t = x^2 - 2x$, $y = 2 + 3u$ ve $u = t^2 - 1$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ için x'in tam sayı değeri için sonucunu bulunuz.

Soru : $p = 2v^2 - 1$, $k = \sqrt{q} + 3$ ve $v = k^2 + k$ ise $\dfrac{dp}{dq}$ ifadesinin $q = 4$ için sonucunu bulunuz.

Kural 10: (Türev – Eğim İlişkisi)

Zamana bağlı konun fonksiyonu $x(t)$ için; fonksiyona $A(t_o, x(t_o))$ noktasında teğet olan bir d doğrusu için, fonksiyonun bu noktadaki türevi d doğrusunun eğimine eşit olduğunu türevin başında işlemiştik.



f fonksiyonuna A noktasında teğet olan bir d doğrusu verilsin. **Fonksiyonun A noktasındaki türevinin değeri doğrunun eğimini verir.**

$f'(x_o) = m_d$ olarak alınır.

$m_d = \tan\alpha$ idi.

Doğru denklemi $y - y_o = m.(x - x_o)$ olarak bulunurdu.

Soru : $y = f(x) = 2x - x^2 + 3$ eğrisine $x = 3$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : **$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **$y = f(x) = (3x - 2).(5 - x)$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$ **fonksiyonunun A (x , – 2) noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.**

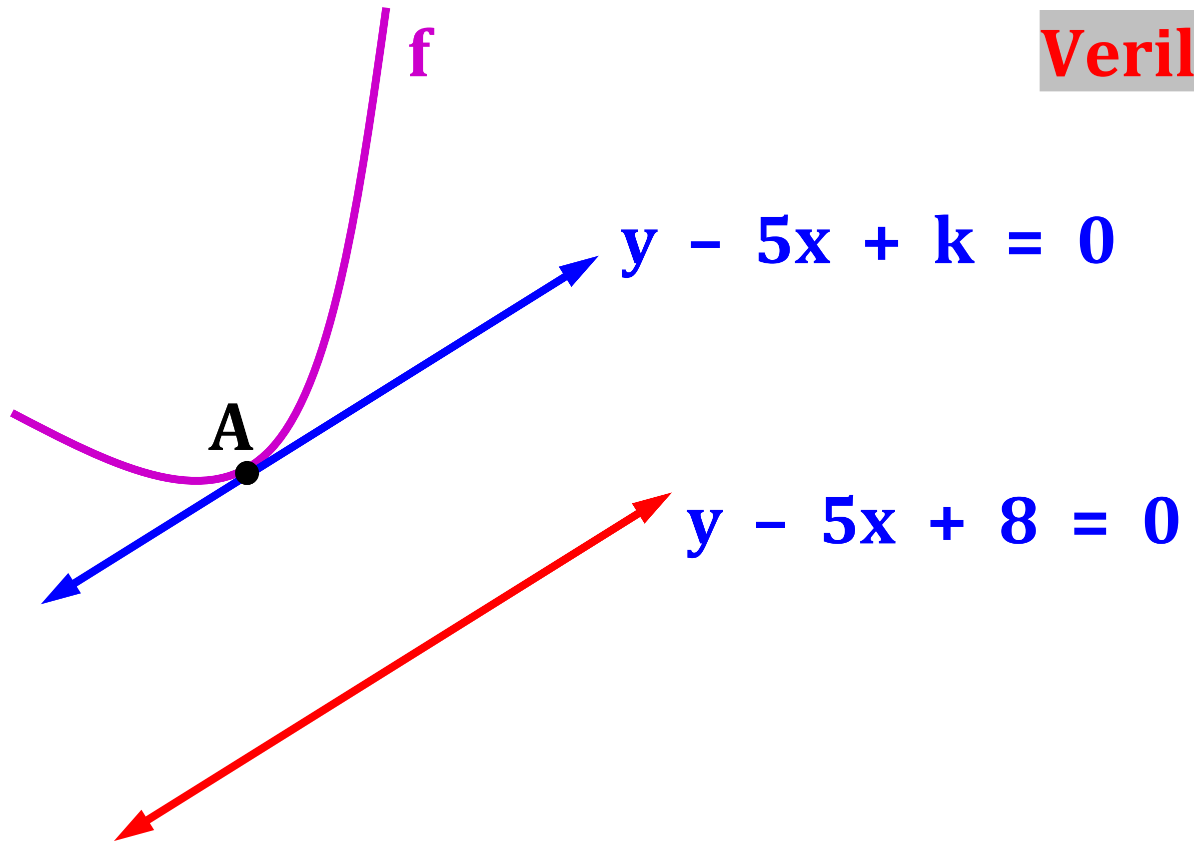
Soru : $y = f(x) = \sqrt{16 - 2x}$ fonksiyonunun $x = \dfrac{15}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin x ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü kaç derecedir ?

Soru : $y = f(x) = x^3 + kx^2 + x$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemi $2y - 2x + 1 = 0$ ise $k = ?$

Soru : $y = f(x) = x^2 - 4x + k$ **eğrisine teğet olan doğrunun denklemi** $2x - y + 5 = 0$ **ise teğet noktasını ve** k **değerini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x + x^2$ fonksiyonun grafiği üzerinde olan ve denklemi $y - 5x + 8 = 0$ olan doğruya en yakın noktasının;

A) Koordinatlarını bulunuz.



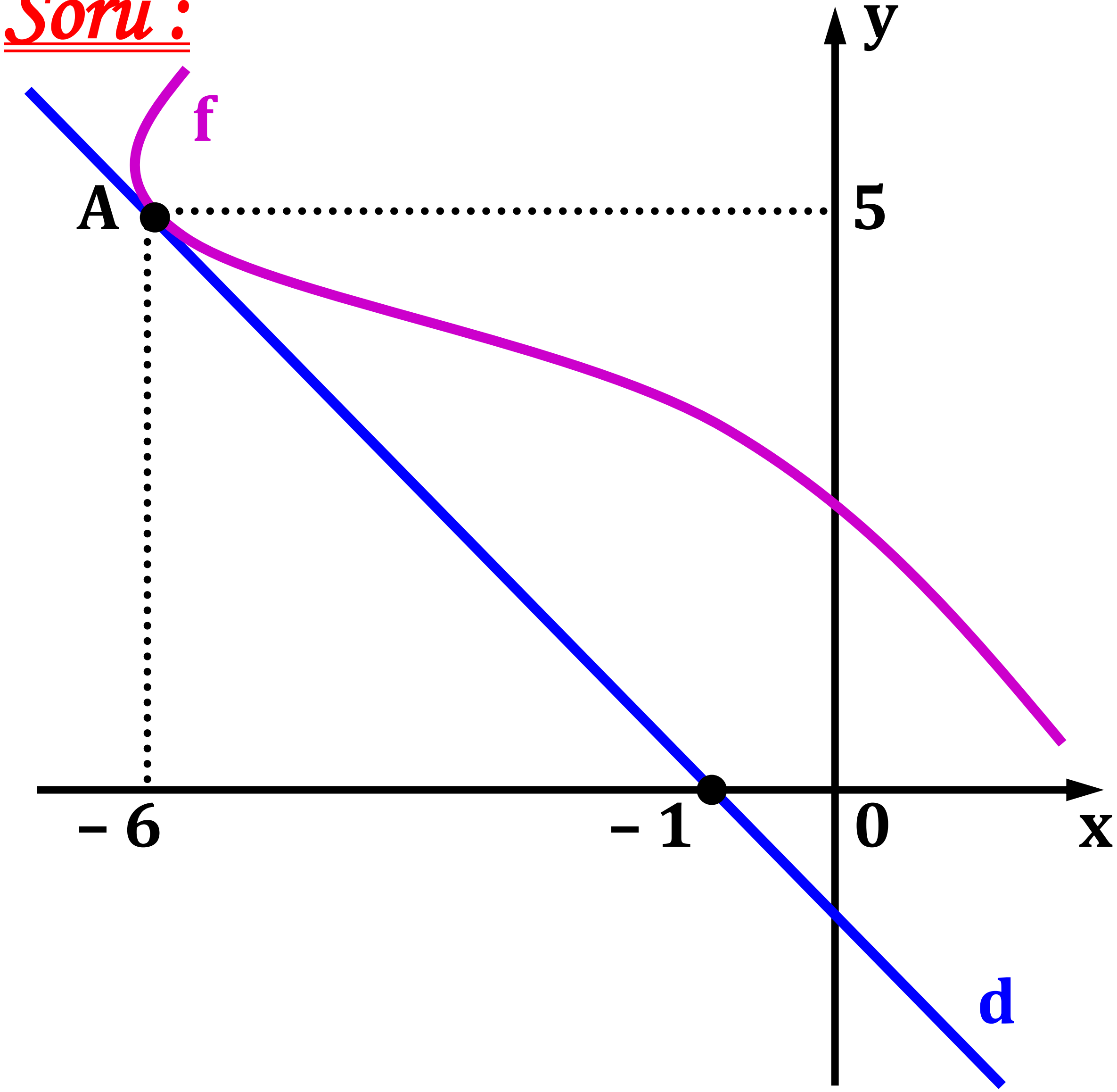
Verilen doğruya paralel olan ve f ’e teğet olan doğru çizilir ve eğim – türev ilişkisinden nokta bulunur.

B) **Bu doğruya olan uzaklığını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = (4x - 2).(3 - x)$ **fonksiyonun grafiği üzerinde olan ve denklemi** $2x + y - 9 = 0$ **olan doğruya** <u>**en yakın**</u> **noktayı bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^2 + kx + m$ ve $y = h(x) = -x^2 + nx$ fonksiyonları $(1, 0)$ noktalarında birbirine teğettir. Buna göre k , m ve n sayılarını bulunuz. **(Nokta denklemleri sağlar. Teğet doğrularının eğimleri de birbirine eşitlenir.)**

Soru :

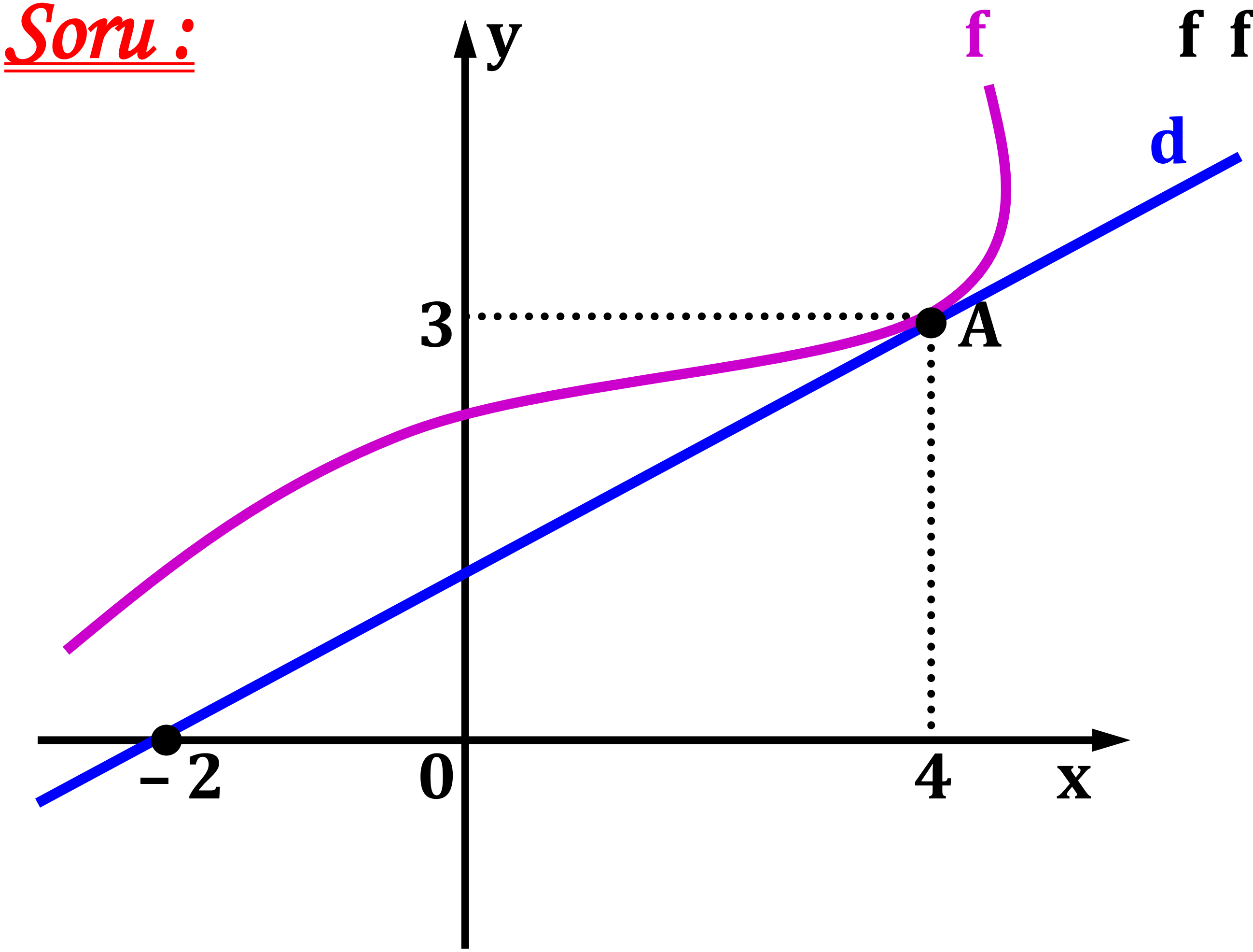


f fonksiyonu A noktasında d doğrusuna teğettir.

$k(x) = x \cdot f(x)$ ise

$k'(-6) = ?$

Soru :

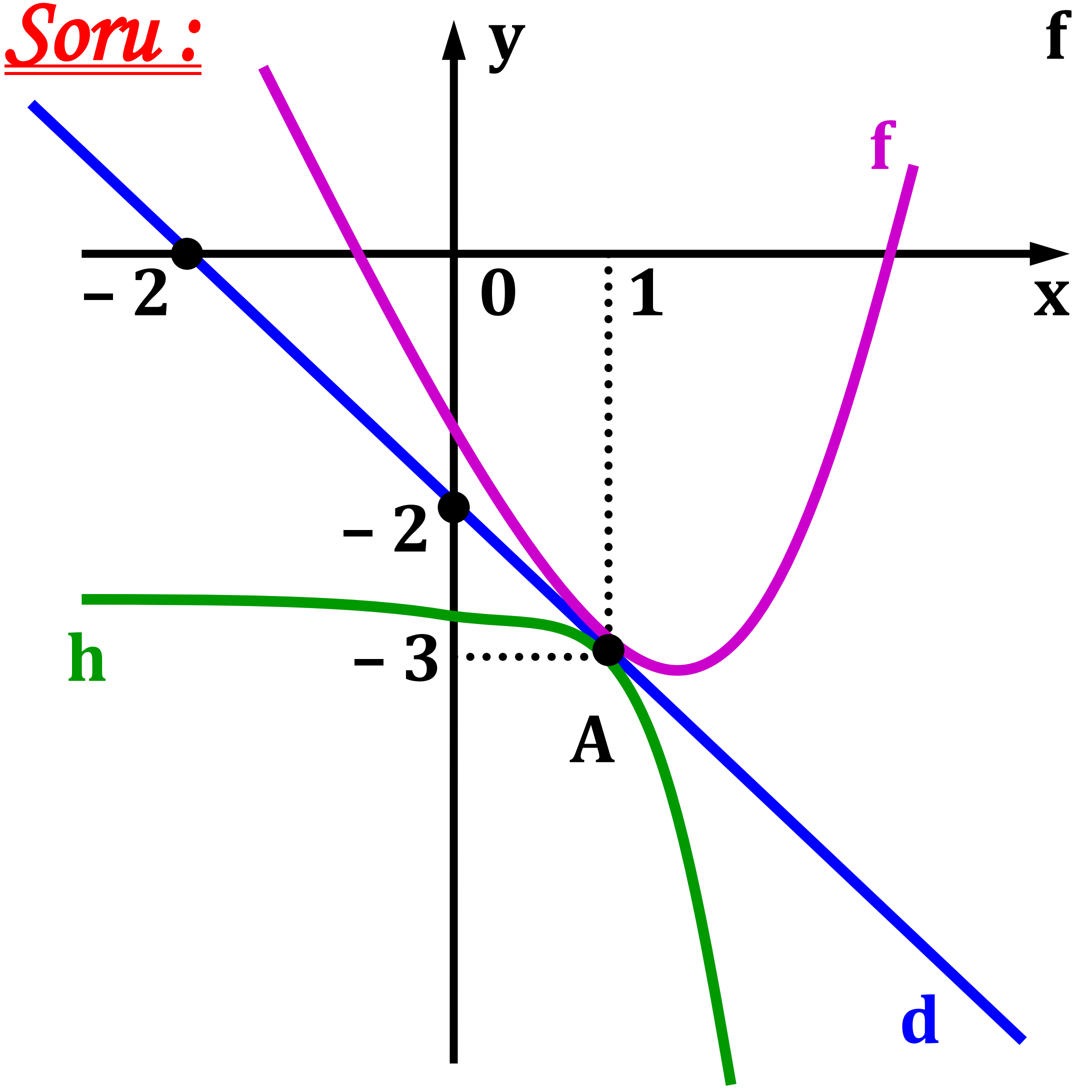


f fonksiyonu A noktasında d doğrusuna teğettir.

$$k(x) = x^2 . f(x) + 1$$

$$k'(4) = ?$$

Soru :

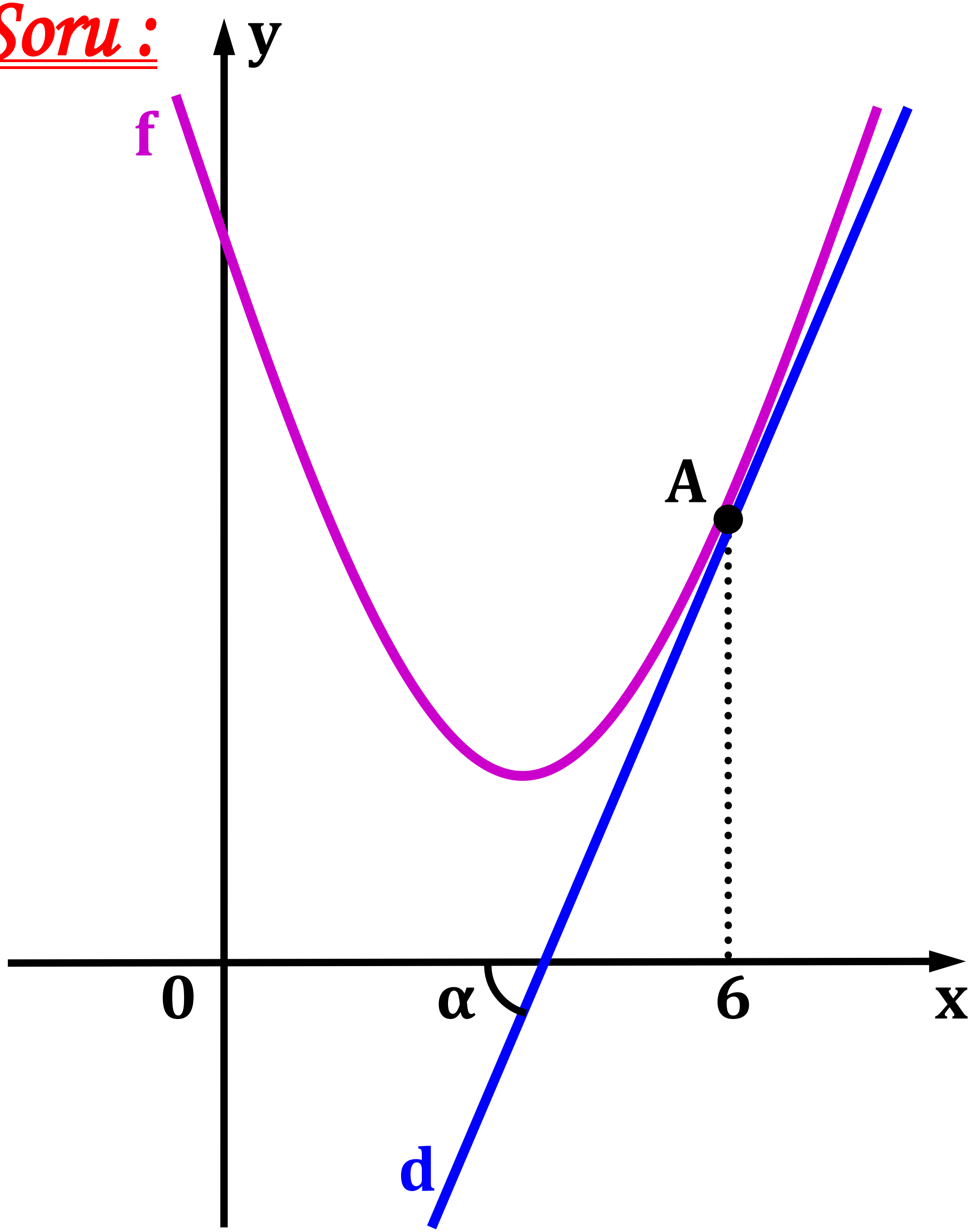


f ve h fonksiyonu A noktasında d doğrusuna ve birbirlerine teğettir.

$$k(x) = \frac{f(x)}{h(x)} + f(x) \cdot \sqrt[3]{x}$$

ise $k'(1) = ?$

Soru :



$f(x) = x^2 + tx + 18$ parabolü ile d doğrusu A noktasında birbirlerine teğettir. $\tan\alpha = 4$ olup $k(x) = f^2(2x - 4)$ ise; **A)** $k'(5) = ?$

B) **d doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.**

Kural 11: (Türev – Süreklilik İlişkisi)

Bir f fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için sürekli olmak üzere, fonksiyonun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise bu fonksiyon $x = a$ için türevlenebilirdir.

f fonksiyonu $x = a$ için sürekli ve $f'(a^+) = f'(a^-) = k$ ise $f'(a) = k$ olarak alınır.

***** Bir fonksiyonun $x = a$ noktası için sürekliliği belirtilmemişse işleme öncelikle süreklilik kontrolü ile başlanır. Süreklilik sağlanırsa ardından sağdan ve soldan türev kontrolü yapılır. Süreklilik sağlanmazsa türev kontrolüne gerek yoktur.**

Not : **1) f fonksiyonu bir noktada türevli ise bu noktada aynı zamanda da süreklidir.**

2) f fonksiyonu bir noktada sürekli ise bu noktada türevi vardır diyemeyiz.

3) **f fonksiyonu bir noktada sürekli değil ise bu noktada türevi de yoktur.**

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & , \quad x < 1 \text{ ise} \\ 2 & , \quad x = 1 \text{ ise} \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = 1$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x)=\begin{cases} x^3-4x & , \quad x<-1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x}+4 & , \quad x\geq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x=-1$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & , \quad x < 8 \text{ ise} \\ x - 4 & , \quad x = 8 \text{ ise} \\ \dfrac{5x + 20}{x - 23} & , \quad x > 8 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = 8$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru : $f(x) = |x^2 - 16|$ ise $f'(4) = ?$ **(Fonksiyon parçalı olarak yazılır, limit ve türev şartları kontrol edilir.)**

Soru : $f(x) = |x^2 - 6x + 9|$ ise $f'(3) = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b & , \quad x < -2 \text{ ise} \\ 12x + 2b & , \quad x \geq -2 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = -2$ değeri için türevi varsa $k \cdot m = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 4 & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \\ 2x^2 + mx & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

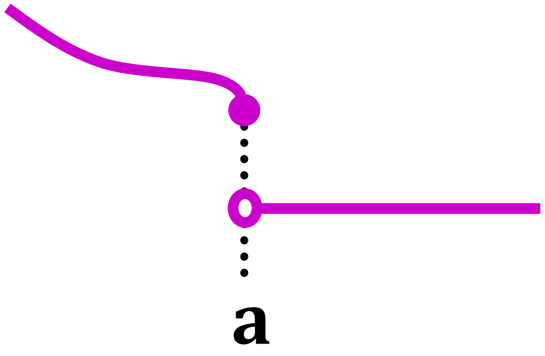
parçalı fonksiyonunun $x = 1$ değeri için türevi varsa $k \cdot m = ?$

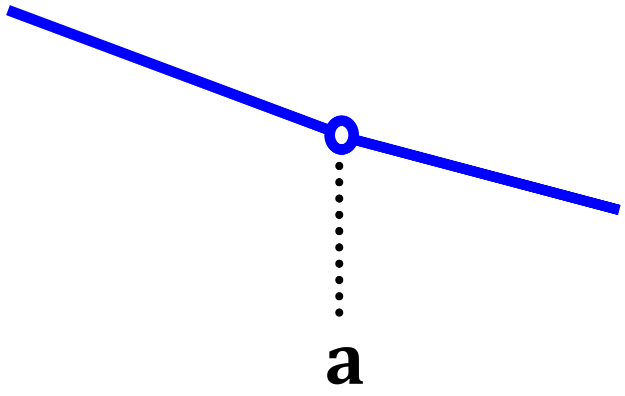
Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 6 & , \ x \le 0 \text{ ise} \\ 3bx + 5 + b & , \ 0 < x < 3 \text{ ise} \\ -x^3 + cx - 9 & , \ x \ge 3 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = 0$ değeri için <u>türevi var</u> ama $x = 3$ için <u>sürekli değil</u> ise c sayısı kaç olamaz ?

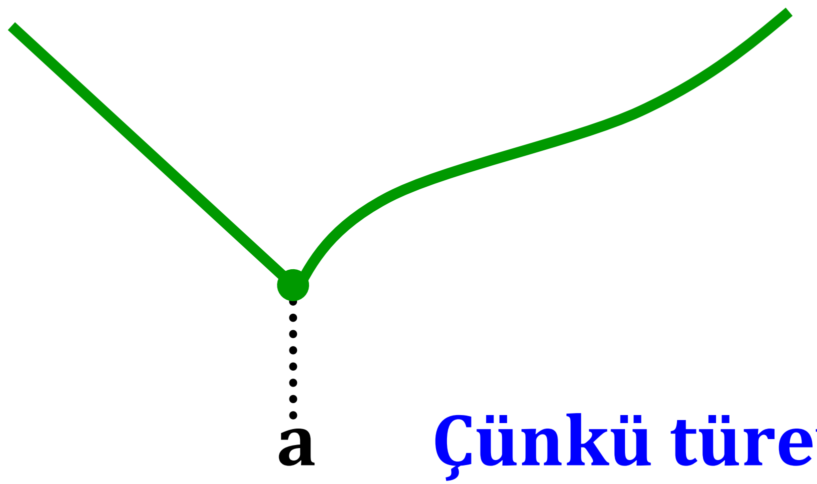
Not : **1) Kritik noktalar yani grafikte kesintinin olduğu noktalarda fonksiyon sürekli değildir. Dolayısıyla bu kritik noktalarda fonksiyon türevsizdir.**





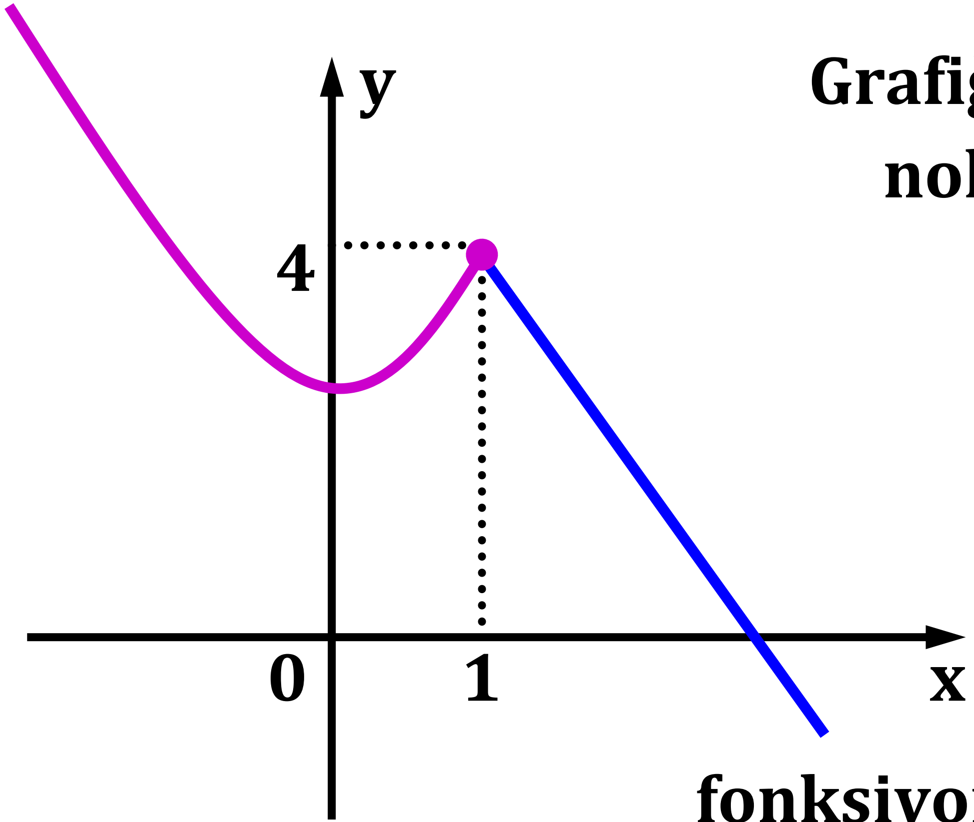
Fonksiyon x = a noktasında sürekli olmadığı için bu noktada türevli de değildir.

2) Fonksiyon kırılma (grafiğin sol ve sağ kısımları farklı) noktalarında sürekli olmasına rağmen bu noktalarda türevli değildirler.



Çünkü türev sonuçları (fonksiyona teğet olan doğruların eğimi) farklıdır.

Örneğin $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \\ -2x + 6 & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun alalım.

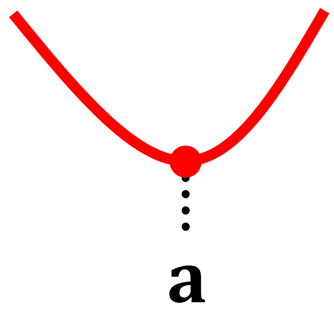


Grafiğe baktığımızda f fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir. Ama bu noktada türevi inceleyelim.

$$\left.\begin{array}{r} f'(1^-) = 2x + 0 = 2.1 = 2 \\ f'(1^+) = -2 + 0 = -2 \end{array}\right\}$$

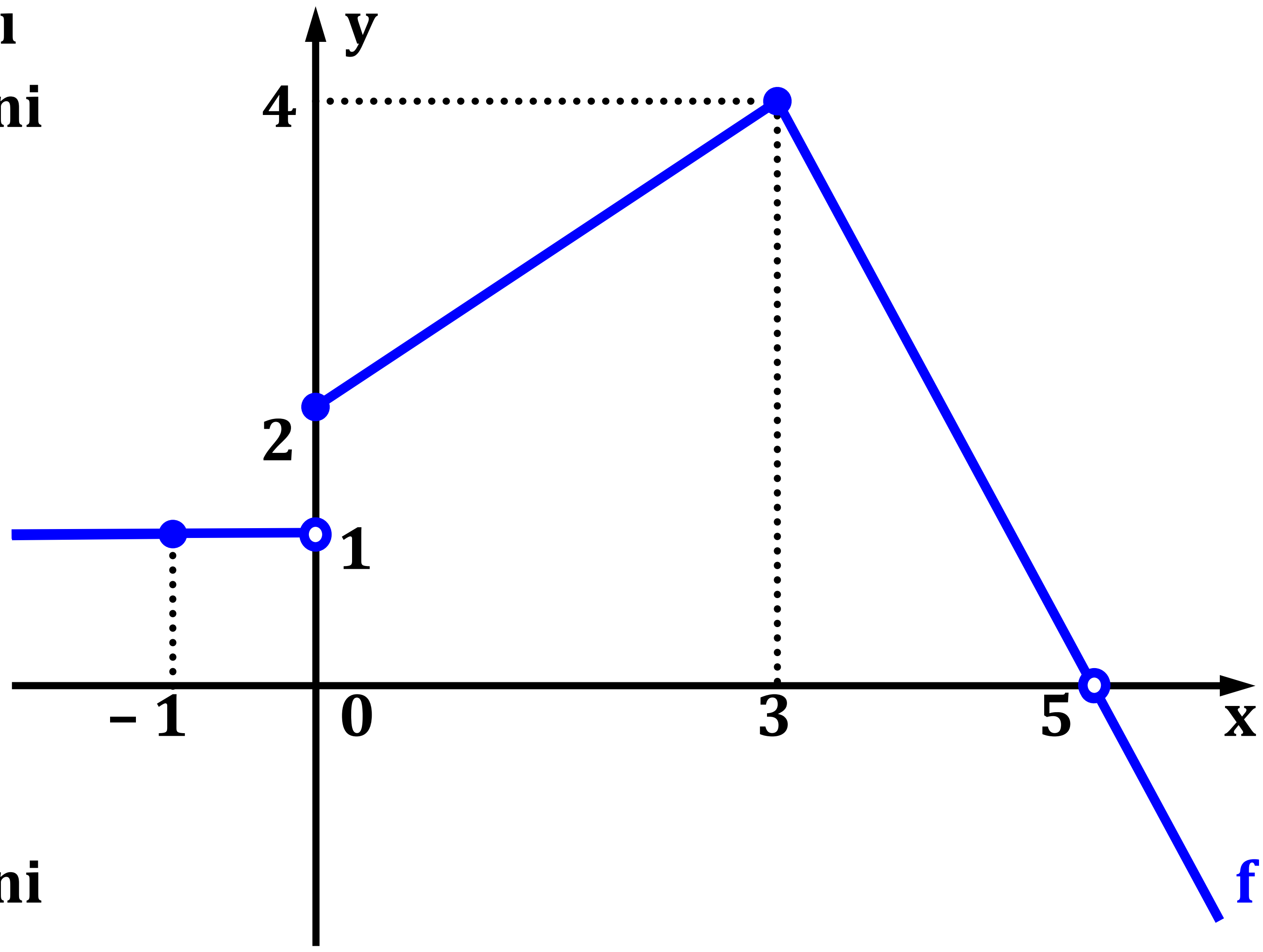
$f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında türevli değildir.

3) Fonksiyonun $x = a$ noktasının sağında ve ve solunda aynı grafik devam ediyorsa fonksiyon bu noktada hem sürekli hem de türevlidir.



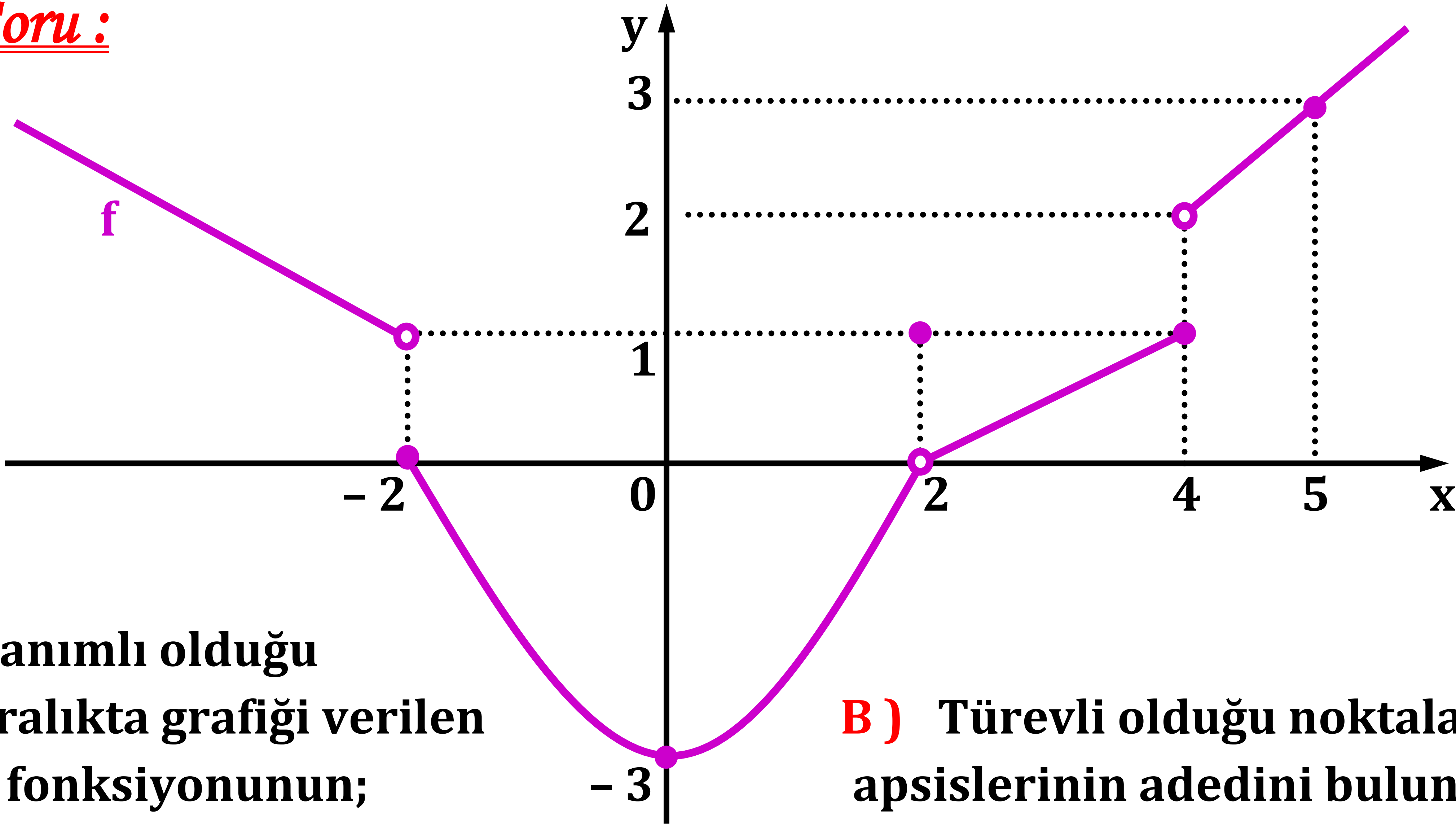
Soru : **Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonunun;**

A) **Türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.**



B) **Sürekli olduğu halde türevinin olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.**

Soru :

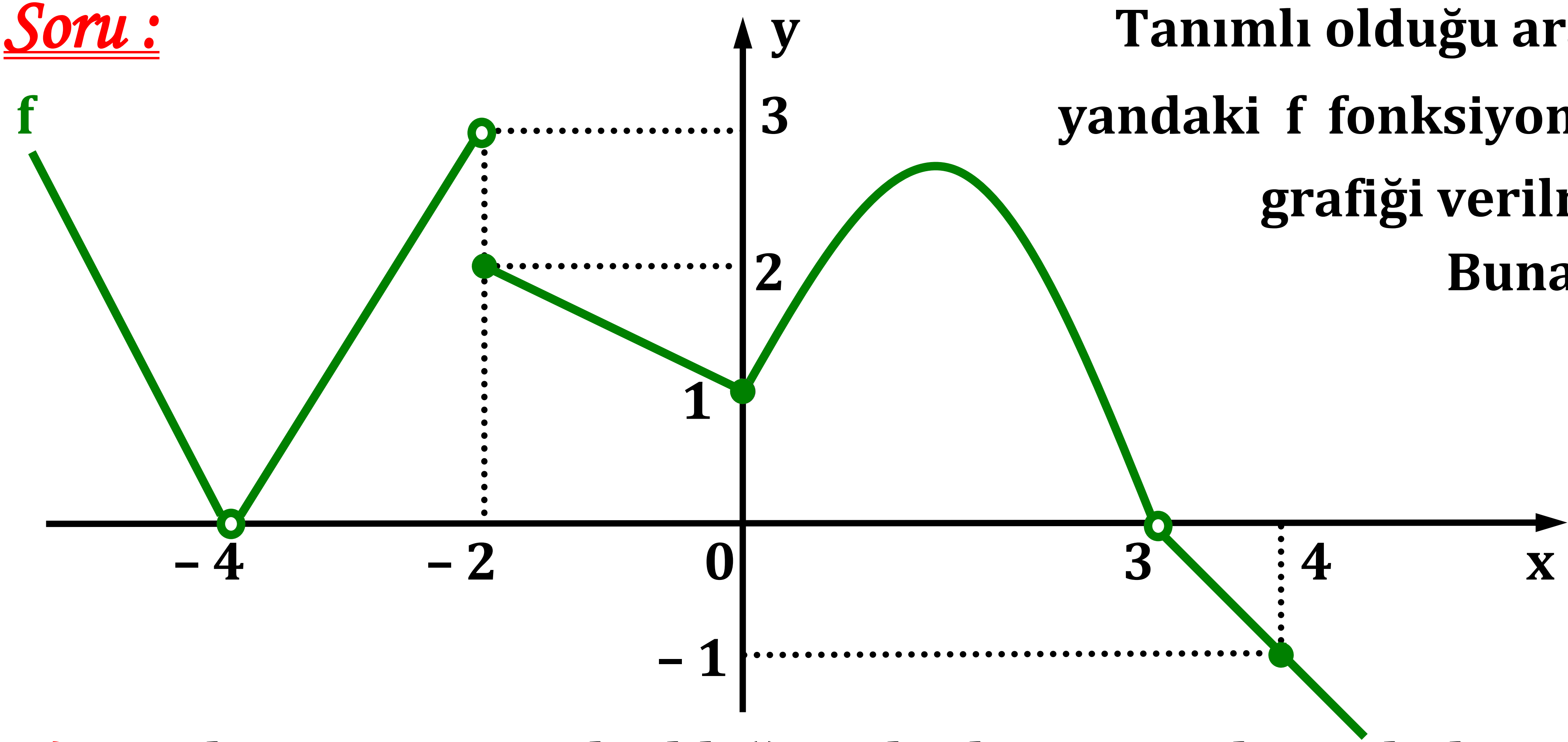


Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonunun;

A) Türevli olmadığı noktaların apsisleri toplamı kaçtır ?

B) Türevli olduğu noktaların apsislerinin adedini bulunuz.

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta yandaki f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

A) Fonksiyonun türevli olduğu noktaların apsislerini bulunuz.

B) Fonksiyonun türevli olduğu en geniş tanım kümesini yazınız.