12. SINIF

MATEMATİK

DERS NOTLARI

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 1. ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

12. 1. 1. Üstel Fonksiyon

Terimler ve Kavramlar : Üstel fonksiyon

Sembol ve Gösterimler : $f(x) = a^x$

12. 1. 1. 1. **Üstel fonksiyonu açıklar.**

a) Üstel fonksiyonlara neden ihtiyaç duyulduğu vurgulanmalıdır.

b) Üslü ifadeler ve bunlarla yapılan işlemlerin özellikleri hatırlatılır.

c) Üstel fonksiyonların bire bir ve örten olduğu grafik yardımıyla gösterilir.

ç) Üstel fonksiyonların hangi durumlarda artan veya azalan olduğu bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak gösterilir.

1. ÜNİTE : ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

ÜSTEL FONKSİYON

Üstel fonksiyonlar başta matematik, kimya, fizik, biyoloji, astronomi vb. birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Günlük yaşamda da mühendislik bölümlerinde, finans sektörlerinde, bilim uygulamalarında vb. üstel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır.

HATIRLATMA : (Üslü İfadeler)

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için x^n ifadesine " üslü ifade " adı verilir.

1) $x^n = \underbrace{x \,.\, x \,.\, x \,.\, .\, .\, x}_{n \text{ adet}}$ olarak açılır.

2) $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$ olarak alınır.

3) $x \in \mathbb{R}$ ve $m , n \in \mathbb{Z}$ için $x^m \,.\, x^n = x^{m+n}$ olarak alınır.

4) $x \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$ ve $m , n \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ olarak alınır.

5) $a , b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için, $(a / b)^{-m} = (b / a)^m$ olarak alınır.

6) $x , y \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $x^m . y^m = (x . y)^m$ olarak alınır.

7) $x , y \in \mathbb{R}$ $(y \neq 0)$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y} \right)^m$ olarak alınır.

8) $x \in \mathbb{R}$ ve $m , n \in \mathbb{Z}$ için $(x^m)^n = x^{m . n}$ olarak alınır.

9) $x \in \mathbb{R} - \{ -1 , 0 , 1 \}$ ve $m , n \in \mathbb{Z} - \{ 0 \}$ olsun.

$x^m = x^n$ ise $m = n$ olarak alınır.

10) $(-1)^{2n} = 1$ ve $(-1)^{2n+1} = -1$ olarak alınır.

11) $x \geq 0$, $m > 0$ ve $n > 0$ olmak üzere

$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ olarak alınır.

Tanım : $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona “ üstel fonksiyon ”

adı verilir. $a > 0$ olduğundan $a^x > 0$ olur. Üstel fonksiyon $c \in \mathbb{R}$

için $f(x) = a^x + c$ şeklinde de verilebilir.

Soru : $7^{x+1} . 7^{3x-4} = ?$

Soru : $5^{11-4x} \cdot 25^{x+3} = ?$

Soru :

$$\frac{4^{x} \cdot 2^{5x+6}}{8^{x+1}} = ?$$

Soru : $$\frac{12^{a}}{0{,}3^{a}} = ?$$

Soru : $(0,25)^{2y} \cdot (0,005)^{-2y} = ?$

Soru : $$\frac{3^{x+3} + 3^{x}}{3^{x+1} + 3^{x+2}} = ?$$

Soru :

$$\frac{2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x}}{2^{x+3} - 2^{x-2}} = ?$$

Soru : $6^{x} = 2^{x+1}$ ise $3^{4x} = ?$

Soru : **$2^x = m$, $5^x = n$ ise 400^x'in m ve n türünden sonucunu bulunuz.**

Soru : $2^{x} = m$ ise 8^{x-2} **ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.**

Soru : **$5^{x-1} = m$ ise 25^{x+1} ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.**

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{-}$, $f(x) = 3^{1-x} + 2$ ve $h(x) = -2^{x+2}$ **üstel fonksiyonları için;**

A) $f(2) + h(3) = ?$

$f(x) = 3^{1-x} + 2$ ve $h(x) = -2^{x+2}$

B) $f \circ h(-1) = ?$

Not : $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **ve** $x \in \mathbb{R}$ **olmak üzere** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ **,**
$f(x) = a^x$ **üstel fonksiyon idi. Taban a sayısı için;** $a > 0$
ve $a \neq 1$ **şartları mutlaka sağlanmalıdır.**

Soru : 5^x , $(3/7)^{-x}$, $(-6)^x$, x^3 , $(-3)^{2x}$, -4^{x+1}
fonksiyonlarından hangileri üstel fonksiyonun tanım şartını sağlar ?

Soru : **$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = (2k - 13)^{x}$ fonksiyonu, <u>üstel</u> bir fonksiyon olduğuna göre k'nın çözüm aralığı ne olmalıdır ?**

Not : **Üstel fonksiyonunun grafiğini çizmek için;**

- **x ’e rastgele 3 tane değer (sonucu en kolay bulunan) verilerek y değerleri bulunur ve fonksiyonun geçtiği noktalar işaretlenir.**

- **Üstel fonksiyonun alamayacağı değer için grafiğin sınırı belirlenir. Bulunan noktalardan geçen eğri grafiği çizilir.**

Soru : **$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $y = f(x) = 3^{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $y = f(x) = 2^{x+2}$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $y = f(x) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x}$ **fonksiyonunun;**

A) **Grafiğini çiziniz.**

Hatırlatma : 1) **Soldan sağa doğru grafik; yükseliş durumunda ise fonksiyon artan, iniş halinde ise fonksiyon azalan idi.**

2) **Grafik üzerinde yatay bir çizgi çizildiğinde çizgi grafiği tek noktada kesiyorsa fonksiyon bire – bir idi.**

3) **$f : A \longrightarrow B$ fonksiyonun grafiği B kümesini kapsıyorsa fonksiyon örten idi.**

B) $y = f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ **fonksiyonunun; artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, +\infty)$, $y = f(x) = 2^x - 1$ fonksiyonunun; **A)** Grafiğini çiziniz.

B) **Fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

Not : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunda; **A)** $a > 1$ ise fonksiyon artandır. **B)** $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır. Grafik çiziminden de istenen görülebilir.

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun;

A) Grafiğini çiziniz.

B) **Fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow (1, +\infty)$, $y = f(x) = 3^{-x} + 1$ **fonksiyonunun grafiğini çizip fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

12. 1. 2. Logaritma Fonksiyonu

Terimler ve Kavramlar: logaritma fonksiyonu, doğal logaritma

Sembol ve Gösterimler: $\log_a x$, $\ln x$, $\log x$

12. 1. 2. 2. 10 ve e tabanında logaritma fonksiyonunu tanımlayarak problemler çözer.

e sayısının irrasyonel olduğu vurgulanarak matematikte ve diğer bilim dallarında kullanımından bahsedilir.

12. 1. 2. 3. Logaritma fonksiyonunun özelliklerini kullanarak işlemler yapar.

LOGARİTMİK FONKSİYON

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $y = f(x) = a^{x}$ ($a > 0$ ve $a \neq 1$ olmalı)

üstel fonksiyonun tersi olan fonksiyona " a tabanına göre logaritma fonksiyonu " adı verilir.

$f^{-1} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir.

Kural : A) $y = f(x) = a^{x}$ fonksiyonunda;

$y = a^{x}$ (a tabanı işlemin karşısına logaritmanın alt tabanı olarak geçirilir.)

$\log_a y = x$ (x yalnız kalmış olur.)

*** İşlemlerde mutlaka üstel kısım yalnız kalmalıdır. Sonrasında kuralı kullanabiliriz.

B) $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ **fonksiyonunda;**

$y = \log_a x$ **(a tabanı işlemin karşısına üstelin alt tabanı olarak geçirilir.)**

$a^y = x$ **(x yalnız kalmış olur.)**

*** **İşlemlerde mutlaka logaritma fonksiyonu yalnız kalmalıdır. Sonrasında kuralı kullanabiliriz.**

Soru : **Altta verilen üstel ve logaritmik fonksiyonları birbirine dönüştürerek x 'i yalnız bırakınız.**

A) $y = 5^{x+1}$ **B)** $y = 3^{-2x}$

C) $y = 2^{x} + 7$

D) $y = \dfrac{7^{x-2}}{3}$

E) $y = \log_7 (x - 6)$

F) $y = \log_2 x + 4$

G) $y = 2 . \log_5 x - 1$

H) $y = \log_3 (5 + 4x)$

Hatırlatma: $y = f(x) = 2x - 6$ ise f fonksiyonunun tersini bulalım.

1. yol : $f(x) = ax \mp b$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x \pm b}{a}$ idi.

$f(x) = 2x - 6$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 6}{2}$ bulunur.

2. yol : $y = 2x - 6$ (x yalnız bırakılır.)

$y + 6 = 2x$ ise $\dfrac{y + 6}{2} = \dfrac{2x}{2}$ olur.

$\dfrac{y + 6}{2} = x$ bulunur. (x yerine y , y yerine x yazılarak

x y ters fonksiyon bulunmuş olur.)

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{x + 6}{2}$ olarak elde edilir.

Kural 1: **A)** $y = f(x) = a^x$ **fonksiyonunun tersi;**

$y = a^x$

(a tabanı işlemin karşısına logaritmanın alt tabanı olarak geçirilir.)

$\log_a y = x$

(x yerine y , y yerine x yazılarak ters fonksiyonu elde edilir.)

$x \qquad y$

$y = f^{-1}(x) = \log_a x$ bulunur.

B) $y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tersinde de aynı sıra takip edilir.

$y = \log_a x$

$a^y = x$

$x \qquad y$

$y = f^{-1}(x) = a^x$ olarak bulunur.

Soru : **Altta verilen fonksiyonların tersini bulunuz.**

A) $y = f(x) = 2^{x-5}$

B) $y = f(x) = 3^{x+1} + 2$

C) $y = f(x) = 2.5^{3x} - 4$

D) $y = f(x) = \log_2(3x - 4)$

E) $y = f(x) = \log_5(x+2) - 6$

Soru : $y = f(x) = \log_3(3x - 23)$ ise $f^{-1}(0) = ?$

Soru : $y = f(x) = -3 + \log_2(4 - x)$ ise $f^{-1}(3) = ?$

Kural 2: $f : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ logaritmik fonksiyonunda;

$a > 0$, $a \neq 1$ ve $x > 0$ olmalıdır.

Not : $f(x) = \log_a k(x)$ logaritmik fonksiyonunun en geniş tanım kümesi istenirse $a > 0$, $a \neq 1$ ve $k(x) > 0$ şartları sağlanmalıdır. Bu şartları sağlayan ortak çözüm kümesi isteneni verir.

*** Birden fazla eşitsizlik varsa veya ikinci , üçüncü , . . . dereceden eşitsizlikler varsa tablo sistemini kullanmak gereklidir. (11.sınıf konusu idi.)

Soru : **$f(x) = \log_{(x+6)} 10$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_5(16 - 2x)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_{(x-4)}(2x+10)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_8(x^2 - 5x - 24)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_{(2-x)}(x^2 + x - 20)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : **$f(x) = \log_{(x-7)}(100 - x^2)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tam sayı vardır ?**

Soru : $f(x) = \log_x(-x^3 + 4x^2 - 4x)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_5 \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1}$ **fonksiyonunun en geniş kapsamlı tanım kümesini bulunuz.**

Soru : $f(x) = \log_5(x^2 + 6x + m - 2)$ fonksiyonu **her x reel sayısı için tanımlı** ise m 'nin çözüm aralığı ne olmalıdır ?

(**Hatırlatma :** Her $x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. $\Delta = b^2 - 4ac$ idi.)

Soru : $f(x) = \log_3 [x^2 + (2m+2)x + 4]$ fonksiyonu **her x reel sayısı için tanımlı** ise m 'nin çözüm aralığı ne olmalıdır ?

Tanım 1: Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna " onluk logaritma fonksiyonu " veya " bayağı logaritma fonksiyonu " adı verilir.

$\log_{10} h(x)$ veya $\log h(x)$ olarak gösterilir. İkinci gösterimde 10 gizli tabandır. Depremlerin şiddetini (Richter ölçeği) ölçmekte onluk logaritma fonksiyonundan yararlanılır.

$y = \log x$ ise $y = \log_{10} x \Leftrightarrow 10^y = x$ olur.

Tanım 2: Tabanı e Euler sabiti ($e = 2,71 \ldots$) irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna " doğal logaritma fonksiyonu " adı verilir.

$\log_e h(x)$ veya $\ln h(x)$ olarak gösterilir. İkinci gösterimde e gizli tabandır.

e sayısı matematik, kimya ve fizik hesaplamalarında kullanılmaktadır.

$y = \ln x$ ise $y = \ln_e x \iff e^y = x$ olur.

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Kural 1: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ olarak alınır.

$1 = a^0$ $\qquad$ $a = a^1$

$1 = 1$ $\qquad$ $a = a$ sağlanmış olur.

$\log 1 = 0$, $\log_5 1 = 0$, $\log_{\frac{4}{7}} 1 = 0$, $\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$, $\ln 1 = 0$ v. b.

$\log 10 = 1$, $\log_5 5 = 1$, $\log_{\frac{4}{7}} \frac{4}{7} = 1$, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$,

$\ln e = 1$ v. b.

Soru : $\log_{13} 13 + \ln 1 + 3\log 10 = ?$

Soru : $$\frac{2\log_{11} 11 - \log_{\frac{1}{5}} 1}{\ln e + \log 10} = ?$$

Kural 2: $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$ **olarak alınır. Taban kısmın dışındaki terimin kuvveti logaritmanın başına çarpan olarak alınır.**

$(\log_a b)^m \neq m \cdot \log_a b$ **olduğuna dikkat edilmelidir. Yani parantezin kuvveti işlemin başına çarpım olarak alınmaz.**

Soru : $\log_3 27 + \log 100 = ?$

Soru : $\log_2 32 + \log_5 \sqrt{5} = ?$

Soru : $\log_5 25 + \log_2 \frac{1}{4} + \log \sqrt[3]{100} = ?$

Soru : $\log_2 (4\sqrt{2}) - \ln e^3 + \log_5 1 = ?$

Soru : $\log_3\left(3\sqrt[3]{9}\right) + \log 0{,}001 + \left(\log_2 4\right)^3 = ?$

Kural 3: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} . \log_a b$ olarak alınır. Tabanın kuvvetinin çarpmaya göre tersi logaritmanın başına çarpan olarak alınır.

$$\log_{a^n} b^m = m . \frac{1}{n} . \log_a b$$ olarak alınır.

Soru : $\log_9 27 - \log_{\frac{1}{4}} 2 = ?$

Soru : $\log_{\sqrt{3}} 81 - \log_{25} 125 = ?$

Soru : $\log_4 (2\sqrt{8}) + \log_{\sqrt{e}} e^5 = ?$

Soru : $\log_{0,2} 625 + \log_{0,01} 0,0001 = ?$

Soru : **$\log_4 5 = x$ ise $\log_{32} 25$ ifadesinin sonucunu x türünden bulunuz.**

Soru : **$\log_3 16 = x$ ise $\log_9 8$ ifadesinin sonucunu x türünden bulunuz.**

Soru : $\log_{25} 81 = x$ ise $\log_{\sqrt{5}} 27$ ifadesinin sonucunu x türünden bulunuz.

Kural 4: $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ **olarak alınır.**

Soru : $\log 8 + \log 125 = ?$

Soru : $\log_2 3 + \log_2 20 + \log_2 15^{-1} = ?$

Soru : **$4 \log_3 x + \log_3 y$ işlemini tek logaritma ifadesine çeviriniz.**

Soru : $\log 2 \cong 0{,}301$ **değeri için** $\log 40$ **ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **$\log 3 \cong 0{,}303$ değeri için $\log 8100$ ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **$\log 2 = k$, $\log 3 = m$ ise $\log 432$ ifadesinin sonucunu k ve m türünden bulunuz.**

Soru : $\log_2 3 = m$ ve $\log_2 5 = n$ ise $\log_2 1125$ ifadesinin sonucunu m ve n türünden bulunuz.

Soru : **$\log a + \log b = \log(a + b)$ ise a'nın sonucunu b türünden bulunuz.**

Kural 5: $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$ **olarak alınır.**

Soru : $\log 600 - \log 6 = ?$

Soru : $\log_2 8 - \log_2 14 + \log_2 56 = ?$

Soru : $\log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\sqrt{3}} 12 + \log_{\sqrt{3}} 36 - \log_{\sqrt{3}} 9 = ?$

Soru : $\frac{2}{3}\ln x + 2\ln y - 3\ln z$ **işlemini tek logaritma ifadesine çeviriniz.**

Soru : **log 3 – log 2 + 1 işlemini tek logaritma ifadesine çeviriniz. (Böyle durumlarda, işlemdeki sayıyı verilen logaritma ifadesine uygun olacak şekilde dönüşüm yapılır.)**

Soru : $\log_3 5 + 2 - \log_3 2$ **işlemini tek logaritma ifadesine çeviriniz.**

Soru : **log 2 ≅ 0,301 değeri için log 0,08 ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **$\log 2 = k$, $\log 3 = m$ ve $\log 7 = n$ ise $\log\left(\dfrac{54}{7}\right)$ ifadesinin sonucunu k , m ve n türünden bulunuz.**

Soru : **log 2 = a ve log 7 = b ise log 0,028 ifadesinin sonucunu a ve b türünden bulunuz.**

Soru : **$\log 2 = k$ ve $\log 5 = m$ ise $\log\left(\dfrac{2 \, . \sqrt[3]{2}}{5 \, . \sqrt{5}}\right)$ ifadesinin sonucunu k ve m türünden bulunuz.**

Soru : log 5 = a ise log 20 ifadesinin sonucunu a türünden bulunuz. **(20 'nin çarpanlarından sonuca ulaşılamaz. 20 'yi veren ve verilen sayıyı kullanabileceğimiz bir bölme işlemini bulmalıyız.)**

Soru : **$\log 2 = a$, $\log 3 = b$ ise $\log 75$ ifadesinin sonucunu a ve b türünden bulunuz.**

Kural 6: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ olarak taban değiştirmesi yapılabilir.

Soru : $\dfrac{1}{\log_2 80} + \dfrac{1}{\log_8 80} + \dfrac{1}{\log_5 80} = ?$

Soru :

$$\frac{1}{\log_{108} 2} - \frac{1}{\log_{3} 2} - \frac{1}{\log_{9} 2} = ?$$

Soru : $$\frac{1}{3 + \log_2 5} = ?$$

Soru :

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \log_3 2}} = ?$$

Soru : **$\log_2 3 = m$ ise $\log_{18} 2$ ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.**

Soru : **$\log_3 2 = m$ ise $\log_{24} 9$ ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.**

Soru : **$\log_7 21 = k$ ise $\log_3 7$ ifadesinin sonucunu k türünden bulunuz.**

Soru : $\log_3 2 = a$, $\log_7 3 = b$ ise $\log_{28} 3$ ifadesinin sonucunu a ve b türünden bulunuz.

Kural 7: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ olarak taban değiştirmesi yapılabilir.

Soru : $\dfrac{\log 3}{\log 15} + \dfrac{\log_2 5}{\log_2 15} = ?$

Soru :

$$\frac{\ln 4}{\ln 6} + \frac{\log_5 9}{\log_5 6} = \ ?$$

Soru :

$$\frac{\log_5 18}{\log_5 3} + \frac{\log_2 27}{\log_2 3} - \frac{\log_7 2}{\log_7 3} = ?$$

Soru : **$\log 3 = k$, $\log 2 = m$ ise $\log_3 2$ ifadesinin sonucunu k ve m türünden bulunuz.**

Soru : **$\log_3 5 = a$ ise $\log_{15} 75$ ifadesinin sonucunu a türünden bulunuz.**

Soru : $\dfrac{\log 3}{\log 7} = a$ ise $\log_{63} 21$ ifadesinin sonucunu a türünden bulunuz.

Soru : $\log_x y = t$ ise $\log_{(x^2 . y)}(x^3 . y^4)$ ifadesinin sonucunu t türünden bulunuz.

Soru : **$\log_2 7 = x$ ve $\log_7 3 = y$ ise $\log_{98} 63$ ifadesinin sonucunu x ve y türünden bulunuz.**

Soru : **$\log 50 = k$ ise $\log_2 5 = t$ ise t'nin sonucunu k türünden bulunuz.**

Kural 8: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$

. . . olarak alınır.

Soru : $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81 = ?$

Soru : $\log_2 11 \cdot \log_{11} 5 \cdot \log_5 \left(\frac{1}{32}\right) = ?$

Soru : $\log 2 \;.\; \log_4 e \;.\; \ln 100 = ?$

Soru : $\log_3 \sqrt{5} \, . \, \log_7 9 \, . \, \log_{25} 7 = ?$

Soru : $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{4} \;.\; \log_{8} \sqrt{27} = ?$

Soru : **$\log_3 7 = k$ ve $\log_7 5 = m$ ise $\log_{63} 75$ ifadesinin sonucunu k ve m türünden bulunuz.**

Soru : $\log_2 3 = x$, $\log_3 5 = y$ ise $\log 12$ ifadesinin sonucunu x ve y türünden bulunuz.

Soru : $\log_2 3 = k$, $\log_3 5 = m$ ve $\log_5 7 = n$ ise $\log_{14} 20$ ifadesinin sonucunu k , m ve n türünden bulunuz.

Kural 9: $a^{\log_a b} = b$ **olarak alınır. Kuralın sağlanması için üstel fonksiyon ile logaritmanın tabanı <u>aynı</u> olmalıdır.**

Soru : $5^{\log_5 17} + e^{\ln 11} - 10^{\log 6} = \ ?$

Soru : $13^{\frac{1}{\log_5 13}} = ?$

Soru : $2^{3\,.\,\log_2 5} = \ ?$

Soru : $4^{\log_2 3} = ?$

Soru : $(1/3)^{\log_3 2} = ?$

Soru : $\sqrt{2}^{\log_2 81} = ?$

Soru : $5^{2 + \log_5 3} = ?$

Soru : $9^{1 + \log_{27} 8} = ?$

Kural 10: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ **olarak alınır. Üstelin tabanı ile logaritmadaki sayı yer değiştirebilir.**

Soru : $8^{\log_3 7} - 7^{\log_3 8} = ?$

Soru :

$$\frac{5^{\ln x} + 14x^{\ln 5}}{3x^{\ln 5}} = \ ?$$

Kural 11: (Arada Olma) **$x = \log_a b$ olsun. x 'in çözüm aralığını bulmak için verilen logaritmanın sol ve sağından en yakın sonucu bilinen iki komşu logaritması alınır.**

Soru : **$x = \log_2 3$ ve $y = \log_3 10$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız.**

Soru : $x = \log_3 52$ ve $y = \log_2 33$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız.

Soru : $x = \log_8 9$, $y = \log_2 11$ ve $z = \log_5 4$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız.

Soru : $x = \ln 5$ ve $y = \log_3 18$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız. **($e = 2{,}71\ldots$ idi.)**

Soru : $\log 650 = a, \ldots$ ve $\log_2 23 = b, \ldots$ ise $a \cdot b = ?$

Soru : x = $\log_3 80$ ve y = $\log_2 9$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız. **(Çözüm aralığı aynı çıkan sayıları karşılaştırmak için sınırlara olan yakınlığa dikkat etmek gerekir.)**

Soru : **$x = \log_{\frac{1}{7}} 22$ sayısının çözüm aralığını bulunuz.** **(Tabanda düzenleme yapmak gerekir.)**

Soru : $x = \log_{\frac{1}{2}} 10$ ve $y = \log_{\frac{1}{3}} 4$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız.

Soru : $x = \log_{\frac{1}{2}} 5$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 18$ ve $z = \log_{\frac{1}{2}} 12$ sayılarının çözüm aralığını bulup sayıları karşılaştırınız.

Soru : **$x = \log_5 0{,}02$ sayısının çözüm aralığını bulunuz.**

(Ondalıklı sayıyı düzenlemek gerekir.)

Soru : $x = \log_3 0{,}125$ sayısının çözüm aralığını bulunuz.

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12.1.2.1. Logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyonu ilişkilendirerek problemler çözer.

a) $a \in \mathbb{R}^+ - \{ 1 \}$ olmak üzere logaritma fonksiyonunun grafiği üstel fonksiyonun grafiğinden yararlanarak çizilir. $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğu belirtilir.

b) $a \in \mathbb{R}^+ - \{ 1 \}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f (x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun $a > 1$ için artan fonksiyon, $0 < a < 1$ için azalan fonksiyon olduğu verilir. a nın aldığı değerlere göre logaritma fonksiyonunun grafiğinin değişimini incelemek için bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

Logarithma Fonksiyonun Grafiği

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu-nun grafiğini çizmek için;

- x ’e a tabanına uygun değerler verilerek fonksiyonun geçtiği noktalar işaretlenir.
- Logaritma fonksiyonun tanım kümesi için grafiğin sınırı belirlenir. Bulunan noktalardan geçen eğri grafiği çizilir.

Soru : $y = f(x) = \log_2(x - 1)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru : $y = f(x) = \log_3(x+1)$ **fonksiyonunun;**

A) **Grafiğini çiziniz.**

B) **Fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.**

Soru : $y = f(x) = \log_2 x - 3$ **fonksiyonunun;**

A) **Grafiğini çiziniz.**

B) **Fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.**

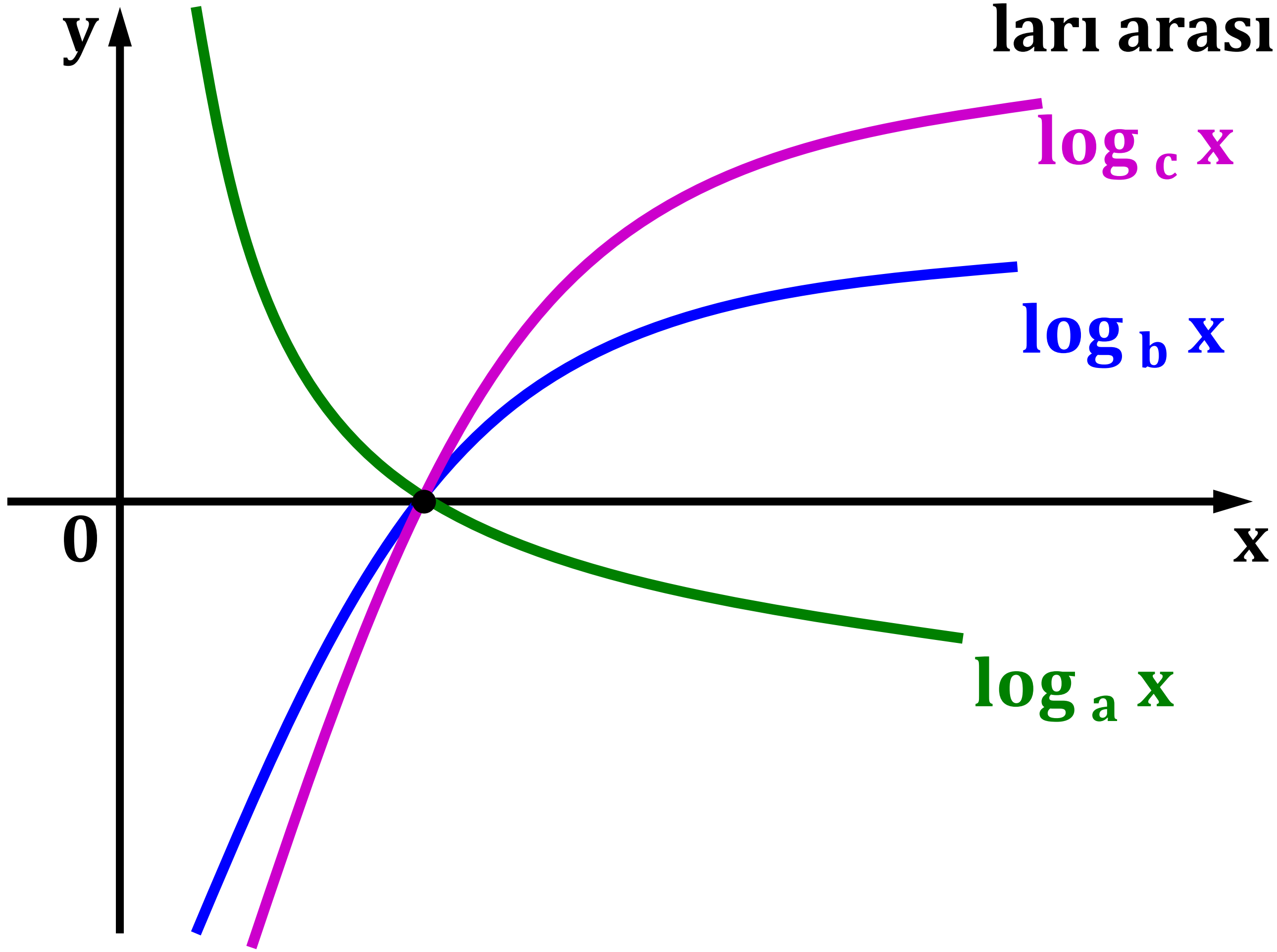
Soru : $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$ fonksiyonunun;

A) **Grafiğini çiziniz.**

B) **Fonksiyonun artan – azalan ve bire – bir olma durumunu inceleyiniz.**

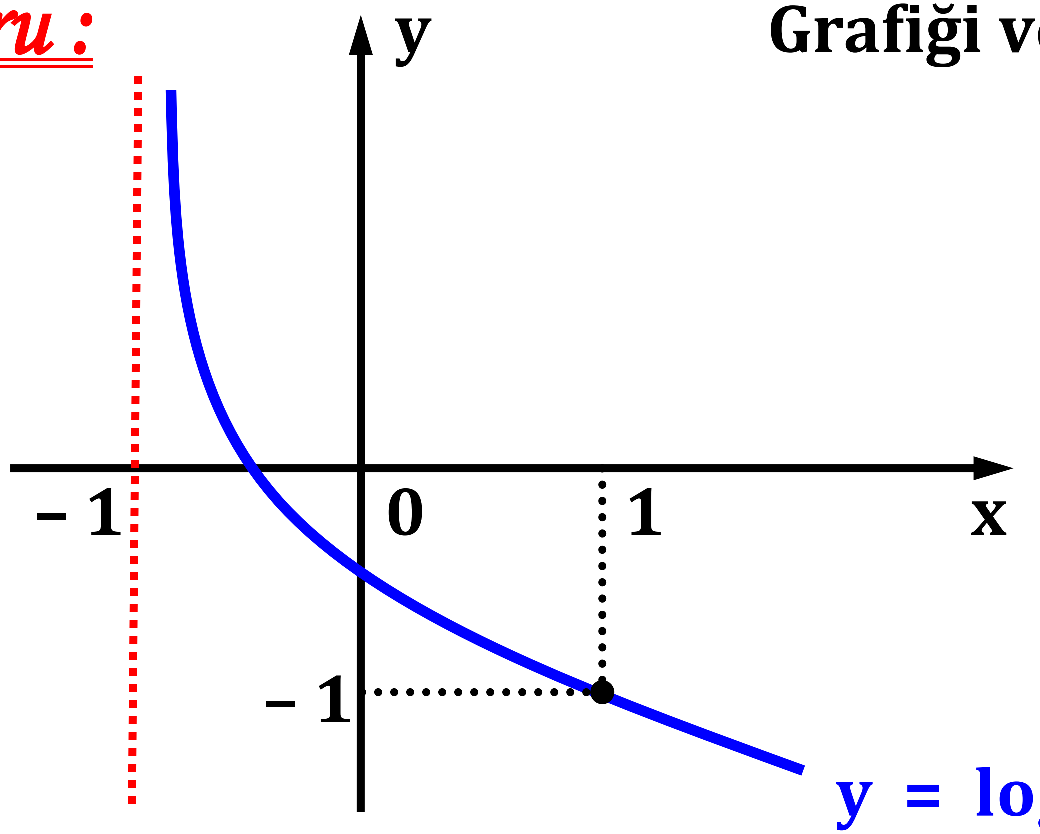
Not : Çizdiğimiz grafikler incelenirse $f : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda; **A)** **$a > 1$** ise fonksiyon **artandır.** **B)** **$0 < a < 1$** ise fonksiyon **azalandır.**

Soru : Grafiği verilen logaritma fonksiyonları için a , b ve c sayıları arasındaki sıralamayı bulunuz.



Not : Grafiği verilen logaritma sorularında, logaritmanın tanım kümesi ve grafiğin geçtiği noktalardan yararlanılır.

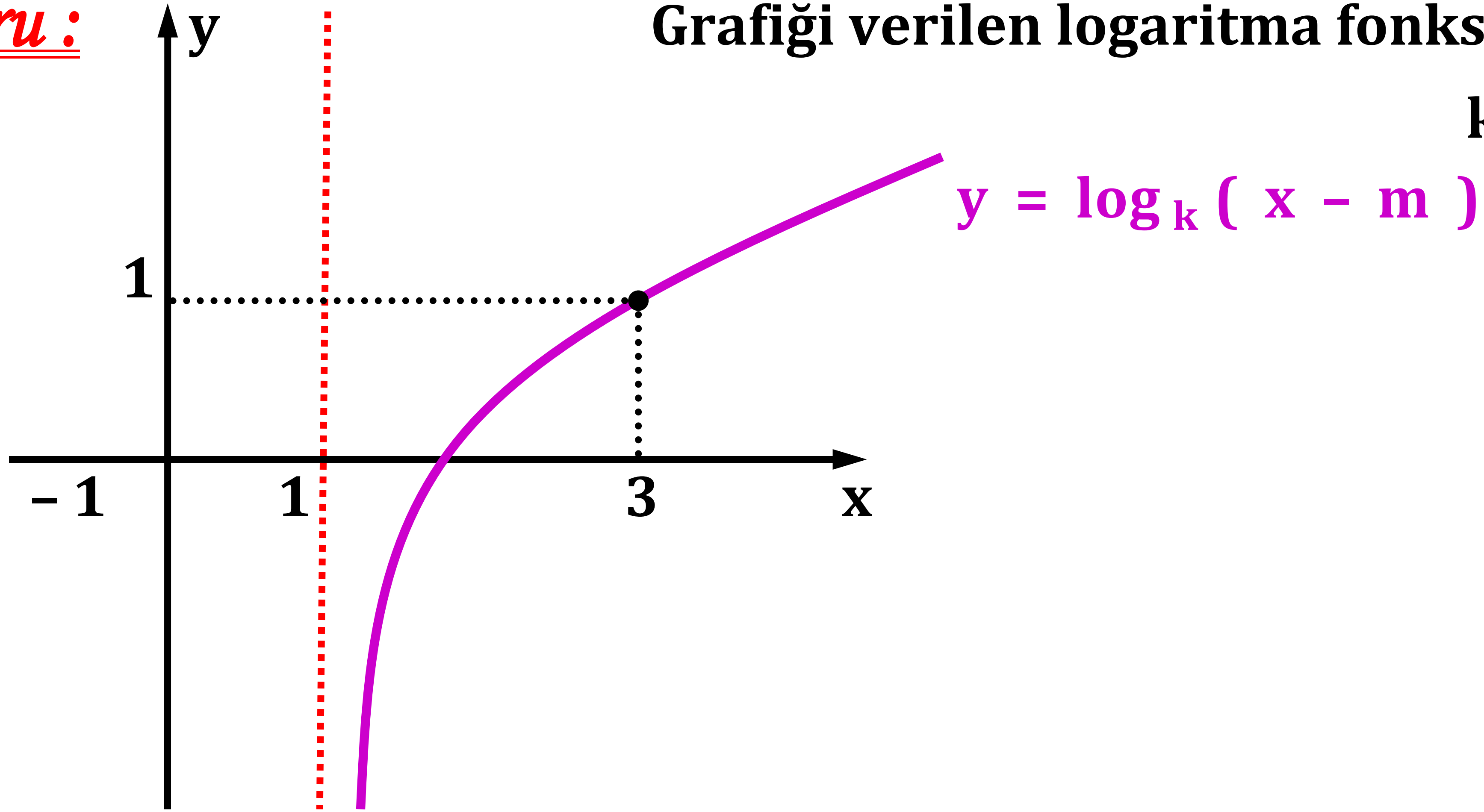
Soru :



$y = \log_k (x + m)$

Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için **k** ve **m** değerlerini bulunuz.

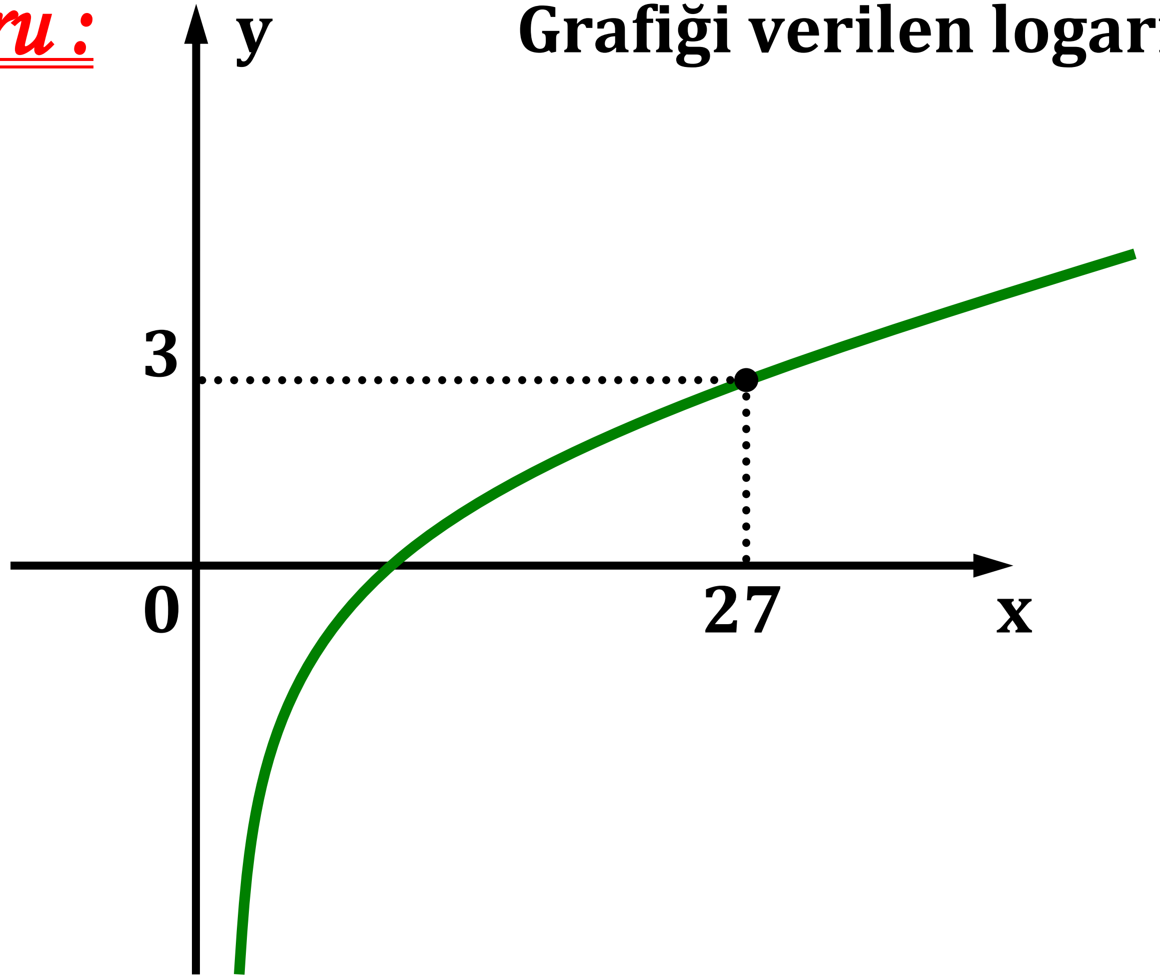
Soru :



Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için

$$k + m = ?$$

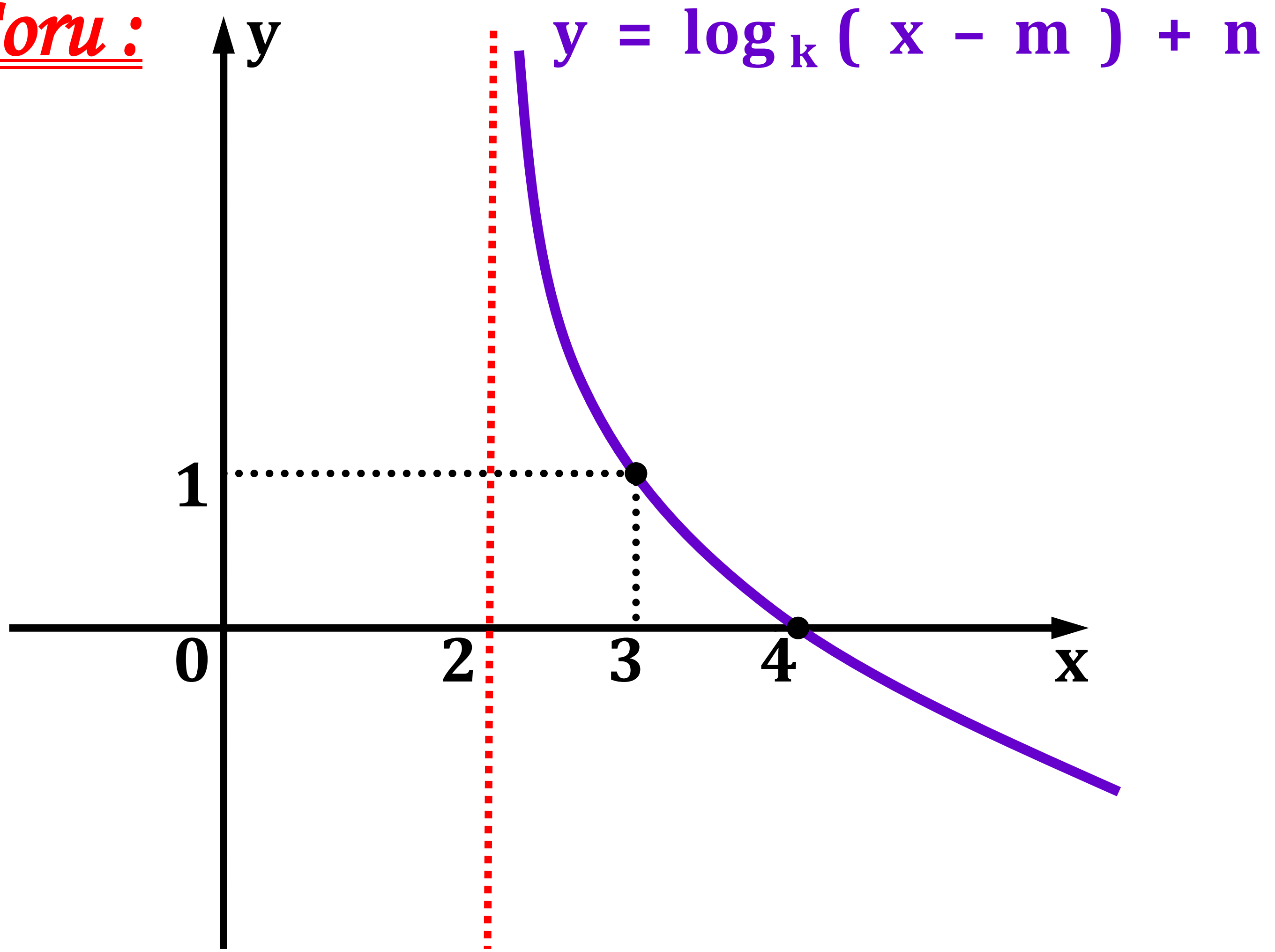
Soru :



Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için f fonksiyonu için $f \circ f(3) = ?$

$$y = f(x) = \log_a(x + b)$$

Soru :



Grafiği verilen logaritma fonksiyonu için

$k \cdot m \cdot n = ?$

Not : $y = f(x) = a^x$ **ile bu fonksiyonun tersi olan $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre birbirlerine simetriktirler.**

Soru : **$y = 2^x$ ile $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizip inceleyiniz.**

Soru : $y = f(x) = 3^{4x-1}$ **fonksiyonunun** $y = x$ **doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonun denklemini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = 5^{x+1} - 3$ **fonksiyonunun** $y = x$ **doğrusuna göre simetriği olan fonksiyon** $h(x)$ **ise** $h(22) = ?$

12. 1. 3. Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler

Terimler ve Kavramlar: Üstel denklem, logaritmik denklem

12. 1. 3. 1. Üstel, logaritmik denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.

12. 1. 3. 2. Üstel ve logaritmik fonksiyonları gerçek hayat durumlarını modellemede kullanır.

A) Gerçek hayat durumlarından nüfus artışı, bakteri popülasyonu, radyoaktif maddelerin bozunumu (yarıömür), fosil yaşlarının tayini, deprem şiddeti (Richter ölçeği), pH değeri, ses şiddeti (desibel) gibi örneklere yer verilir.

B) İsraf ve tasarruf kavramları hakkında farkındalık oluşturacak örneklere yer verilir.

C) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

Üstel Denklemler

Bilinmeyenlerin üs olarak kullanıldığı denkleme " üstel denklem " adı verilir. Denklemlerin çözümünde üslü ifadelerin ve logaritmanın özelliklerinden yararlanılır.

Kural 1: $a^{x} = a^{y}$ ise $x = y$ (Tabanlar eşitse kuvvetler de eşittir.)

Soru : $2^{-1+3x} = \dfrac{1}{32}$ ise $x = ?$

Soru : $8^{3x + 2} = 16^{2x + 10}$ ise $x = ?$

Soru : $\dfrac{1}{2^{x-3}} = \sqrt{2}^{\,x+51}$ ise $x = ?$

Soru : $3^{x+3} + 3^{x+1} = 810$ ise $x = ?$

Kural 2: $a^{x} = b$ ise $x = \log_{a} b$ olarak alınır. **(Bir taraf üstel fonksiyon ise üstelin tabanı eşitliğin karşısına logaritmanın tabanı olarak geçirilir.)**

İki tarafında tabanını eşitlemek mümkün değildir.

Soru : $11^{-x} = 7$

Soru : $5^{4x-2} = 3$ ise $x = ?$

Soru : $2 \cdot 3^{8-x} + 1 = 11$ ise $x = ?$

Soru : **$5^{1+x} = 8$ ise x'in cevabını düzenleyip sonucu tek loga-ritmalı olarak bulunuz.**

Soru : $3^{\frac{x-1}{2}} = 5$ **ise x ’in cevabını tek logaritmalı olarak bulunuz.**

Soru : $6^{x-1} = 3^{x+2}$ ise $x = ?$

Soru : $9^{x+1} = 6^{2x+1}$ ise $x = ?$

Soru : $4^{x} - 5 . 2^{x} - 24 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $25^{x} + 3 . 5^{x+1} - 16 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $9^{x} - 3^{x+2} + 14 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $e^{2x} - 9 . e^{x} + 20 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $2^{x} - \dfrac{13}{2^{x}} = -12$ ise $x = ?$

Soru : $e^{x} - \dfrac{8}{e^{x}} = 2$ ise $x = ?$

Soru : $25^{x} - 3 . 10^{x} + 2 . 4^{x} = 0$ ise $x = ?$

Soru : $9^{x} - 5 . 15^{x} + 4 . 25^{x} = 0$ ise $x = ?$

Logaritmik Denklemler

Bilinmeyen içeren logaritmalı denkleme " logaritmik denklem " adı verilir. Denklemlerin çözümünde üslü ifadelerin ve logaritmanın özelliklerinden yararlanılır.

- $\log_a f(x) = b$ ise $f(x) = a^b$ olarak alınır.

  ($a > 0$, $a \neq 1$ ve $f(x) > 0$ olmalıdır.)

*** Tek logaritmalı denklemlerde taban sayı ise logaritmanın şartını kontrol etmeye gerek yoktur.

Soru : $\log_x 25 = 2$

Soru : $\log_3 (x + 1) = 4$

Soru : $\log_7(3x - 5) = 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 5$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5\left(\dfrac{2x + 3}{10}\right) = -1$ ise $x = ?$

Soru : $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 3) = 3$ ise $x = ?$

Soru : $\log_7 [\log_2 (x - 4)] = 1$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5 [\ 20 + \log_2 (\ 3 + x\ )\ ] = 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 [\log_3 (3 - 2x) + 12] = 4$ ise $x = ?$

Soru : $\log\left[\log_3(-5x+2)+97\right]=2$ ise $x=?$

Soru : $\ln\left[\log_2\left\{\log_5(6x+1)\right\}\right] = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 (x^2 - 4x) = 5$ ise $x = ?$

Soru : **0,125 sayısının hangi tabandaki logaritmasının sonucu – 3 'tür ?**

Soru : **x ve y pozitif tamsayılardır. log (x . y) = 8 ve log (x / y) = 6 ise x ile y sayılarını bulunuz.**

Soru : $(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - 24 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $(\log x)^2 - 13\log x + 40 = 0$ ise denklemi sağlayan x değerlerinin çarpım sonucu kaç basamaklıdır ?

Soru : $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 - 5 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x} - 2 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 x = \log_x 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_3 x + \log_x 3 - 2 = 0$ ise $x = ?$

Soru : $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$ ise $x = ?$

Soru : $x^{\log x} = x \cdot 10^6$ ise $x = ?$ **(Eşitliğin iki tarafında da uygun tabanlı logaritma alınır.)**

Soru : $9x = x^{\log_3 x}$ ise $x = ?$

Soru : $\log_3 x + \log_3 (x + 6) = 3$ ise $x = ?$ **(Ayrı logaritmalarda bulunan çözüm <u>logaritmanın şartını sağlamalıdır.</u>)**

Soru : $\log_2(x-6)+\log_2(x+8)=5$ ise $x=?$

Soru : $\log_3(x+2) + \log_3(x-6) = 2$ ise $x = ?$

Soru : $\log_5(2x - 1) - \log_5(x + 1) = 1$ ise $x = ?$

Soru : $\log(x-2) - \log(8x+30) = -1$ ise $x = ?$

Soru :

$$\frac{1}{\log_{72} x} - \frac{1}{\log_{2} x} = 2 \text{ ise } x = ?$$

Soru : $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ ise $x = ?$ ($a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ idi.)

Not : $\log_a f(x) = \log_a h(x) \iff f(x) = h(x)$

olarak alınır. Yani logaritmada fonksiyon kısımları aynı ise logaritmaların tabanları da birbirine eşittir. Veya logaritmaların tabanları eşit ise fonksiyon kısımları da birbirine eşit olmalıdır.

($a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $h(x) > 0$ olmalıdır.)

Soru : $\log_{(k-2)}(3x - 7) = \log(3x - 7)$ ise $k = ?$

Soru : $\log_5(2x - 6) = \log_5(12 - x)$ ise $x = ?$

Soru : $\log_{13}(5x) = \log_{13}(x^2 + 4)$ ise $x = ?$

Soru : $2^{1 + \log_4 x} = 6$ ise $x = ?$

Üstel Eşitsizlikler

Üstel eşitsizliklerde $a^{h(x)} < a^{k(x)}$ olsun.

- $a > 1$ ise $h(x) < k(x)$ olarak alınır. 1 'den büyük sayıların kuvveti büyüdükçe kesrin değeri de büyür.

*** Taban 1 'den büyükse işlemdeki eşitsizlik kuvvetlerde de geçerlidir.

- $0 < a < 1$ ise $h(x) > k(x)$ olarak alınır. 0 ile 1 arasındaki sayıların kuvveti büyüdükçe kesrin değeri de küçülür.

*** Taban 0 ile 1 arasında ise işlemdeki eşitsizliğin tersi kuvvetlerde geçerlidir.

$2^2 < 2^3$ ise $4 < 8$ olur. Kuvvetlere bakarsak $2 < 3$ 'tür.

$(1/2)^2 < (1/2)^3$ ise $1/4 > 1/8$ olur. Yani

$0,25 > 0,125$ olur. Kuvvetlere bakarsak $2 < 3$ 'tür.

Soru : $(5/2)^{3x+14} < (5/2)^{-x+2}$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\left(3/11\right)^{x+4} < \left(3/11\right)^{2x-2}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin; A) Çözüm kümesini bulunuz.**

B) Çözüm kümesindeki doğal sayıların toplamı kaç olur ?

Soru : $\left(4 / 7 \right)^{x - 1} > \left(7 / 4 \right)^{5 - 3x}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\left(9 / 25 \right)^{-x-1} < \left(3 / 5 \right)^{2x-1}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinden en büyük negatif tam sayıyı bulunuz.**

Soru : $\left(4/9\right)^{x+1} \leq \left(27/8\right)^{x-2}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Logaritmalı Eşitsizlikler

Kural 1 : Logaritmalı eşitsizlik $\log_a h(x) < \log_a k(x)$ olarak verilsin.

- $a > 1$ ise $h(x) < k(x)$ olarak alınır. Logaritma fonksiyonu artandır ve eşitsizlik yön değiştirmez.

$4 < 8$ olsun. $\log_2 4 < \log_2 8 \longrightarrow \log_2 2^2 < \log_2 2^3$

$2 . \log_2 2 < 3 . \log_2 2 \longrightarrow 2 < 3$ olur. Yani işlem doğrudur.

- Ayrıca $h(x) > 0$ ve $k(x) > 0$ olmalıdır.

*** Bulunan çözüm aralıklarının ortak olduğu kısım bize logaritmalı eşitsizliğin çözüm kümesini verir.

Not : *** Tabanı eşitsizliğin karşısına atıp, eşitsizliği aynı almak çözümü kolaylaştırır.

Birden fazla eşitsizlik olacağından tablo sisteminden yararlanılabilinir.

Soru : $\log_3(x + 5) < 2$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\log(2x - 12) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplam kaç olur ?**

Soru : **$3 \cdot \log_2(2x - 4) - 5 \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : $\dfrac{\log_5(x+1)}{2} + 8 < 9$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : **$f(x) = \sqrt{2 - \log_3(x-1)}$ fonksiyonunu sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : **$\log_5 x + \log_5 3 \le 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : **$1 < \log_3(2x - 1) < 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : **$1 \leq \log_2 (6 - x) < 3$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı ne olur ?**

Soru : **$\log_2 [\ \log_3 (\ x + 2\ )\ ] \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : **$\log_5 [\ \log_2 (\ x - 1\ )\ ] > 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : Bir ABC üçgeninde; $|AB| = \log 3$, $|BC| = \log 6$ ve $|AC| = \log(2x)$ ise x'in alabileceği kaç tamsayı değeri vardır ?

(**Hatırlatma :** (Üçgen Eşitsizliği) Kenar uzunluğu a , b ve c br olan bir üçgende $|a - b| < c < a + b$ olarak alınırdı.)

Soru : **$\log_5 (x^2 - 4x) < 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?** **(Çözümde tablo sisteminden faydalanılır.)**

Soru : **$\log_3(x^2 + 2x + 1) \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : $\log_2(x-3)+\log_2(x+1)>5$ **eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : **$\log_2\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right) > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\log_3(x-3) - \log_3(x+2) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Kural 2 : Logaritmalı eşitsizlik $\log_a h(x) < \log_a k(x)$ olarak verilsin.

$0 < a < 1$ ise $h(x) > k(x)$ olarak alınır. Logaritma fonksiyonu azalandır ve eşitsizlik yön değiştirir.

$4 < 8$ olsun. $\log_{1/2} 4 < \log_{1/2} 8 \longrightarrow$

$\log_{2^{-1}} 2^2 < \log_{2^{-1}} 2^3 \longrightarrow -1.2.\log_2 2 < -1.3.\log_2 2$

$-2 < -3$ olur. Yani işlem yanlış oluyor. Bu yüzden işlemde eşitsizlik yön değiştirmelidir.

$4 < 8$ olsun. $\log_{1/2} 4 > \log_{1/2} 8$ olarak alınır.

- Ayrıca $h(x) > 0$ ve $k(x) > 0$ olmalıdır.

*** Bulunan çözüm aralıklarının ortak olduğu kısım bize logaritmalı eşitsizliğin çözüm kümesini verir.

Not : *** **Tabanı eşitsizliğin karşısına atıp, eşitsizliği yön değiştirmek çözümü kolaylaştırır.**

Soru : $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 3$ **eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : $\log_{\frac{1}{3}}(x - 5) \leq -2$ **eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{2}+4\right) < 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?

Soru : **$\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}} (4 - x) \right] < 1$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : **$\log_{\frac{3}{4}}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

Gerçek Hayat Durumları İle İlgili Üstel ve Logaritmik Fonksiyon Problemleri

Gerçek hayat durumlarından; nüfus artışı, bakteri popülasyonu, radyoaktif maddelerin bozunumu (yarı ömür), fosil yaşlarının tayini, deprem şiddeti (Richter ölçeği), pH değeri, ses şiddeti (desibel) gibi örneklerle karşılaşılmaktadır.

Soru : Radyoaktif bir maddenin yarılanma süresi, başlangıçta mevcut olan çekirdeklerin yarısının bozunması için geçen süredir. Bir radyoaktif çekirdeğin birim zamandaki bozunma olasılığına " radyoaktif bozunma sabiti " adı verilir ve " λ " (Lambda) ile gösterilir. Bu durumda radyoaktif bir maddenin yarılanma süresi

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

formülüyle hesaplanır. ($\ln 2 \cong 0{,}693$)

Buna göre bozunma sabiti 0,077 olan bir radyoaktif maddenin yarılanma süresini (yıl) bulunuz.

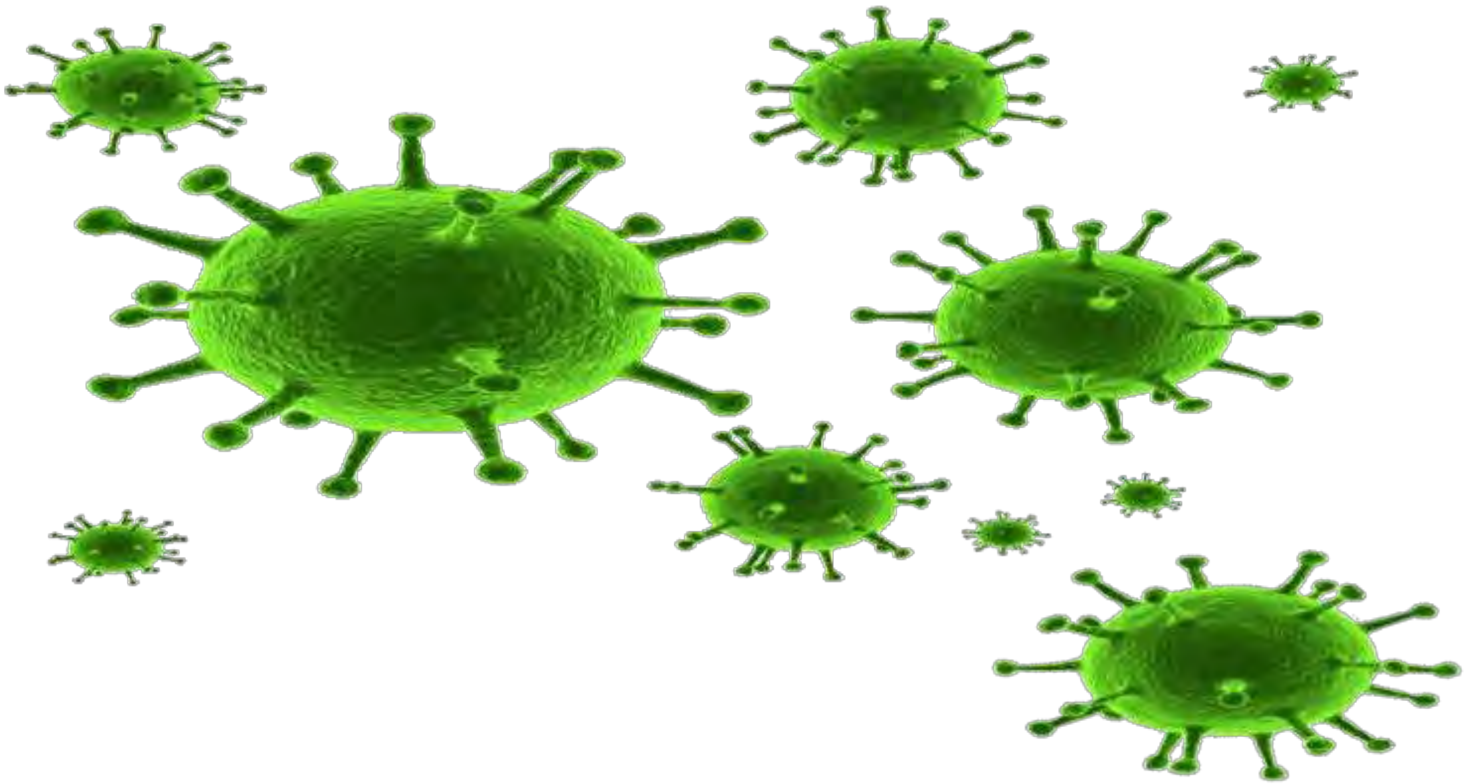
Soru : Radyoaktif bir maddeni başlangıçtaki miktarı N_0 gr, bozunması sonucu kalan madde miktarı N gr ve geçen süre t saat olmak üzere $N = N_0 \, . \, e^{-t/40}$ denklemi ile modellenmektedir. Buna göre başlangıçta 3200 gr olan bir radyoaktif maddeden 7200 dk sonra kaç gr kalacağını bulunuz. (Cevabı e türünden bulunuz.)

Soru : Bileşik faiz, bir birim dönemde elde edilen anapara ve faiz toplamının sonraki birim dönemlerde hesaba anapara olarak katılarak bu yeni tutar üzerinden faiz hesaplanmasıdır. A anapara, n faiz oranı ve t faizin uygulandığı zamanı göstermek üzere;

$S = A \,.\, (1 + n / 100)^{t}$ eşitliği, süre sonunda ele geçen parayı göstermektedir. Buna göre 100000 ₺ 'si olan bir kişi bankaya % 20 bileşik faiz üzerinden 5 yıl boyunca parayı yatırırsa süre sonunda eline kaç ₺ para geçer ?

Soru : **Bir bölgede ortaya çıkan bir virüsün o bölgedeki insanlara bulaşmaya başladığı görülmüştür. Virüs bulaşan bir kişinin virüsü her ayın sonunda 3 kişiye daha bulaştırdığı tespit edilmiştir.**

A) Süreç 1 kişi ile başlasaydı her ayın sonundaki toplam virüslü sayısı tablodaki kısma sıra ile yazılacaktır. Buna göre t ay sonunda virüsün toplamda kaç kişiye bulaşacağını hesaplayınız.



	Artış	Ay Sonu Toplam
Başlangıç		
1. Ay		
2. Ay		
3. Ay		
4. Ay		
.		
.		
.		
t. Ay		

B) **Bölgedeki 4096 kişiye virüsün bulaşması kaç ayı bulur ?**

Soru : **Bir bakteri türünün sayısı her saatte 2 katına çıkmaktadır. Başlangıçtaki bakteri sayısı 10 olduğuna göre;**

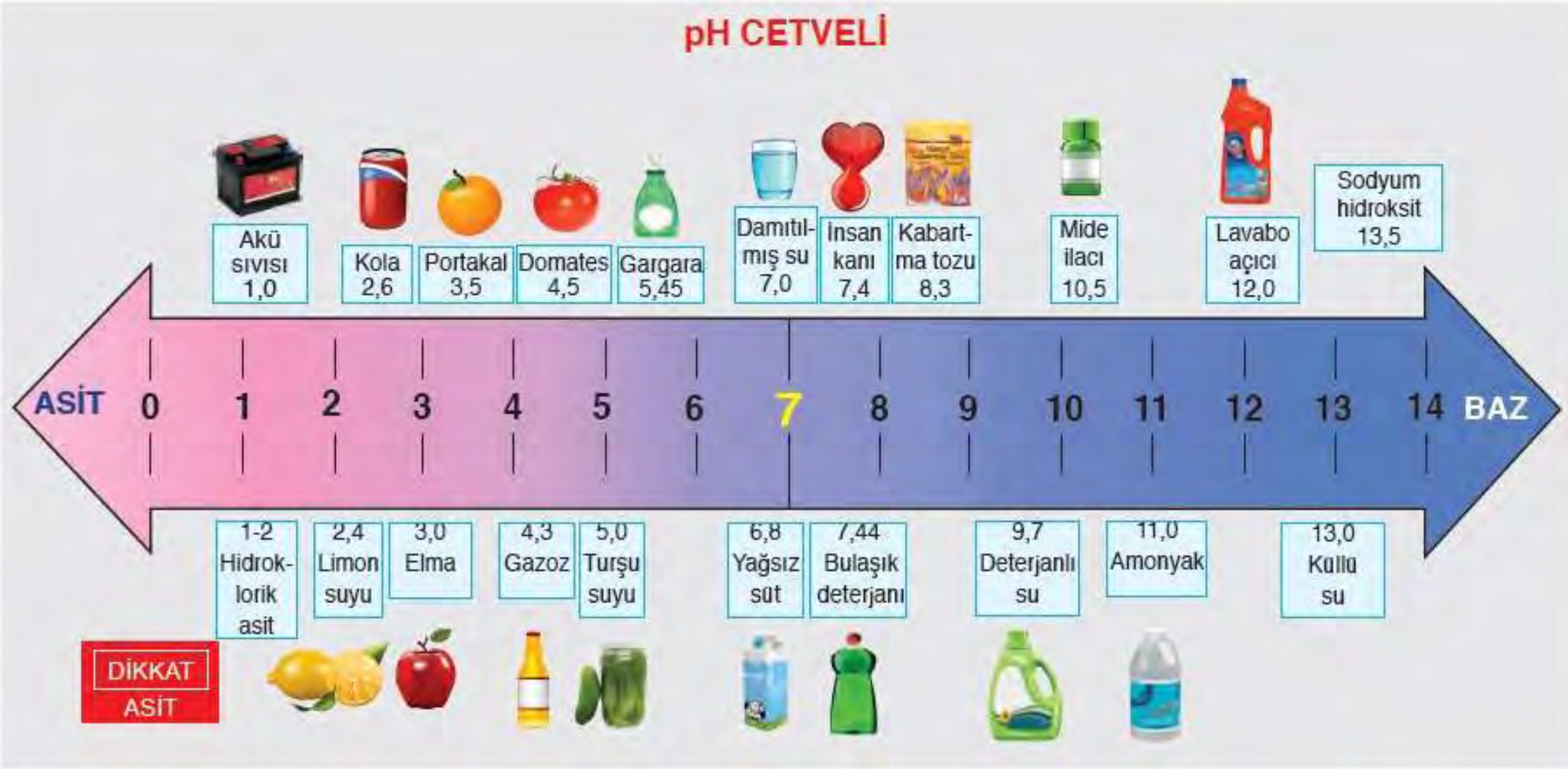
A) **t saat sonraki toplam bakteri sayısını veren ifadeyi bulunuz.**

B) **Bu bakteri türü yaklaşık kaç saat sonra başlangıçtaki sayısının 1000000 katı olur ? ($\log 2 \cong 0,3$ alınız.)**

Not : (x Katına Çıkma Süresi) Popülasyonun başlangıç hacmi n_o ve popülasyonun x katına çıkma süresi a olsun. Bu durumda t zamanında popülasyonun hacmi $n(t) = n_o \cdot x^{t/a}$ şeklindedir. Burada a ve t aynı zaman birimlerinde ölçümlenir.

Soru : İdeal koşullar altında belirli bakteri popülasyonu her bir dört saatte üç katına çıksın. Başlangıçta bir koloni de 5000 bakteri olsun. Kaç saat sonra kolonideki bakteri miktarı 135000 olur ?

Soru : **Hidrojen iyonu derişimi (bir çözeltide çözünmüş olarak bulunan madde miktarına) matematiksel olarak $pH = -\log [H^+]$ eşitliğinden elde edilmektedir. pH < 7 ise çözelti asidik, pH = 7 ise çözelti nötr, pH > 7 ise çözelti baziktir.**



Buna göre;

A) **pH değeri 5 olan bir çözeltideki [H^+] derişimini bulunuz.**

B) **[H^{+}] değeri $3 . 10^{-8}$ olan çözeltinin pH değerini bularak, asit – bazik durumunu inceleyiniz. (log 3 ≅ 0,4 alınız.)**

Soru : Bir ses kaynağının ses düzeyi olan desibel (dB) ; oluşturduğu ses şiddetinin, uluslar arası ses şiddeti $I_o = 10^{-12}$ watt/m^2 (bir insanın duyabileceği en düşük ses şiddeti) değerine oranlaması ile bulunur. I : Kaynağın ses şiddeti , L = Ses düzeyi olmak üzere (dB) $L = 10 . \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ifadesi ile bulunur. Ses seviyesi ve açıklaması alttaki tabloda örnek olarak verilmiştir.

Ses Seviyesi : 0 dB	İnsan kulağının duyabileceği en düşük ses şiddeti
30 dB	Fısıltı, sessiz konuşma
50 dB	Buzdolabı, havalandırma sesi
70 dB	Tv, bilgisayar sesi
80 dB	Alarm sesi, fabrika gürültüsü
100 dB	Çöp kamyonu sesi
120 dB	Gök gürültüsü, uçağın havalanışı

130 dB	Delici çekiç (İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en büyük ses şiddeti)
150 dB	Jet uçağının kalkışı

Buna göre;

A) **Bir ses kaynağının şiddeti 10^{-7} watt/m^2 ise ses düzeyi kaç dB olur ? Ayrıca ses düzeyi tablodaki hangi gruba dahildir ?**

B) 70 dB ses düzeyine sahip olan ses şiddeti, fısıltı ile konuşma-dan çıkan ses düzeyinin kaç katı ses şiddetine sahiptir ?

Soru : Genlik, bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesidir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Mikron ($1 \text{ mm} = 10^3$ mikron) cinsinden ölçülen maksimum genliğe (şiddetine) **d** ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğüne **R** denilir. $R = \log d$ ile hesaplanır. Buna göre;

A) Maksimum genliği 80 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü bulunuz. ($\log 2 \cong 0,301$ alınız.)

B) **Richter ölçeğine göre; 1992 yılındaki Erzincan'da yaşanan 6,8 büyüklüğündeki deprem, 2019 yılında İstanbul'da yaşanan 5,8 büyüklüğündeki depremin şiddetinin kaç katıdır ?**

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 2. DİZİLER

12. 2. 1. Gerçek Sayı Dizileri

Terimler ve Kavramlar: **Dizi, sonlu dizi, sabit dizi, aritmetik dizi, geometrik dizi, Fibonacci dizisi**

Sembol ve Gösterimler: $(a_n) , \sum , S_n$

12. 2. 1. 1. Dizi kavramını fonksiyon kavramıyla ilişkilendirerek açıklar.

A) **Diziler konusunun tarihsel gelişim süreci hakkında bilgi verilir.**

B) **Sonlu dizi, sabit dizi ve dizilerin eşitliği verilir.**

12. 2. 1. 2. Genel terimi veya indirgeme bağıntısı verilen bir sayı dizisinin terimlerini bulur.

12. 2. 1. 3. Aritmetik ve geometrik dizilerin özelliklerini kullanarak işlemler yapar.

A) İlk n terim toplamı bulunur.

B) Toplam sembolü tanıtılır ancak özellikleri verilmez.

12. 2. 1. 4. Diziler yardımıyla gerçek hayat durumları ile ilgili problemler çözer.

Aritmetik, geometrik ve Fibonacci dizilerine doğadan, çeşitli sanat dallarından örnekler verilir.

2. ÜNİTE : DİZİLER

Gerçek Sayı Dizileri

Pozitif tam sayılar kümesinden gerçek (reel) sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona " dizi (gerçek sayı dizisi) " adı verilir.

$f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere f fonksiyonunun (dizisinin) elemanları; $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, . . . , $f(n) = a_n$ biçiminde yazılabilir.

$(a_n) = (a_1 , a_2 , a_3 , . . . , a_n , . . .)$ dizi olarak gösterilir. a_n ifadesine dizinin n. terimi veya genel terimi adı verilir.

Kural : **(a_n) bir dizi belirtiyorsa,**

1) $n \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır. $(n \rightarrow 1 , 2 , 3 , 4 , ...)$

2) Diziyi tanımsız yapan değer olmamalıdır.

Soru : **Altta verilen fonksiyonların dizi olup olmadığını belirtiniz.**

A) $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(n) = 3n + 1$

B) $f : \mathbb{Z}^+ - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(n) = \dfrac{n + 6}{2n - 4}$

C) $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(n) = \dfrac{5 - n}{n + 3}$

D) $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n - 5}$

E) $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = (-1)^n$

Soru : **Altta verilen ifadelerin bir dizinin genel terimi olup olamayacağını belirtiniz.**

A) $a_n = \dfrac{6}{n - 4}$

B) $a_n = \dfrac{n + 1}{2n - 11}$

C) $a_n = \sqrt{n + 5}$

D) $a_n = \sqrt[3]{n - 2}$

E) $a_n = 11$

F) $a_n = n^2 + 8n - 4$

G) $a_n = \tan n^\circ$

H) $a_n = \log_5 (n - 2)$

Soru : $(a_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisi olabilir ? **(Sırasıyla a_1 , a_2 , a_3 , a_4 değerleri incelenirse bulunan sonuçlar n sayılarının; katı, katı ve fazlası – eksiği, kuvveti , kuvveti ve fazlası – eksiği v.b. ilişki içinde olabilir.)**

A) $a_n = 2n - 1$

B) $a_n = n^2 + 1$

C) $a_n = 2n + 1$

D) $a_n = n^2 - 1$

E) $a_n = n + 2$

Soru : $(a_n) = (1, 4, 7, 10, \ldots)$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisi olabilir ?

A) $a_n = 3n - 1$

B) $a_n = 3n + 1$

C) $a_n = n^2$

D) $a_n = 3n - 2$

E) $a_n = 3n + 2$

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{3n + 1}{n} \right)$ **dizisinin** **ilk dört terimini** **bulunuz.**

(n ’e sırasıyla değerler verilir ve sonuçlar bulunur.)

Soru : $(a_n) = \left(\sqrt{n+2} \right)$ **dizisinin ilk dört teriminin çarpımını bulunuz.**

Soru : $(a_n) = (2, 5, 10, 17, \ldots, n^2 + 1, \ldots)$ **dizisinin ilk altı teriminin toplamını bulunuz.**

Soru : **Genel terimi** $a_n = \dfrac{(-1)^n.(n+1)}{n}$ **dizisinin ilk üç teriminin toplamını bulunuz.**

Soru : Genel terimi $a_n = 3 + 6 + 9 + . . . + 3n$ olan dizisinin ilk dört teriminin toplamını bulunuz. **(n ’e sayı verildiğinde, o kısma kadar olan grup işleme dahil olarak alınır.)**

Soru : **Genel terimi $a_n = 2 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^n$ olan dizisinin ilk beş teriminin toplamını bulunuz.**

Soru : Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n - 1}{n + 5} & , \ n \text{ tek ise} \\[2ex] n^2 + 4 & , \ n \text{ çift ise} \end{cases}$$

veriliyor. Buna göre $a_5 \cdot a_4 + a_6 = ?$ (n yerine verilen sayı şartı sağladığı yerde kullanılır.)

Soru : Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} 5 - n^2 & , \ n + 1 = 3k \ \text{ise} \\ 12 / n & , \ n + 1 = 4k \ \text{ise} \\ 3n + 5 & , \ n + 1 = 5k \ \text{ise} \end{cases}$$

veriliyor. Buna göre $a_{15} + a_4 + a_8 = ?$

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{3n + 1}{n + 2}\right)$ dizisi veriliyor. (a_{2n-1}) dizisinin 5. terimi ne olur ? (**1. Yol :** n yerine 2n – 1 yazılır ve yeni dizi bulunur ve sonrasında 5. terimi elde edilir. **2. yol :** İstenen dizinin bir terimini bulmak için ilk dizide uygun sayı kullanılır.)

Soru : $(a_n) = (\sqrt{n+2})$ **dizisi veriliyor.** (a_{n+5}) **dizisinin 2. terimi ile** (a_{5n-1}) **dizisinin 3. teriminin toplamı ne olur ?**

Soru : $(a_{n-2}) = (2^{n+1})$ **dizisi veriliyor.** (a_{n+4}) **dizisinin 8. terimi ne olur ?**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{6 - 2n}{n + 3}\right)$ **dizisinin <u>kaçıncı terimi</u> – 1 olur ?**

(Dizinin genel terimi verilen sayıya eşitlenir ve denklem çözümün-den istenen bulunur.)

Soru : $(a_n) = (\log_2(3n+5))$ **dizisinin kaçıncı terimi 5 olur ?**

Soru : $(a_n) = (n^2 - 5n - 22)$ **dizisinin kaçıncı terimi** -8 **olur ?**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{12 - n}{n + 6}\right)$ dizisinin **kaç terimi pozitif** olur ?

($a_n > 0$ olması isteniyor. Eşitsizlik çözümlerinde tablo sisteminden faydalanılır. Çözüm kümesi bulunurken dizi şartı yani $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğu dikkate alınmalıdır.)

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{n^2 - 2n - 15}{2n - 1} \right)$ **dizisinin <u>kaç terimi pozitif</u> değildir ?**

Soru : $(a_n) = (-n^2 - 5n + 4)$ **dizisinin kaç terimi -10 sayısından büyüktür ?**

Hatırlatma : $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda;

A) $a < 0$ ise k değeri fonksiyonun en büyük değeridir.

B) $a > 0$ ise k değeri fonksiyonun en küçük değeri idi.

$r = -\dfrac{b}{2a}$ olup $k = f(r)$ idi. $k = a_r$ isteneni verir.

Veya $k = \dfrac{4.a.c - b^2}{4a}$ olarak ta bulunabilir.

Not : r tam sayı ise mavi kısımdaki k formülü uygulanabilir.

*** Ama r tam sayı olmazsa dizide n pozitif tam sayı olması şartı olduğu için bulunan r ’nin en yakın tam sayı komşusu için k değeri bulunur. k ’nın mavi kısımdaki formülü uygulanmaz.

Soru : $(a_n) = (n^2 - 8n + 12)$ **dizisinin <u>en küçük</u> terimi kaç olur ?**

Soru : $(a_n) = (-n^2 + 6n + 5)$ **dizisinin en büyük terimi kaç olur ?**

Soru : $(a_n) = (n^2 - 5n + 24)$ dizisinin en küçük terimi kaç olur ?

Not 1: **Payı ayrılabilir kesirli bir dizinin tam sayı olmasını sağlayan n değerlerini bulmak için kesirde ortak payda ayrılır. Sadeleşenlerden sonra kalan kesirli kısmı tam sayı yapan n değerlerini bulmak işimizi kolaylaştırır.** $n \in \mathbb{Z}^{+}$ **olduğu unutulmaz.**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{6n - 30}{n}\right)$ **dizisinin kaç terimi tam sayıdır ?**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2 + 45 - n}{n} \right)$ **dizisinin kaç terimi tam sayıdır ?**

Not 2: Payı ayrılamayan kesirli bir dizinin tam sayı olmasını sağlayan n değerlerini bulmak için kesirde pay paydaya bölünür. Polinomların bölünmesindeki yöntem kullanılır. Verilen kesir

$$A + \frac{B}{\text{Payda}}$$

şeklinde yazılır. Böylece paydaya B ’yi tam bölebilecek n tam sayıları bulunur. $n \in \mathbb{Z}^{+}$ (dizi şartı) olduğu unutulmaz.

$$\begin{array}{r|l} \text{Pay} & \text{Payda} \\ \cline{2-2} - & \quad A \\ \hline B & \end{array}$$

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{n-16}{n+4}\right)$ **dizisinin kaç terimi** **tam sayıdır** **?**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{3n + 30}{n + 2} \right)$ **dizisinin kaç terimi tam sayıdır ?**

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{n^2 + 3n + 23}{n + 1} \right)$ dizisinin kaç terimi tam sayıdır ?

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{2n^2 - 5n - 6}{n + 3} \right)$ **dizisinin kaç terimi tam sayıdır ?**

Not : **Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanabilen dizilere " indirgemeli dizi " adı verilir. Az sayıda verilen terimleri n 'e sırası ile uygun değerler vererek bulmak mümkündür. Çok sayıda hesaplama gerektiren durumlarda sonuçları tek tek bulmak yerine gidişata göre taraf tarafa toplama veya çarpma yaparak birbirini götüren elemanlar bulunur.**

Soru : $a_{n+1} = a_n + n + 5$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.**

$a_3 = 11$ **ise** $a_6 = ?$

Soru : $a_n = 6n - 2 + a_{n-1}$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.**

$a_1 = 5$ **ise** $a_4 = ?$

Soru : $a_{n+2} + a_{n+1} = n^2$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.**

$a_8 = 30$ **ise** $a_4 = ?$

Soru : $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.**

$a_1 = 6$ **ve** $a_2 = 10$ **ise** $a_5 = ?$

Soru : $a_{n+1} - a_n = n$ indirgemeli bir dizi veriliyor. $a_1 = 4$ ise $a_{80} = ?$

(Not : Aradaki fark 1 ise n yerine gelen sayılar 1 arttırılarak alınır. Aradaki farkın sonucuna göre n sayıları uygun seçilir.

Çok sayıda hesaplama gerektiren durumlarda sonuçları tek tek bulmak çok uzun sürer. n yerine sırası ile önce 3 değer alınır. Ara boşluk bırakıldıktan sonra istenilen son terim için n değeri alınır. Gidişata göre birbirini sadeleştiren (taraf tarafa toplama veya çarpma) ifadeler bulunur ve istenen sonuç elde edilir.

Çözümde $1 + 2 + 3 + . . . + n = \dfrac{n\,.\,(n+1)}{2}$ eşitliğinden yararlanılır.)

$a_{n+1} - a_n = n$ indirgemeli bir dizi veriliyor. $a_1 = 4$ ise $a_{80} = ?$

Soru : $a_{n+1} = a_n + n$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.** $a_1 = 3$ **ise bu dizinin; A)** $a_{100} = ?$

$a_{n+1} = a_n + n$ indirgemeli bir dizi veriliyor. $a_1 = 3$ ise bu dizinin; B) Genel terimini (yani a_n ifadesini) bulunuz.

Soru : $a_{n+2} - a_n = n + 1$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.**

$a_1 = 9$ **ise** $a_{45} = ?$

Soru : $a_{n+1} = n \cdot a_n$ **indirgemeli bir dizi veriliyor.** $a_1 = 7$ **ise** $a_{100} = ?$ **(1 . 2 . 3 . . . n = n ! eşitliğinden yararlanılır.)**

Soru : $a_n = n \cdot a_{n+2}$ indirgemeli bir dizi veriliyor. $a_2 = 30!$ ise $a_{62} = ?$

Tanım : Sınırlı sayıda elemana sahip olan dizilere " sonlu dizi " adı verilir. A_n kümesi n elemandan oluşur.

$A_n = \{ 1, 2, 3, 4, . . . n \}$ olur. Sınırlı kümenin elemanları dizinin genel teriminde kullanılarak sonlu dizinin elemanları bulunmuş olur.

Soru : $A_4 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ veriliyor. $a_n : A_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ ise $(a_n) = (n^2 + n)$ sonlu dizisinin elemanlarının toplamını bulunuz.

Tanım : **Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere " sabit dizi " adı verilir.**

(a_n) sabit dizi ise $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \dots$ olur.

Soru : **Alttaki dizilerin sabit dizi olup olmadığını kontrol ediniz.**

A) $(a_n) = (1^{n+2})$

B) $(a_n) = (-6)$

C) $(a_n) = (\sin(n\pi))$

D) $(a_n) = (n^2)$

E) $(a_n) = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

Soru : $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $(a_n) = ((-1)^{n \cdot k})$ dizisi **sabit** bir dizi ise aşağıdaki maddelerden hangisi – hangileri kesin doğrudur ?

I. k bir tek tam sayıdır.

II. k bir çift tam sayıdır.

III. **$n + k$ toplamı bir tek tam sayıdır.**

IV. **k^{n} bir çift tam sayıdır.**

Soru : $(a_n) = (8n - 2k + 5 + kn)$ **dizisi sabit bir dizi ise k sayısını ve dizinin sonucunu bulunuz.** **(Hatırlatma : $f(x) = a$ sabit fonksiyonunda x'li terim bulunmazdı. Yani x'li grupların katsayıları sıfırlanırdı.)**

$$(a_n) = (8n - 2k + 5 + kn)$$

Soru : $(a_n) = ((k-4)n^2 + 6n - 2tn + k + t + 1)$ **dizisi**

sabit bir dizi ise $a_{2019} = ?$

$$(a_n) = ((k-4)n^2 + 6n - 2tn + k + t + 1)$$

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{2n + 3}{9 - kn} \right)$ **dizisi sabit bir dizi ise k sayısını ve (a_n) dizisini bulunuz.** **(Not : Dizinin herhangi iki elemanı birbirine eşitlenir ve istenen bulunur.)**

$(a_n) = \left(\dfrac{2n + 3}{9 - kn} \right)$ **dizisi sabit bir dizi ise k sayısını ve (a_n) dizisini bulunuz.** **(Hatırlatma : $f (x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olarak alınırdı. Yani pay ile paydadaki benzer terimlerin oranı birbirine eşittir.)**

Soru : $\left(a_n\right) = \left(\dfrac{3n + 10 - kn}{25 + 10n}\right)$ dizisi sabit bir dizi ise k sayısını ve $\left(a_n\right)$ dizisini bulunuz.

Soru : $(a_n) = \left(\dfrac{kn^2 + 2n + m}{4n^2 + 5 + 10n} \right)$ **dizisi <u>sabit</u> bir dizi ise k ve m sayısını, (a_n) dizisini bulunuz.**

Tanım : Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için (a_n) ve (b_n) dizileri için

$(a_n) = (b_n)$ ise bu iki diziye " eşit diziler " adı verilir.

Soru : Genel terimleri; $a_n = \cos (n\pi)$, $b_n = (-1)^n$ ve $c_n = \log_{(n + 1)} (n + 1)$ olan (a_n) , (b_n) ve (c_n) dizilerinden eşit olan dizileri bulunuz.

Soru : Genel terimleri $a_n = 3n - 9 + k$ ve $b_n = 8n + m - kn$ olan (a_n) ve (b_n) dizileri birbirine eşit ise $k \cdot m = ?$

(Polinomların eşitliğindeki yöntem kullanılır. Benzer terimli ifadelerin katsayıları birbirine eşitlenir.)

$a_n = 3n - 9 + k$ $\qquad\qquad$ $b_n = 8n + m - kn$

Soru : Genel terimleri $a_n = 2n^2 + kn - 9 + 5n$ ve $b_n = 8n + t - mn^2 + 4$ olan (a_n) ve (b_n) dizileri birbirine eşit ise $k + m + t = ?$

Toplam Sembolü

Sonlu sayıda bir dizinin sıralı elemanlarının toplamını tek seferde toplam sembolü ile gösterebiliriz. Toplam sembolü $\sum$ ile gösterilir.

$$\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n$$

olarak gösterilir. k değişken (indis), r alt sınır, n ’de üst sınır olarak adlandırılır.

Örneğin,

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 1) = (2.1 + 1) + (2.2 + 1) + (2.3 + 1)$$

$$= 3 + 5 + 7$$ **olarak açılır.**

Soru : **Altta toplam sembolü ile verilen dizilerin açık halini bulunuz.**

A) $$\sum_{k=5}^{8} (k^2 - 3) =$$

B) $$\sum_{k=15}^{19} (-1)^k . (k+2) =$$

Soru : **Altta açık halde verilen toplam işlemlerini toplam sembolü kullanarak yazınız.**

A) $4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 32 =$

B) $13 + 16 + 19 + 22 + \ldots + 61 =$

C) $0 + 3 + 8 + 15 + . . . + 99 =$

D) $- 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + - . . . - 149 + 150 =$

ARİTMETİK DİZİLER

Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere " aritmetik dizi " adı verilir.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r$$

ise (a_n) bir aritmetik dizidir.

r sabit sayısına aritmetik dizinin " ortak farkı " adı verilir.

Örneğin ; $(a_n) = (5, 9, 13, 17, \ldots, 4n + 1, \ldots)$

dizisini inceleyelim.

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = 4$ olduğundan (a_n) dizisi aritmetik bir dizidir.

Soru : **Genel terimi $a_n = 3n + 5$ olan dizi bir aritmetik dizi midir ? (Dizinin elemanları sıra ile bulunur ve artışın sabit olup olmadığına bakılır.)**

Soru : **Genel terimi $a_n = n^2 - n$ olan dizi bir aritmetik dizi midir ?**

Kural: (a_n) aritmetik bir dizi olsun. Dizinin ilk terimi a_1 ve ortak farkı r olsun.

$$(a_n) = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ .\ .\ .\ )$$

$$+r \quad +r \quad +r \quad . \ . \ .$$

a_1

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

.

.

.

$a_n = a_1 + (n - 1).r$ olarak alınır.

Soru : **İlk terimi -15 ve ortak farkı 5 olan aritmetik dizinin yirminci terimi kaç olur ?**

Soru : **İlk terimi 7 ve ortak farkı – 2 olan aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.**

Soru : **İlk terimi 11 ve ortak farkı 4 olan aritmetik dizinin kaçıncı terimi 75 olur ?**

Soru : **(a_n) aritmetik dizisinde $a_{n+1} = a_n + 5$ olup $a_{14} = 60$ ise $a_1 = ?$**

Soru : **Bir aritmetik dizinin ilk terimi dizinin ortak farkının karesine eşittir.** $a_7 = -9$ **ise** $a_{15} = ?$

Soru : (a_n) aritmetik bir dizidir. Buna göre

$$\frac{a_7 + a_{11} + a_{21}}{a_{13}} = ?$$

Soru : (a_n) aritmetik bir dizidir. Buna göre

$$\frac{a_{27} + a_{15}}{a_{12} + a_{31} + a_{20}} = ?$$

Soru : **– 3 ile 21 sayıları arasına bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde beş sayı yerleştiriliyor. Bu sayılar ne olmalıdır ?**

Soru : **5 , a , c , d , e , f , g , h ve 53 sayıları bir aritmetik dizi oluşturuyor. Buna göre bu sayıların toplamını bulunuz.**

Soru : **Bir <u>dörtgenin</u> ardışık iç açıları bir aritmetik dizi oluşturuyor. Dörtgende <u>en küçük</u> iç açı 63° ise diğer iç açılar kaç derece olmalıdır ?**

Not : Bir (a_n) aritmetik dizisinde a_p ve a_q terimleri verilirse

$$r = \frac{a_q - a_p}{q - p}$$ işleminin sonucu dizinin ortak farkını verir.

Soru : (a_n) aritmetik dizisinde $a_{13} = 16$ ve $a_{35} = 60$ ise dizinin ortak farkını ve ilk terimini bulunuz.

2. Yol : **Verilenler açılır ve taraf tarafa çözümden istenen bulunabilir.**

$$a_{13} = 16 \quad \text{ve} \quad a_{35} = 60$$

Soru : **İkinci terimi 9 ve on birinci terimi 81 olan aritmetik dizide otuzuncu terim kaç olmalıdır ?**

Kural : **Bir aritmetik dizide her terim, kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik (toplamlarının yarısı) ortalamasıdır.**

Örnek 1: a_1 , a_2 , a_3 aritmetik bir dizinin ilk üç terimi olsun.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$ olarak alınır.

Örnek 2: a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 aritmetik bir dizinin ilk beş terimi olsun.

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$ veya $$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2}$$ olarak alınır.

Soru : 2 , a , b , c , d , e , 32 bir aritmetik dizi oluşturuyorsa;

(İstenirse elemanlar tek tekte bulunabilir.)

A) c = ?

B) b + d = ?

Soru : **İlk üç terimi $n + 4$, $3n - 1$ ve $4n - 1$ olan aritmetik dizinin 4.terimi ne olur ?**

Soru : (a_n) aritmetik dizi olsun. $a_{42} + a_{90} = 228$ ise $a_{66} = ?$

(2. yol : Terimler açılır ve isteneni bulmak için uygun çözüm yapılır.)

Soru : (a_n) aritmetik dizi olsun. $a_8 + a_{60} = 54$ ve $a_{16} + a_{32} = 72$ ise $a_{34} + a_{24} = ?$

Soru : (a_n) aritmetik dizi olsun. $a_{46} = 97$ ve $a_{33} = 71$ ise $a_{20} = ?$

Soru : (a_n) **aritmetik dizi olsun.** $a_{11}^2 - a_3^2 = 96$ **ve** $a_7 = 4$ **ise** $a_{11} = ?$

Soru : **Pozitif terimli (a_n) aritmetik dizisinde ardışık üç terimin <u>toplamı</u> 30 , <u>çarpımları</u> ise 910 olarak veriliyor. Bu terimlerin kareleri toplamını bulunuz.**

Kural : (a_n) aritmetik dizisinin <u>ilk n terim toplamı</u> S_n ile gösterilir.

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$ olarak bulunur.

$$= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n - 1) \cdot r)$$ eşitliğinden de yararlanılabilinir.

Soru : **Birinci terimi 5 ve yirmi birinci terimi 19 olan bir aritmetik dizide ilk yirmi bir terimin toplamı kaç olur ?**

Soru : **İlk terimi 2 ve ortak farkı 9 olan aritmetik bir dizinin ilk on terimin toplamı kaç olur ?**

Soru : $(a_n) = (2n + 5)$ **aritmetik dizisinin ilk otuz teriminin toplamını bulunuz.**

Soru : (a_n) aritmetik dizisinde $a_{n+1} - a_n = 3$ olup dizinin ilk on iki terim toplamı 72 ise dizinin ilk terimini bulunuz.

Soru : **İkinci terimi 6 , on ikinci terimi 56 olan bir aritmetik dizinin ilk yirmi beş teriminin toplamı kaç olur ?**

Soru : **İlk terimi 1 olan bir aritmetik dizinin; ilk on teriminin toplamı, ilk dört teriminin toplamından 123 fazladır. Buna göre bu dizinin ortak farkı kaçtır ?**

Soru : **5 ile 121 sayıları arasında 6 ile tam bölünebilen sayıların toplamı kaç olur ?**

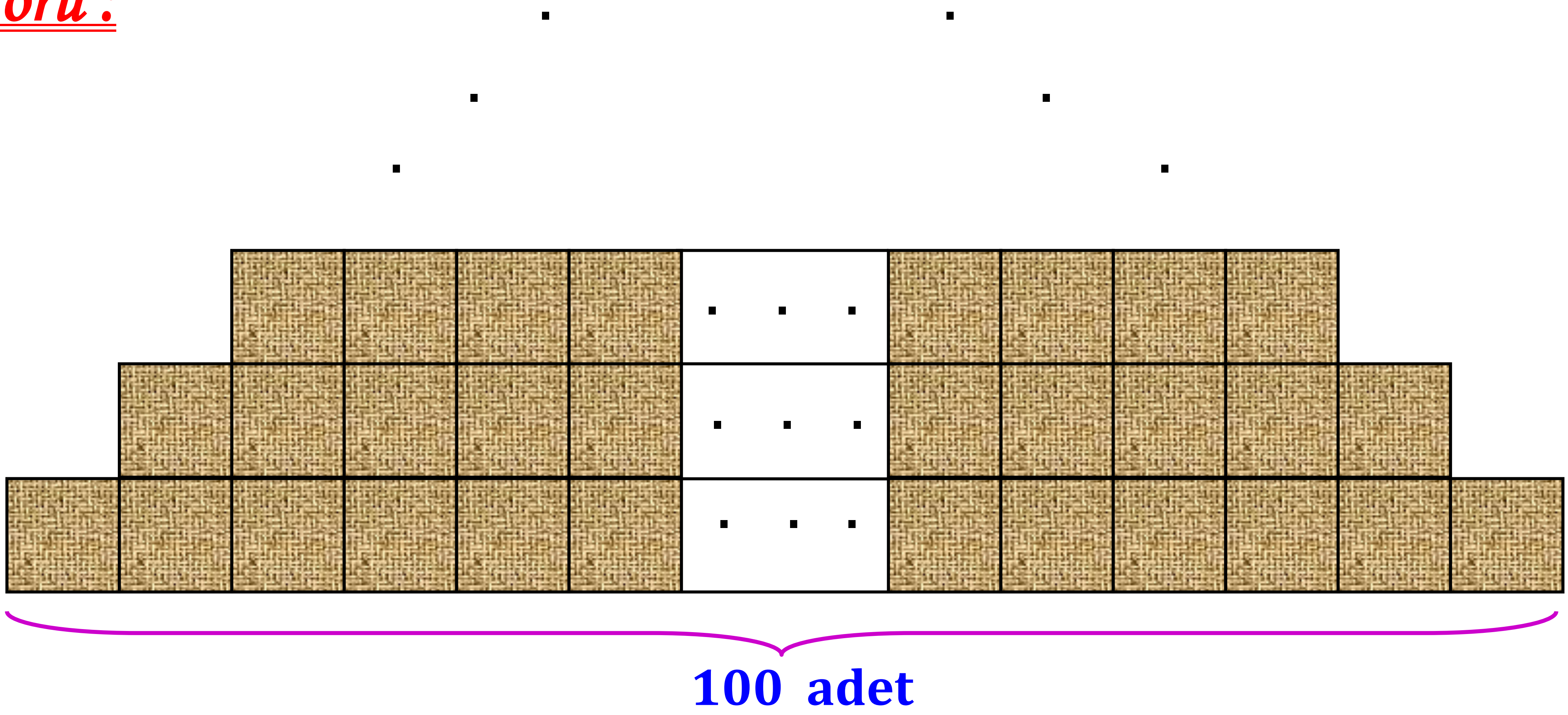
Soru : **50 ile 286 sayıları arasında 7 ile tam bölünebilen sayıların toplamı kaç olur ?**

Soru : **Bir kişinin bir ay içinde okuduğu kitabın sayfa sayısı günlük olarak tabloda verilmiştir. Sayfa sayıları ardışık olarak bir aritmetik dizi oluşturuyorsa kişi ay sonunda toplam kaç sayfa kitap okumuş olur ?**

Ayın n. Günü	1	2	3	.	.	.	30
Okuduğu Sayfa Sayısı	5	8	11	.	.	.	

Soru : Bir gösteri salonunda 18 sıranın oturma kapasitesi genel terimi 45 – 2n olan bir aritmetik dizi ile modellenmiştir. Salonda yapılacak olan bir gösteri için tüm biletler satılmış ve 11700 ₺ gelir elde edilmiştir. Buna göre kişi başı biletin fiyatı kaç ₺ olmalıdır ?

Soru :



Özdeş taşların yan yana ve üst üste konulmasıyla oluşturulacak şeklin tabanında 100 taş kullanılacaktır. Bir üste çıkıldığında yanlardan birer boşluk kalacak şekilde taş döşemeye devam edilemeyecek duruma gelene kadar döşemeye devam edilirse;

A) **Şekilde üst üste kaç sıra vardır ?**

B) **Şekli tamamlamak için kaç taş gereklidir ?**

Not : S_n terimi (a_n) aritmetik dizisinde ilk n terim toplamını veriyordu.

$S_1 = a_1$ ve

$S_2 = a_1 + a_2$ olup $S_2 - S_1 = a_1 + a_2 - a_1 = a_2$ elemanını verir.

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ olup

$S_3 - S_2 = a_1 + a_2 + a_3 - a_1 - a_2 = a_3$

$S_3 - S_1 = a_1 + a_2 + a_3 - a_1 = a_3 + a_2$ şeklinde bulunur.

Kural : $S_n - S_{n-1} = a_n$

$S_n - S_{n-2} = a_n + a_{n-1}$

$S_n - S_{n-3} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ şeklinde alınır.

. . .

Soru : **İlk n terim toplamı $S_n = n^2 - n$ olan (a_n) aritmetik dizisinde onuncu terim kaç olur ?**

Soru : **İlk n terim toplamı** $S_n = \dfrac{n \,.\, (3n - 1)}{2}$ **olan** (a_n) **aritmetik dizisinde** $a_{13} = ?$

Soru : **İlk n terim toplamı $S_n = 2n^2 + n$ olan (a_n) aritmetik dizisinde $a_{10} + a_9 = ?$**

GEOMETRİK DİZİLER

Ardışık terimleri arasındaki oranın <u>sabit</u> olduğu dizilere " geometrik dizi " adı verilir.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = r$$ **ise** (a_n)

dizisi bir geometrik dizidir. ($r \neq 0$ olmalıdır.)

r <u>sabit</u> sayısına geometrik dizinin " ortak çarpanı " adı verilir.

Örneğin ; $(a_n) = (2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots)$

dizisini inceleyelim.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = 2$$ **olduğundan**

(a_n) **dizisi geometrik bir dizidir.**

Soru : Genel terimi $a_n = 4n + 1$ olan dizi bir geometrik dizi midir ? (Dizinin elemanları sıra ile bulunur ve sayılar arasındaki oranın sabit olup olmadığına bakılır. Ya da $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ sabitini verir ise dizi geometrik dizidir.)

Soru : **Genel terimi $a_n = 5 . 3^n$ olan dizi bir geometrik dizi midir ?**

Kural : (a_n) geometrik bir dizi olsun. Dizinin ilk terimi a_1 ve ortak çarpan r olsun.

$$(a_n) = (a_1 \underbrace{,}_{.r} a_2 \underbrace{,}_{.r} a_3 \underbrace{,}_{.r} a_4 , \ldots)$$

$$. r \quad . r \quad . r \quad . \; . \; .$$

a_1

$a_2 = a_1 . r$

$a_3 = a_2 . r = a_1 . r . r = a_1 . r^2$

$a_4 = a_3 . r = a_1 . r^2 . r = a_1 . r^3$

.

.

$a_n = a_1 . r^{n-1}$ olarak alınır.

Soru : **İlk terimi 27 ve ortak çarpanı 3 olan geometrik dizinin kırkıncı terimi kaç olur ?**

Soru : **İlk terimi 5^{30} ve ortak çarpanı 4 olan geometrik dizinin;**

A) On beşinci terimi kaç olur ?

B) On beşinci terim kaç basamaklıdır ?

Soru : **İlk terimi 9 ve ortak çarpanı $\frac{1}{3}$ olan geometrik dizinin genel terimini bulunuz.**

Soru : **Bir bakteri kültüründe, uygun şartlarda bakterilerin sayısı her 30 saniyede bir ikiye katlanmaktadır. İlk durumda bakteri kültüründe 8 tane bakteri olduğuna göre 1 saat sonra bu kültürde kaç tane bakteri olacağını bulunuz.**

Soru : **İlk terimi 2 ve ortak çarpanı $\sqrt{2}$ olan geometrik dizinin kaçıncı terimi 128 olur ?**

Soru : (a_n) geometrik dizisinde $r = 2$ olup $a_4 = 8$ ise $a_9 = ?$

Soru : **18 ile 1458 arasına pozitif üç terim yerleştirilerek geometrik bir dizi elde ediliyor. Buna göre dizinin ikinci terimi kaçtır ?**

Soru : **5 , a , b , 320 , c , d sıralı sayıları bir geometrik dizi oluşturuyor. Buna göre bu elemanların toplamını bulunuz.**

Soru : **(a_n) geometrik dizisinde $a_7 \cdot a_5 = 64 \cdot a_3 \cdot a_6$ ise dizinin ortak çarpanı kaçtır ?**

Soru : (a_n) geometrik dizisinde $\dfrac{a_{13} \cdot a_6 \cdot a_{21}}{a_{10} \cdot a_{19} \cdot a_9} = 625$ ise dizinin pozitif ortak çarpanı kaçtır ?

Soru : (a_n) pozitif terimli geometrik dizisinde $a_1 = \dfrac{1}{21}$ olup $a_1 + a_3 + a_5 = 1$ ise dizinin ortak çarpanını bulunuz.

Soru : (a_n) geometrik dizisinde $a_3 + a_5 = 10$ ve $a_6 + a_8 = 80$ ise dizinin ortak çarpanını bulunuz.

Not : Bir (a_n) geometrik dizisinde a_p ve a_q terimleri verilirse $r^{q-p} = \dfrac{a_q}{a_p}$ işleminin sonucu dizinin ortak çarpanını verir.

Soru : (a_n) geometrik dizisinde $a_8 = \dfrac{1}{2}$ ve $a_{13} = 16$ ise dizinin ortak çarpanını ve ilk terimini bulunuz.

2. Yol : **Verilenler açılır ve taraf tarafa tarafa çözümden istenen bulunabilir.**

$$a_8 = \frac{1}{2} \text{ ve } a_{13} = 16$$

Soru : **(a_n) geometrik dizisinde $a_5 = 81$ ve $a_8 = 3$ ise dizinin ortak çarpanını ve ilk terimini bulunuz.**

Soru : (a_n) **geometrik dizisinde ilk n terim çarpımı A_n ile gösteriliyor.** $\dfrac{A_{10}}{A_9} = 96$ **ve** $\dfrac{A_5}{A_4} = 3$ **ise dizinin ortak çarpanını bulunuz.**

Kural : **Bir geometrik dizide bir terimin karesi, kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin çarpımına eşittir.**

Örnek 1: a_1 , a_2 , a_3 geometrik bir dizinin ilk üç terimi olsun.

$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ olarak alınır.

Örnek 2: a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 geometrik bir dizinin ilk beş terimi olsun.

$a_3^2 = a_1 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4$ olarak alınır.

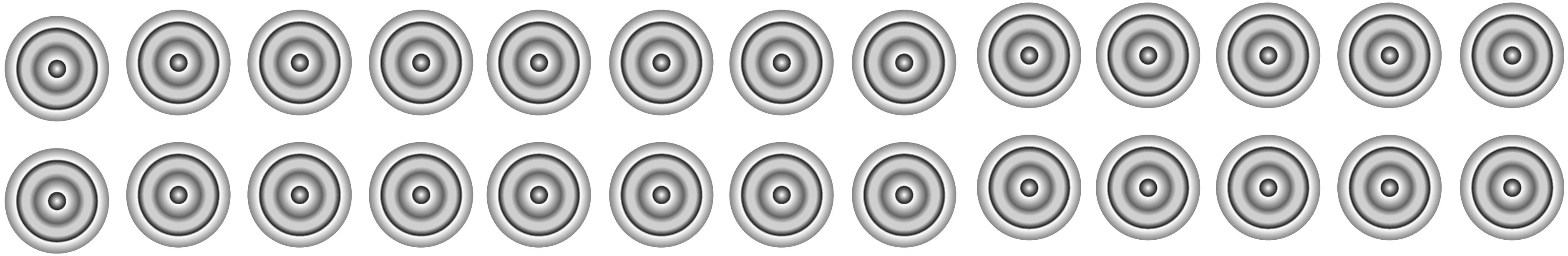
Örneğin; 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 geometrik dizisini alalım.

$16^2 = 2 \cdot 128 = 4 \cdot 64 = 8 \cdot 32$ eşitliği sağlanır.

Soru : (a_n) **geometrik dizisinde** $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 125$ **ise** $a_3 = ?$

Soru : **x , y , 4 , z , t sıralı sayıları bir geometrik dizi oluşturu-yorsa $x \cdot y \cdot z \cdot t = ?$**

Soru :



26 adet top <u>üç gruba</u> ayrılarak top sayılarının soldan sağa doğru geometrik bir dizinin ardışık üç terimi olması sağlanıyor. Buna göre bu üç grubun top sayıları sırasıyla ne olur ?

Soru : **Bir geometrik dizinin ilk üç terimi $x - 1$, $x + 1$ ve $x + 4$ ise bu sayıları bulunuz.**

Soru : $x \neq -2$ olmak üzere; $2x + 4$, $x + 2$ ve $x - 2$ üç terim bir geometrik dizinin ilk üç terimi ise bu sayıları ve dizinin ortak çarpanını bulunuz.

Soru : x , 4 ve y bir geometrik dizinin ilk üç terimidir. x , 3 ve $y - 4$ ise bir aritmetik dizinin ilk üç terimidir. Buna göre $x^2 + y^2 = ?$ ($(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğinden yararlanılır.)

Soru : a , $\sqrt{b}$ ve c bir geometrik dizinin ilk üç terimidir. $a \cdot c$, $b^2 - 6$ ve $4 \cdot a \cdot c$ ise bir aritmetik dizinin ilk üç terimidir. Buna göre b sayısı ne olmalıdır ?

Soru : **a , b ve c sayıları hem geometrik hem de aritmetik bir dizinin ilk üç terimi ise a , b ve c sayıları arasındaki ilişkiyi bulunuz.**

Not : a , b ve c sayıları hem geometrik hem de aritmetik bir dizinin ilk üç terimi ise $a = b = c$ olmalıdır.

Soru : $2x - 7$, 11 ve $5 - y$ sayıları hem geometrik hem de aritmetik bir dizinin ilk üç terimi ise $x \cdot y = ?$

Soru : $x - 2y$, 4 ve $2x + y$ sayıları hem geometrik hem de aritmetik bir dizinin ilk üç terimi ise $x + y = ?$

Kural : (a_n) bir geometrik dizi olsun. Dizinin ilk n terim toplamı S_n ile gösterilir.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= a_1 + a_1 . r + a_1 . r^2 + \ldots + a_1 . r^{n-1}$$

$$= a_1 . (1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

$$\boxed{S_n = a_1 . \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$ olarak bulunur.

Veya $$\boxed{S_n = a_1 . \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$ formülü de kullanılabilir.

Soru : **İlk terimi 7 ve ortak çarpanı 2 olan geometrik bir dizinin ilk altı teriminin toplamı kaç olur ?**

Soru : $(a_n) = \left(\frac{2}{27} , \frac{2}{9} , \frac{2}{3} , \ . \ . \ . \right)$ **geometrik dizisinde ilk yirmi beş terimin toplamı kaç olur ?**

Soru : **Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde $a_2 = 1$ ve $a_7 = 32$ ise dizinin ilk on teriminin toplamı kaç olur ?**

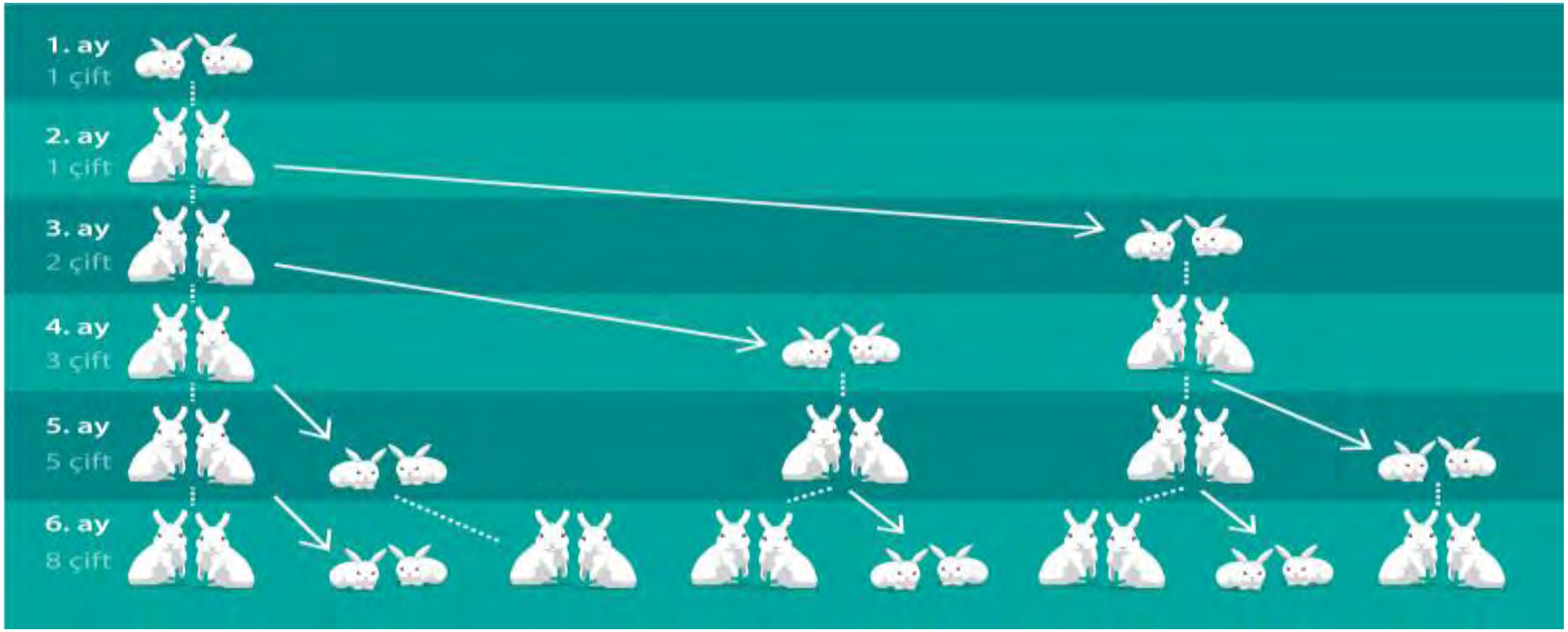
Soru : (a_n) **geometrik dizisinde ilk dört terimin toplamının, ilk iki terimin toplamına oranı 82 ise dizinin pozitif ortak çarpanını bulunuz.**

Soru : **Ali birinci ay kumbaraya 1 ₺ atarak para biriktirmeye başlıyor. Her ay sonunda önceki ay kumbaraya attığı paranın <u>iki katı</u> kadar daha para atmaktadır. Buna göre <u>yıl sonunda</u> kumbarasında kaç ₺ para bulunacaktır ?**

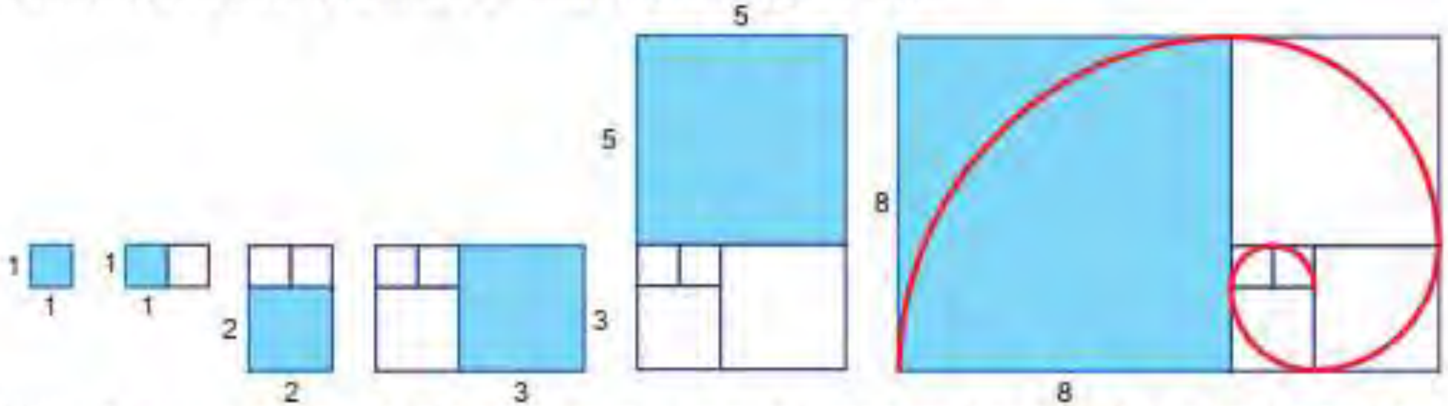
Fibonacci Dizisi

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarından birisinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğu iddia edilen bir problem sunar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğinde tavşanlar doğduklarından itibaren ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre Fibonacci'nin arkadaşı üretime bir çift tavşanla başlarsa kaç ay sonra kaç çift tavşanı olur?

Birinci ve ikinci aylarda birer çift tav-şanı vardı. Demek ki üçüncü ay iki çift tav-şanı olacaktır. İkinci aydaki bir çift ile üçüncü aydaki iki çift toplanırsa dördüncü aydaki üç çift bulunur.Böylece her ay daha önceki iki aydaki tavşan çiftlerinin sayısı toplanırsa o ay kaç çift tavşan olacağı bulunur.



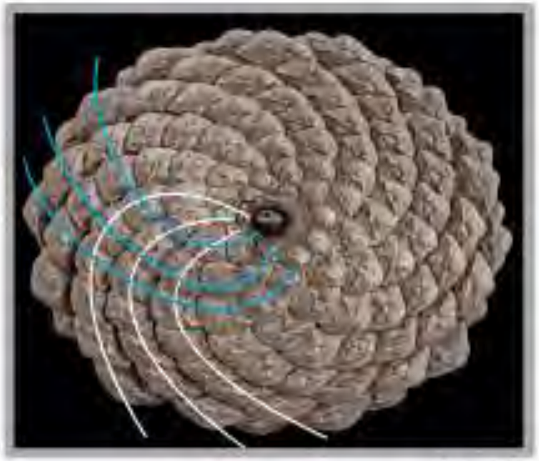
Fibonacci Dizisi ve Altın Oranın Görüldüğü Yerler



Yukarıda kenar uzunluğu 1 birim olan kareye sırasıyla kenar uzunlukları 1, 2, 3, 5 ve 8 birim olan kareler şekildeki gibi birleştiriliyor. Her yeni karenin köşelerini merkez kabul eden çeyrek çemberler çizilerek son şekildeki spiral elde edilmiştir. Tüm karelerin kenar uzunlukları Fibonacci dizisinin terimleridir. Şekilde oluşan spirale de **Fibonacci spirali** denir. Bu işlemlere devam edildiğinde oluşan dikdörtgenlerin uzun kenarının kısa kenarına oranı, altın orana (1,618) yaklaşır.

Görsel 2.3

Ayçiçek taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki ayçiçeğinde mavi yönlü spirallerin sayısı 55 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 34 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.



Görsel 2.4

Çam kozalağın taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki kozalakta mavi yönlü spirallerin sayısı 21 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 13 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.

İlk terimi 1 ve bundan sonraki her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak yazılan diziye " Fibonacci dizisi " adı verilir. (F_n) ile gösterilir.

$$(F_n) = (1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , . . .)$$ şeklinde olur.

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

. . .

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak bulunur. ($n > 2$ olmalıdır.)

Soru : **Fibonacci dizisinin; <u>en büyük iki basamaklı</u> sayısı A , <u>en küçük üç basamaklı</u> sayısı B , <u>iki basamaklı ve 11 ’in katı</u> olan sayısı da C ise A + B + C = ?**

Soru : (F_n) **Fibonacci dizisinde** $\sqrt{F_{12}} = a$, $a + F_7 = b$ **ise** $b - 2a + 1$ **işleminin sonucu dizinin kaçıncı terimini verir ?**

Soru : **Küçükten büyüğe ardışık üç terimi sırasıyla $5x$, $x + 78$ ve $11x + 23$ olan Fibonacci dizisinde $x + 2$ dizinin kaçıncı terimidir ?**

Soru : (F_n) **Fibonacci dizisinde** $F_{16} = 987$ **ve** $F_{18} = 2584$ **ise** $F_{19} = ?$

Soru : (F_n) **Fibonacci dizisinde** $F_{55} = x$ **ve** $F_{57} = y$ **ise** F_{54}**'ün sonucunu** x **ve** y **türünden bulunuz.**

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 3. TRİGONOMETRİ

12. 3. 1. Toplam – Fark ve İki kat Açı Formülleri

12. 3. 1. 1. İki açının ölçüleri toplamının ve farkının trigonometrik değerlerine ait formülleri oluşturarak işlemler yapar.

Dönüşüm ve ters dönüşüm formülleri verilmez.

12. 3. 1. 2. İki kat açı formüllerini oluşturarak işlemler yapar.

3. ÜNİTE : TRİGONOMETRİ

Toplam – Fark Formülleri

Kural 1: **Sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonlarının toplam ve fark formül açılımları aşağıdaki gibidir.**

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$ olarak alınır.

Trigonometrik değeri bilinmeyen bir açının sinüs veya kosinüsünü bulmak için, trigonometrik değerleri bilinen iki açı ölçüsünden faydalanırız.

Hatırlatma : ***A)*** **Bilinen açı değerlerinin trigonometrik sonuçları soru çözümlerinde kullanılır.**

x	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız
cot x	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

B) **Bazı büyük açıların dar açı türünden yazılması gerekmektedir.**

180° ve 360°'ye göre düzenlemelerde trigonometrik fonksiyonlar isim değiştirmezdi. Açının bulunduğu bölgeye göre işaret kontrolü yapılır ve sonuca eklenirdi.

Örneğin; $\tan \underbrace{212^\circ}_{3.\text{Bölge}} = \tan(180^\circ + 22^\circ) = +\tan 22^\circ$ **bulunur.**

90° ve 270°'ye göre düzenlemelerde ise trigonometrik fonksiyonlar isim değiştirirdi. Açının bulunduğu bölgeye göre işaret kontrolü yapılır ve sonuca eklenirdi.

Örneğin; $\cos \underbrace{140^\circ}_{2.\text{Bölge}} = \cos(90^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$ **bulunur.**

C) **Çok büyük açılarda ise esas ölçü bulunarak işleme devam edilir.**

Soru : **$\cos 75^{\circ}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **sin 105° ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **sin 255° ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : **$\cos 7575^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.**

Soru : $\cos 108^\circ . \cos 18^\circ + \sin 108^\circ . \sin 18^\circ = ?$

Soru : $\sin 17^\circ . \cos 13^\circ + \sin 13^\circ . \cos 17^\circ = ?$

Soru : $\cos 15^\circ . \sin 105^\circ + \cos 105^\circ . \sin 15^\circ = ?$

Soru :

$$\frac{\cos 80^\circ .\ \cos 40^\circ - \sin 80^\circ .\ \sin 40^\circ}{\sin 21^\circ .\ \cos 24^\circ + \sin 24^\circ .\ \cos 21^\circ} = ?$$

Soru :

$$\frac{\sin 62^\circ . \sin 16^\circ + \cos 62^\circ . \cos 16^\circ}{\sin 75^\circ . \cos 31^\circ - \sin 31^\circ . \cos 75^\circ} = ?$$

Soru : $x \in (0°, 45°)$ olsun.

$$\cos\left(\frac{11\pi}{18} + x\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{18} + x\right).\sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

$= ?$

Soru : $x = \dfrac{\pi}{12}$ ise

$\sin(13x) . \cos(5x) - \sin(5x) . \cos(13x) = ?$

Soru : $x - y = 60^\circ$ ise

$(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = ?$

(Parantezleri açmak yerine x ve y yerine hem denklemi sağlaya-cak hem de trigonometrik değeri bilinen açılar alabiliriz.)

Soru : $\dfrac{\tan 60^\circ \, . \, \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = ?$ **(Bilinen açıların tri-gonometrik değerlerini yerine yazsak bir sonuç elde edemeyiz. Bu tarz sorularda toplam ya da farkın olduğu yerdeki tanjant yerine sin / cos alınır ve düzenleme yapılır.)**

Soru : $a, b \in (0°, 90°)$ olmak üzere $\sin a = \dfrac{3}{5}$ ve $\sin b = \dfrac{2}{3}$ ise $\sin(a+b) = ?$ **(Verilen trigonometrik değerleri ayrı dik üçgenlerde uygulamak işimizi kolaylaştırır.)**

Soru : a , b $\in$ (0 , π / 2) olmak üzere sin a = $\frac{4}{5}$ ve cos b = $\frac{5}{13}$ ise; **A)** cos (a − b) = ?

$a\ ,\ b \in (\ 0\ ,\ \pi / 2\ )$ olmak üzere $\sin a = \dfrac{4}{5}$ ve $\cos b = \dfrac{5}{13}$ ise;

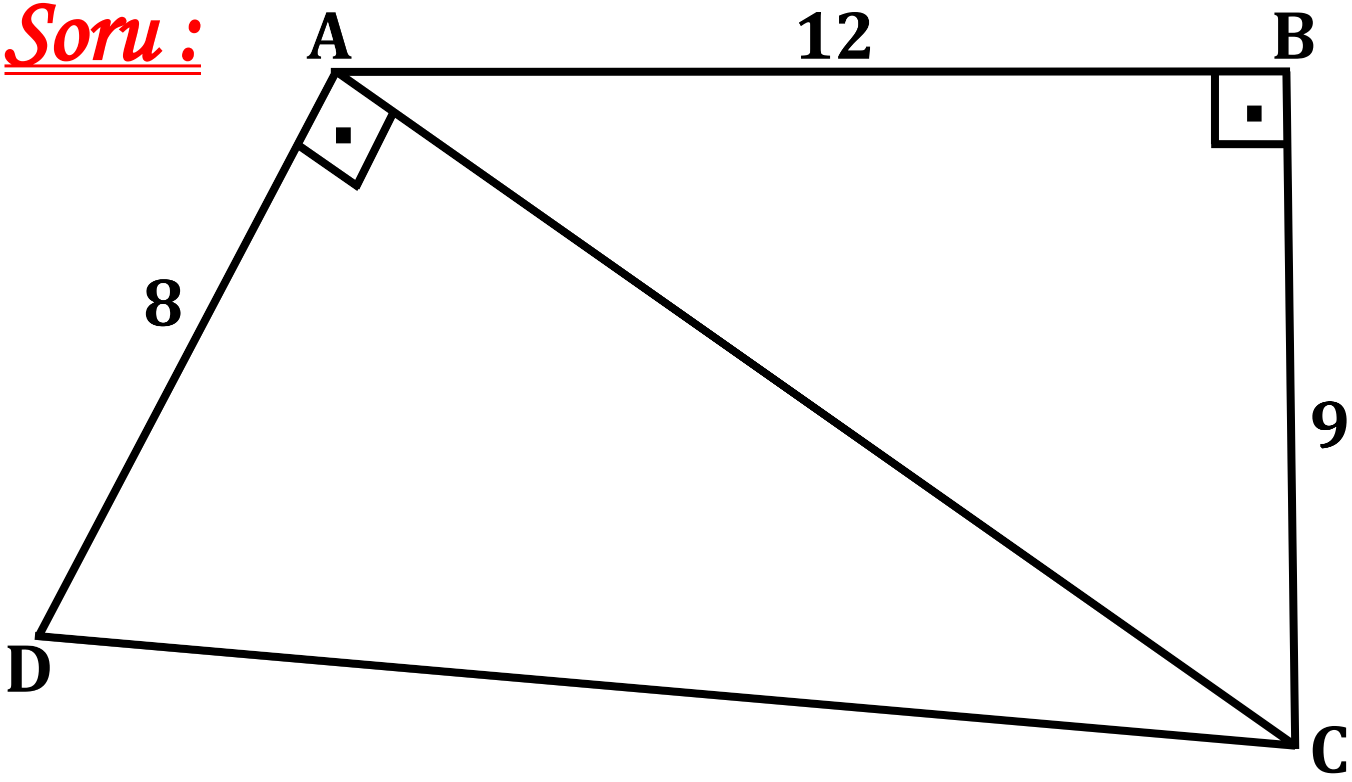
B) **$a\ ,\ b$ ve c bir üçgenin iç açıları ise $\cos c = \ ?$**

Soru : $\cos\left(\arccos\frac{2}{3} + \arctan 0{,}6 \right) = ?$

(Hatırlatma : $\arcsin x = a$ ise $\sin a = x$ idi. **)**

Soru : $\sin(\arctan 0{,}75 + 30^\circ) = ?$

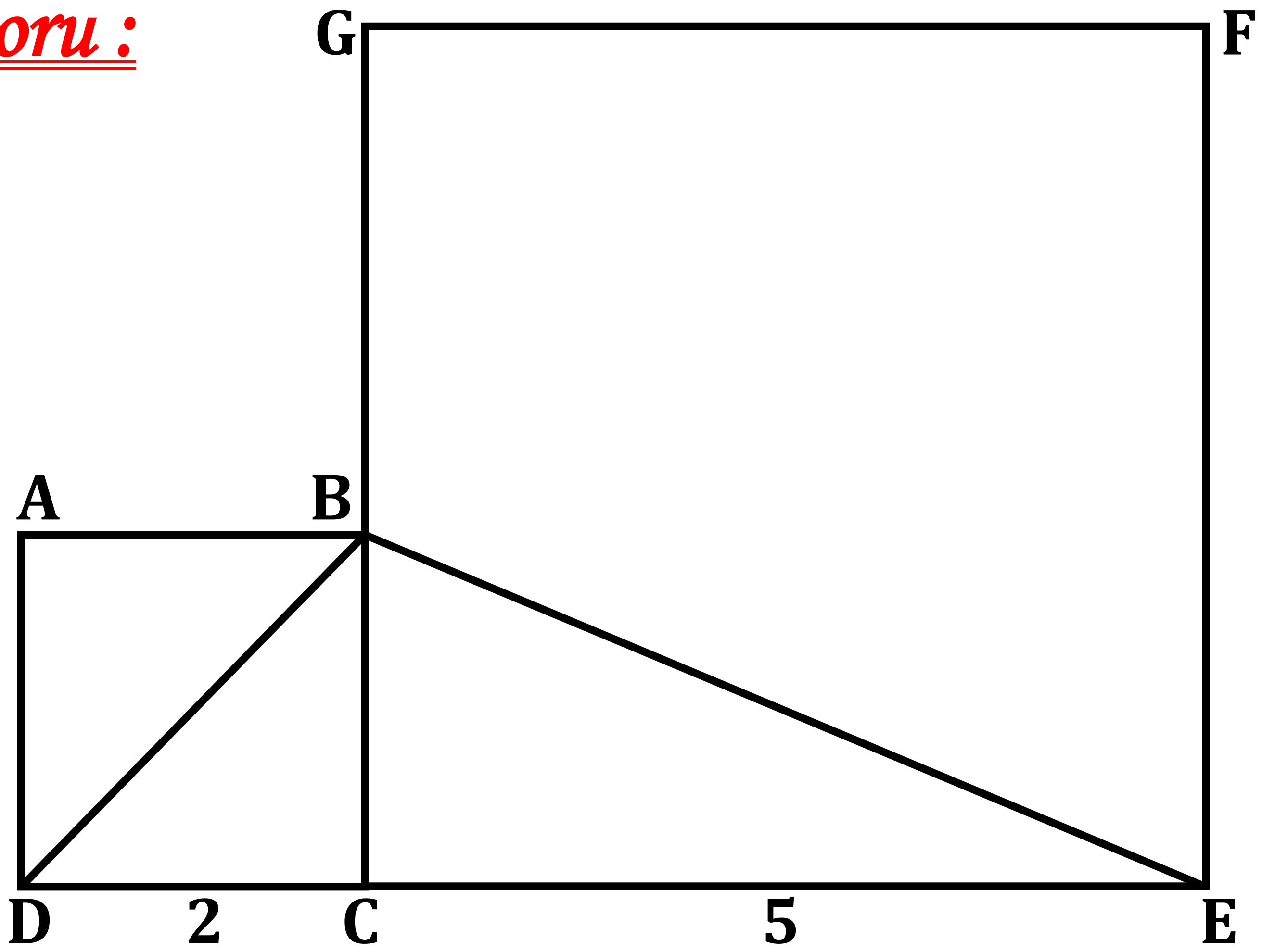
Soru :



$\cos(\widehat{BCD}) = ?$

(İstenen açıyı iki açının toplamı türünden yazarız.)

Soru :

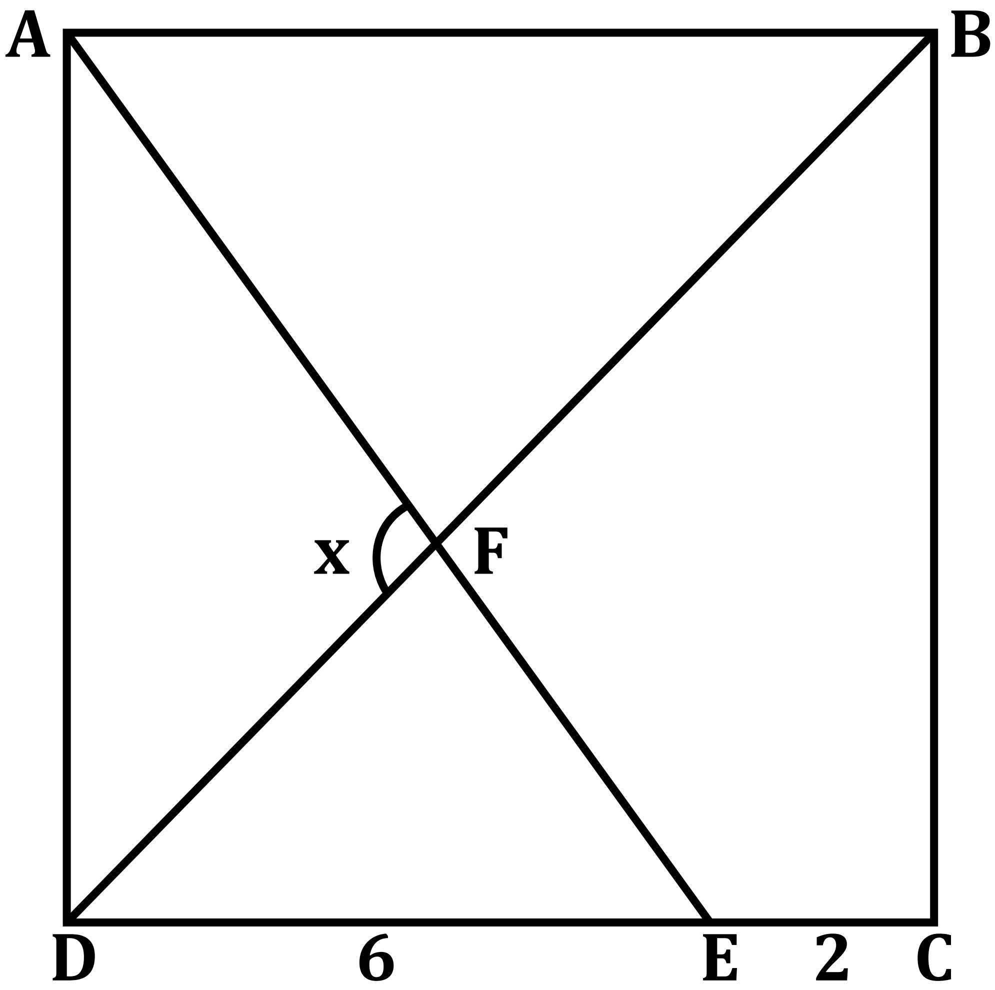


ABCD ve CEFG birer karedir. Buna göre

$\sin(\widehat{DBE}) = ?$

Soru :

ABCD bir kare ise sin x = ?

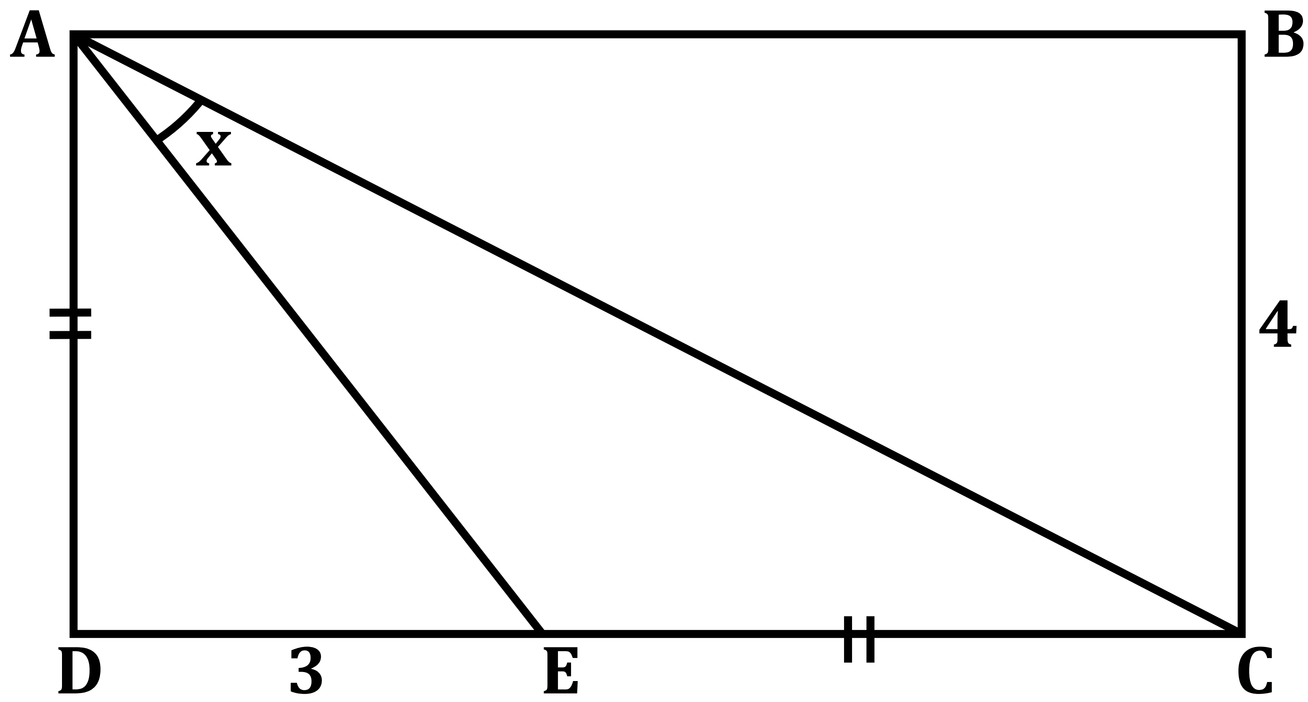


(İki iç açının toplamı komşu dış açıyı verir özelliğinden yararlanmak çözümü kolaylaştırır.)

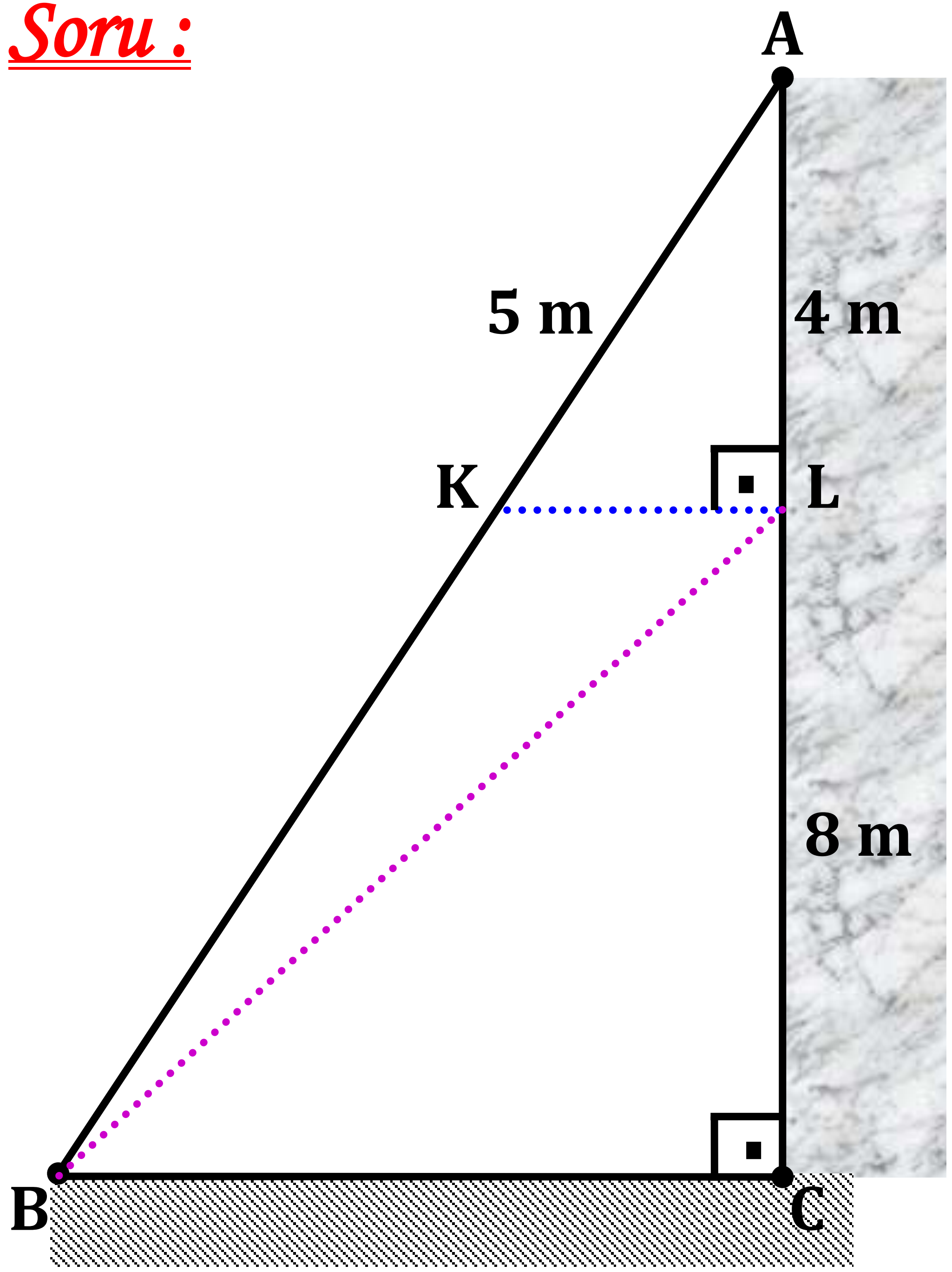
Soru :

ABCD bir dikdörtgen

ise $\cos x = ?$



Soru :



A noktasında dik duvara dayanan merdiven şekildeki gibi verilmiştir. Buna göre sin ($\widehat{KBL}$) = ?

Kural 2: **Tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarının toplam ve fark formül açılımları aşağıdaki gibidir.**

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a.\cot b-1}{\cot a+\cot b}$$

$$\cot(a-b)=\frac{\cot a.\cot b+1}{\cot b-\cot a}$$

olarak alınır.

Not : $\tan\alpha=\dfrac{x}{y}$ **ise** $\cot\alpha=\dfrac{y}{x}$ **idi. Kotanjant yerine tanjantın formülü uygulanabilir ve ezber olayını azaltabiliriz.**

Soru : $\tan 15^{\circ} = ?$

Soru : $\tan 105^\circ = ?$

Soru : $\cot 195^\circ = \ ?$

Soru : $x = \dfrac{5\pi}{16}$ ise $\dfrac{\tan(5x) - \tan x}{1 + \tan(5x) \cdot \tan x} = ?$

Soru : $\tan x = \dfrac{3}{5}$ ve $\tan y = \dfrac{4}{7}$ ise $\tan(x - y) = ?$

Soru : $\tan(x + 45^\circ) = \dfrac{1}{3}$ ise $\tan x = ?$

Soru : $\tan(x - y) = \dfrac{2}{3}$ ve $\tan y = \dfrac{3}{4}$ ise $\tan x = ?$

Soru : $\cot(x+y) = -\dfrac{2}{5}$ ve $\cot x = \dfrac{3}{5}$ ise $\cot y = ?$

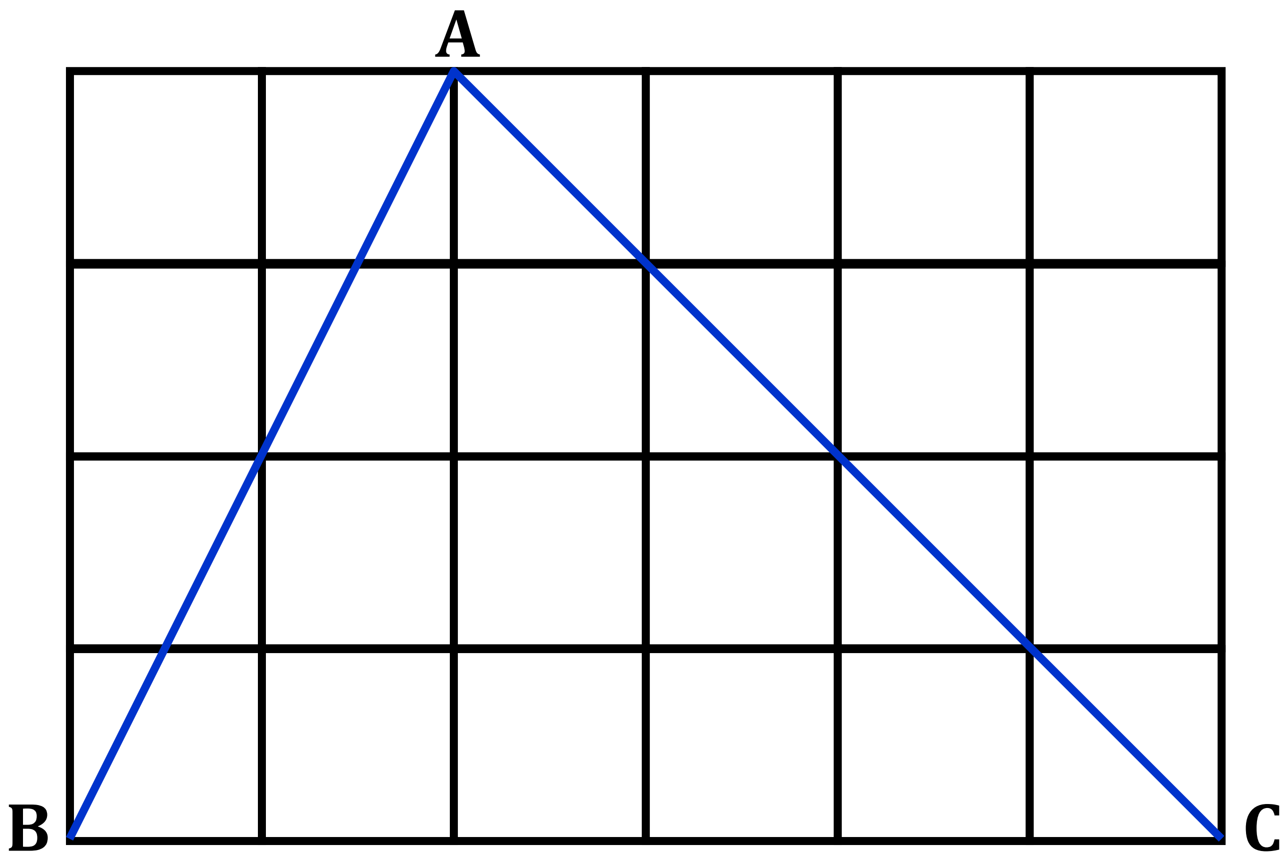
Soru : $x , y \in (0 , \pi / 2)$ olmak üzere $\cos x = \dfrac{3}{5}$ ve $\sin y = \dfrac{8}{17}$ ise $\tan (x - y) = ?$

Soru : **Bir ABC üçgeninde** $\sin \widehat{A} = 0{,}8$ **ve** $\cos \widehat{B} = \dfrac{5}{13}$ **ise** $\tan \widehat{C} = ?$

Soru : $\cot\left(\arcsin\dfrac{12}{13} + \arctan\dfrac{5}{2}\right) = ?$

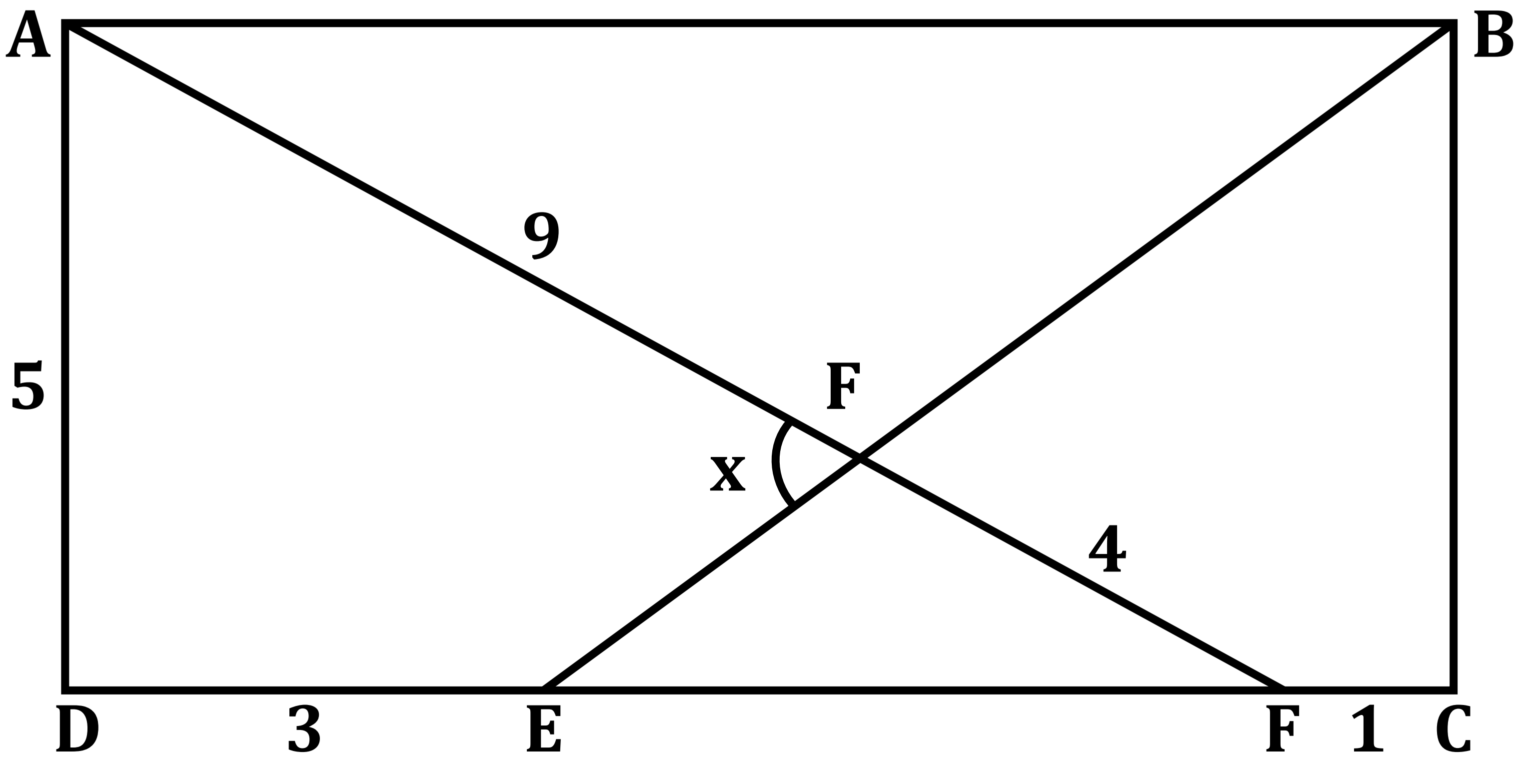
Soru :

Birim karelerden oluşan şekilde $\tan(\widehat{BAC}) = ?$

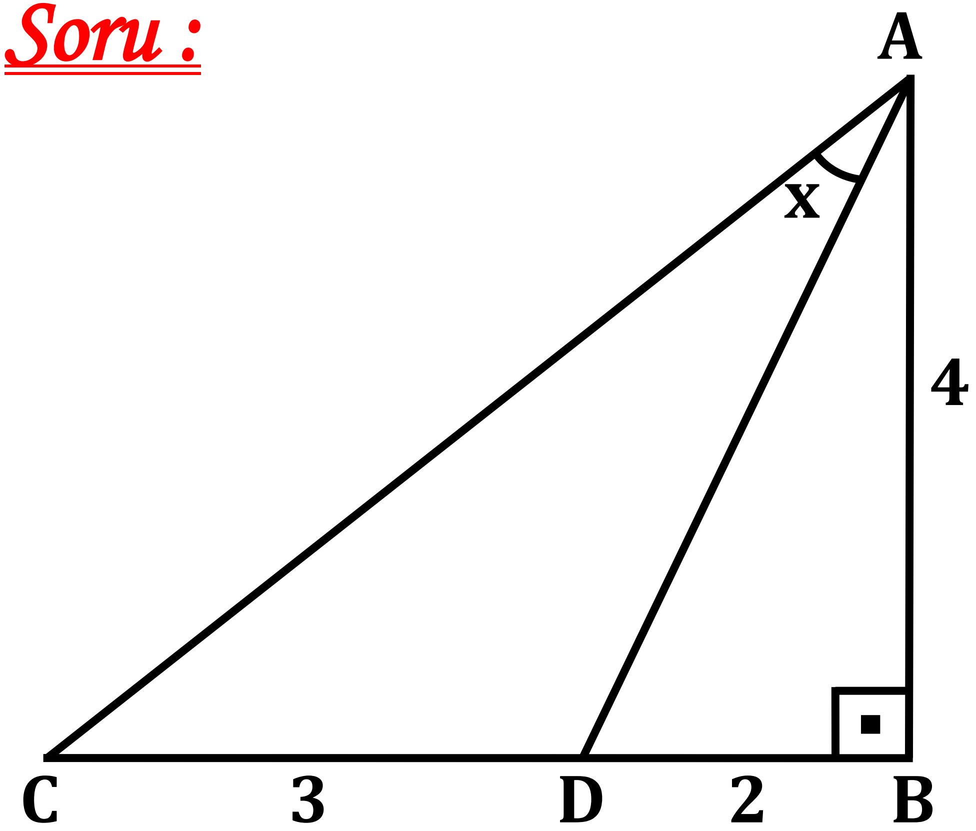


Soru :

ABCD dikdörtgen ise tan x = ?



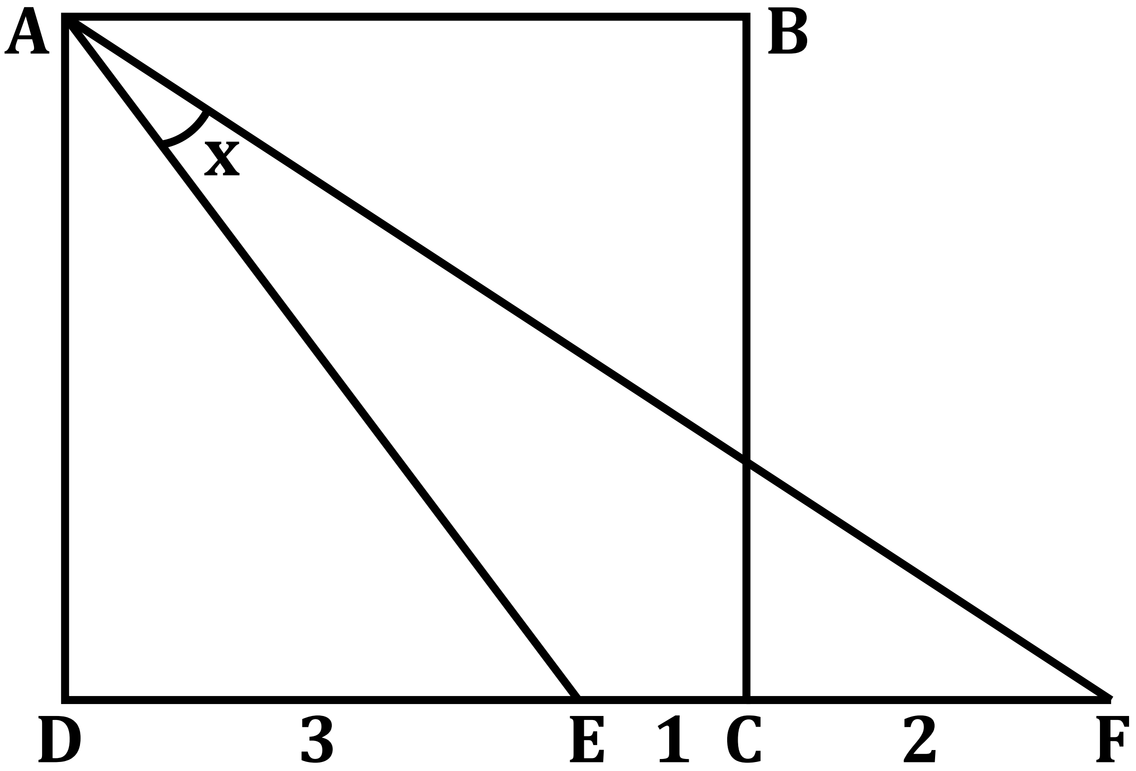
Soru :



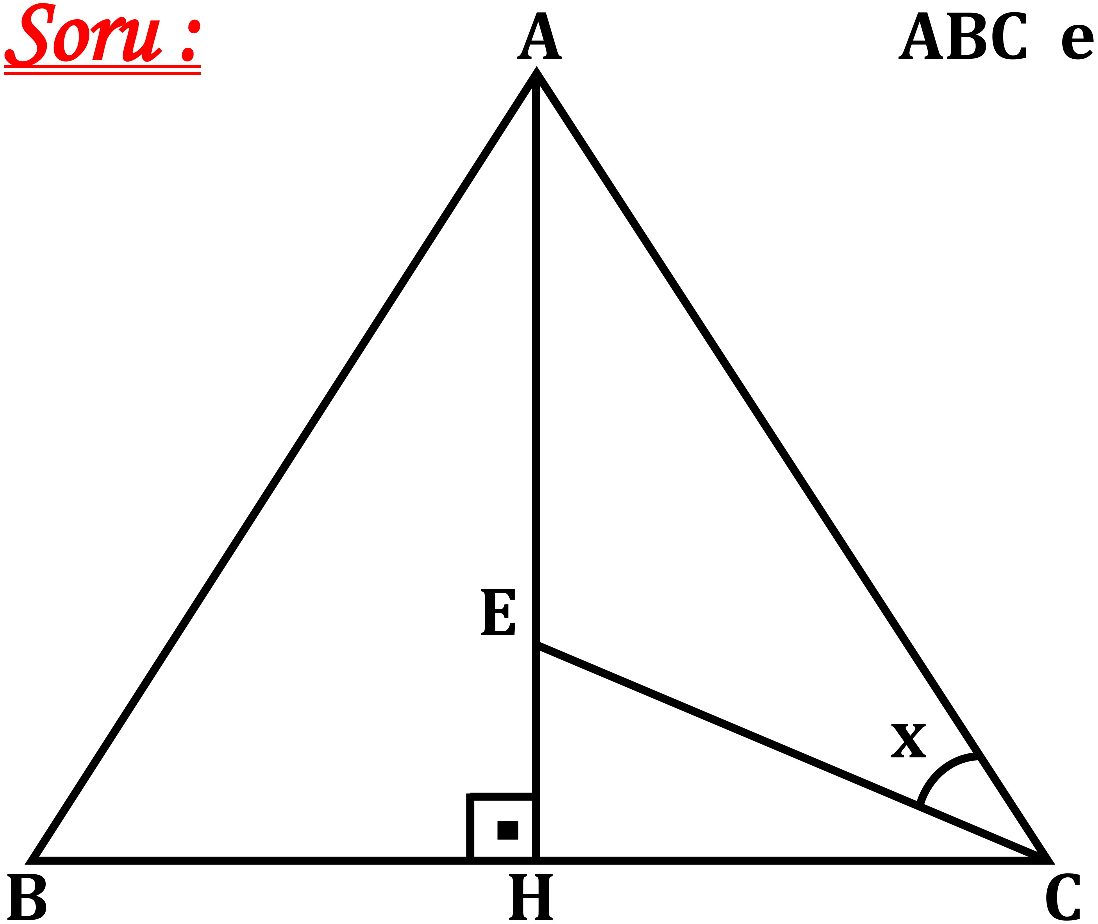
$\tan x = ?$

Soru :

ABCD bir kare ise $\cot x = ?$



Soru :



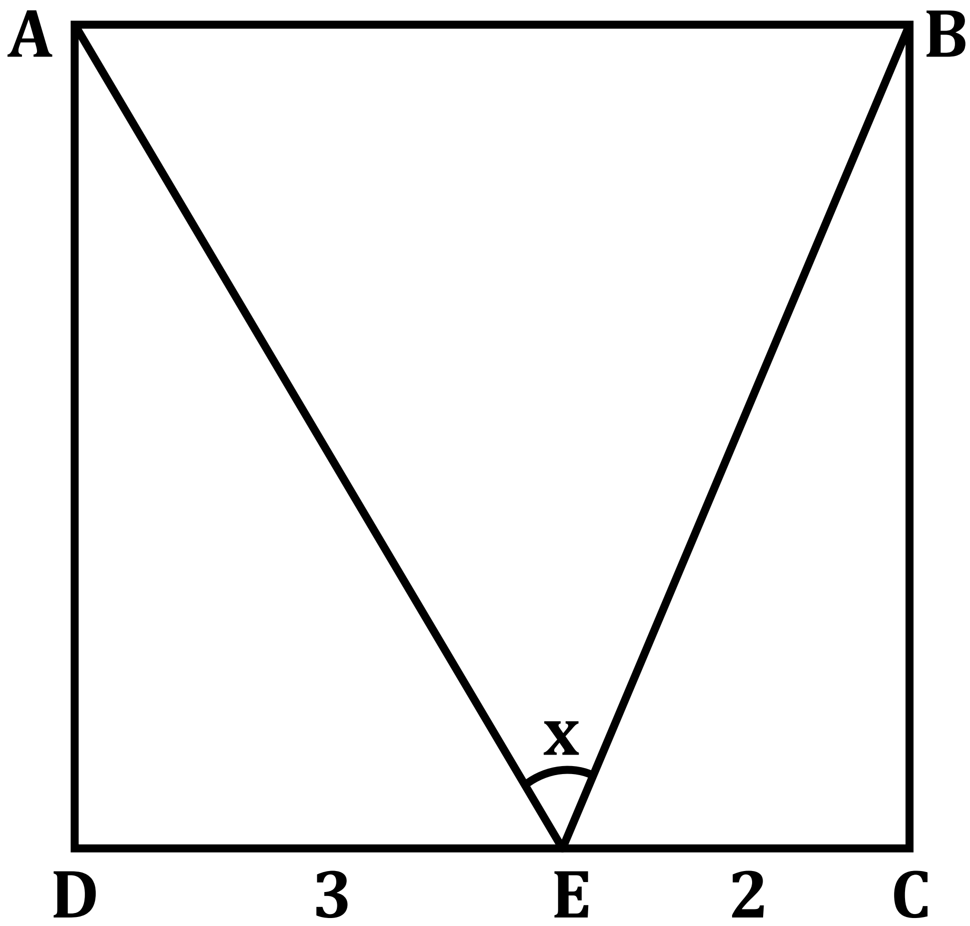
ABC eşkenar üçgen ve | AE | = 2 . | EH |

ise cot x = ?

Soru : **Kenar uzunlukları $|AB| = 13$, $|AC| = 13$ ve $|BC| = 10$ br olan ABC üçgeninde A noktasından $[BC]$ tabanına H noktasında bir dik indiriliyor. $[HC]$ tabanında bir D noktası seçiliyor. $|HD| = 2$ br ise $\tan(\widehat{DAC}) = ?$**

Soru :

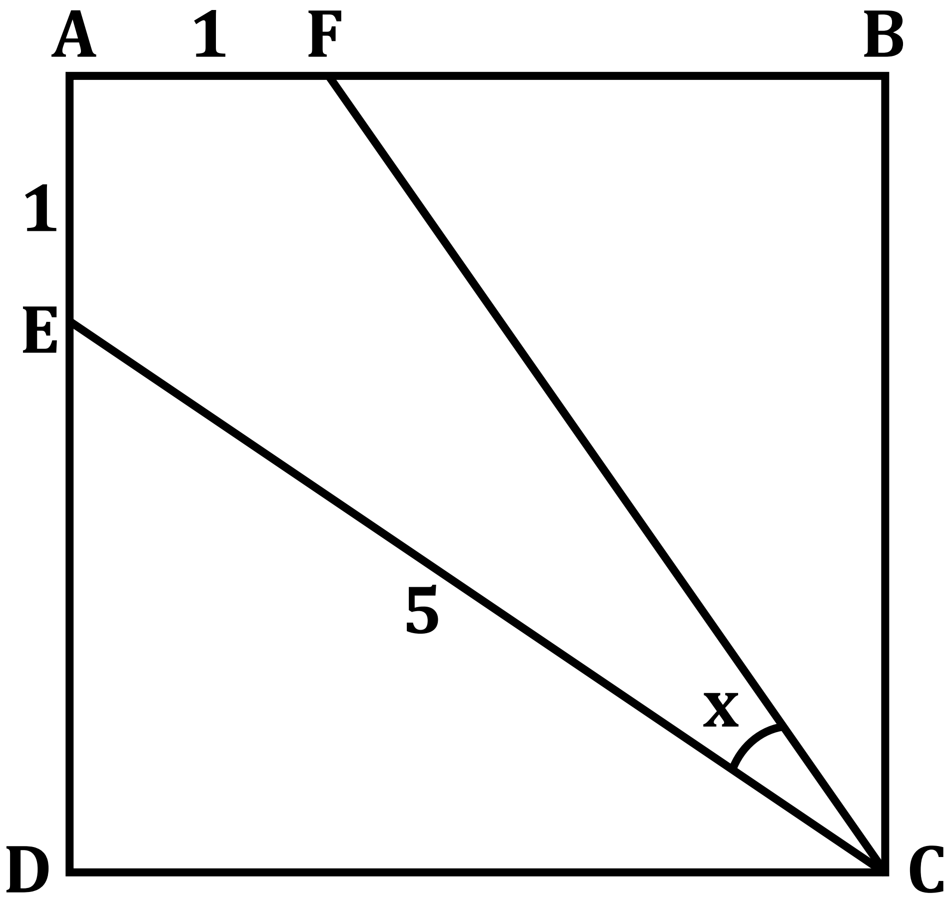
ABCD bir kare ise tan x = ?



(Açının iki yan komşusu düşünülerek işleme başlanır.)

Soru :

ABCD bir kare ise cot x = ?



İki Kat Formülleri

Kural 1: $\sin(2x) = \sin(x + x)$

$$= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ olarak bulunur.

$\sin x \cdot \cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2}$ olarak yazılabilir.

$\sin(4x) = 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)$

$\sin(6x) = 2 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(3x)$

.

.

. olarak açılır.

Soru : $$\frac{6 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = ?$$

Soru : $\sin(2x) \cdot \cot x \cdot \sec x = ?$

Soru :

$$\frac{\sin(4x)}{\cot x \,.\, \cos(2x)} = ?$$

Soru :

$$\frac{2}{\sin(2x)\,.\,(1+\tan^2 x)} = ?$$

Soru : $\sin\frac{\pi}{12} \,.\, \cos\frac{\pi}{12} = \,?$

Soru : $4 \, . \, \sin 22{,}5^\circ \, . \, \cos 22{,}5^\circ = \, ?$

Soru : $$24 \cdot \sin\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = ?$$

Soru : $\cos 70^\circ = k$ ise $12 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$ işleminin sonucunu k türünden bulunuz.

Soru : **$\sin 80^\circ = k$ ise $\sin 20^\circ . \sin 70^\circ . \cos 40^\circ$ işleminin sonucunu k türünden bulunuz.**

Soru : $$\frac{\sin 42^\circ}{\sin 14^\circ} - \frac{\cos 42^\circ}{\cos 14^\circ} = ?$$

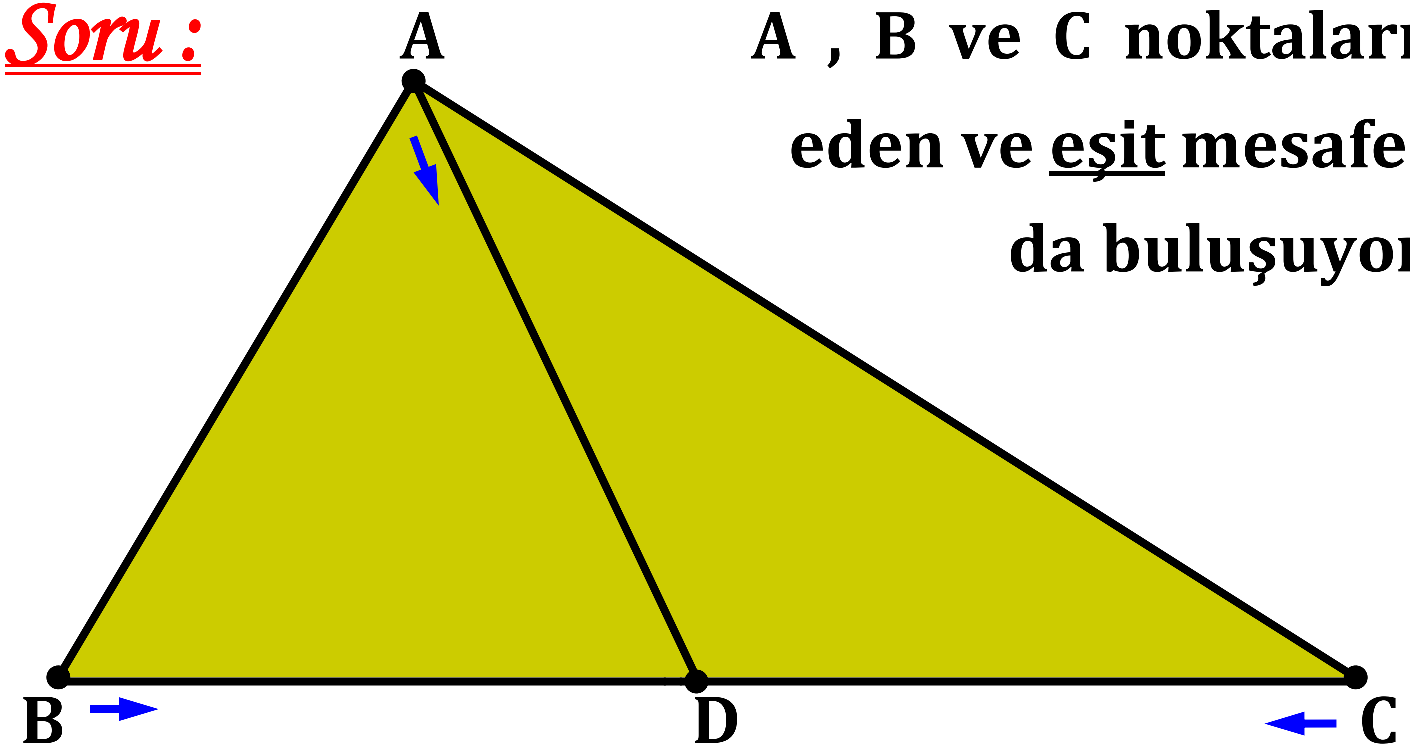
Soru :

$$\frac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = ?$$

Soru : $\left(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ \right)^4 = ?$ **(Önce grubun karesini alınarak işleme başlanır.)**

Soru : $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{3}$ ise $\sin(2x) = ?$

Soru :



A , B ve C noktalarından aynı anda hareket eden ve eşit mesafe giden üç araç D noktada buluşuyor. B , D , C doğrusaldır. $4 . |AB| = 3 . |AC|$ ise $\sin(2\widehat{B}) = ?$

Kural 2: $\cos(2x) = \cos(x + x)$

$= \cos x \,.\, \cos x - \sin x \,.\, \sin x$

- $\cos(2x) = \underbrace{\cos^2 x} - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$

- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

veya

$\cos(2x) = \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}$

$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$

- $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ olarak alınır. Soru

çözümlerinde uygun olan açılım seçilir.

Soru : $\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ = ?$

Soru : $2\sin^2\dfrac{\pi}{12} - 1 = ?$

Soru : $$\frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} = ?$$

Soru : $$\frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} + \frac{\sin(2x)}{2\cos^2 x} = ?$$

Soru : $$\frac{\cot^2 x - 1}{\cos(2x)} \cdot (\operatorname{cosec} x)^{-1} = ?$$

Soru : $x \in (180^\circ, 270^\circ)$ olsun. $\sqrt{1 - \cos(2x)} = ?$

Soru : $x \in \left(3\pi / 2 \ , \ 2\pi \right)$ olsun. $\sqrt{8\cos\left(\ 2x\ \right) + \ 8} \ = \ ?$

Soru : $\sqrt{\dfrac{-\cos 66^\circ + 1}{2}} = ?$

Soru : $\sin 50^\circ = k$ ise $\sin 10^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru : $\cos 80^\circ = \dfrac{1}{k}$ ise $\sin 70^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru : $\sin 164^\circ = \dfrac{k}{3}$ ise $\sin 418^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

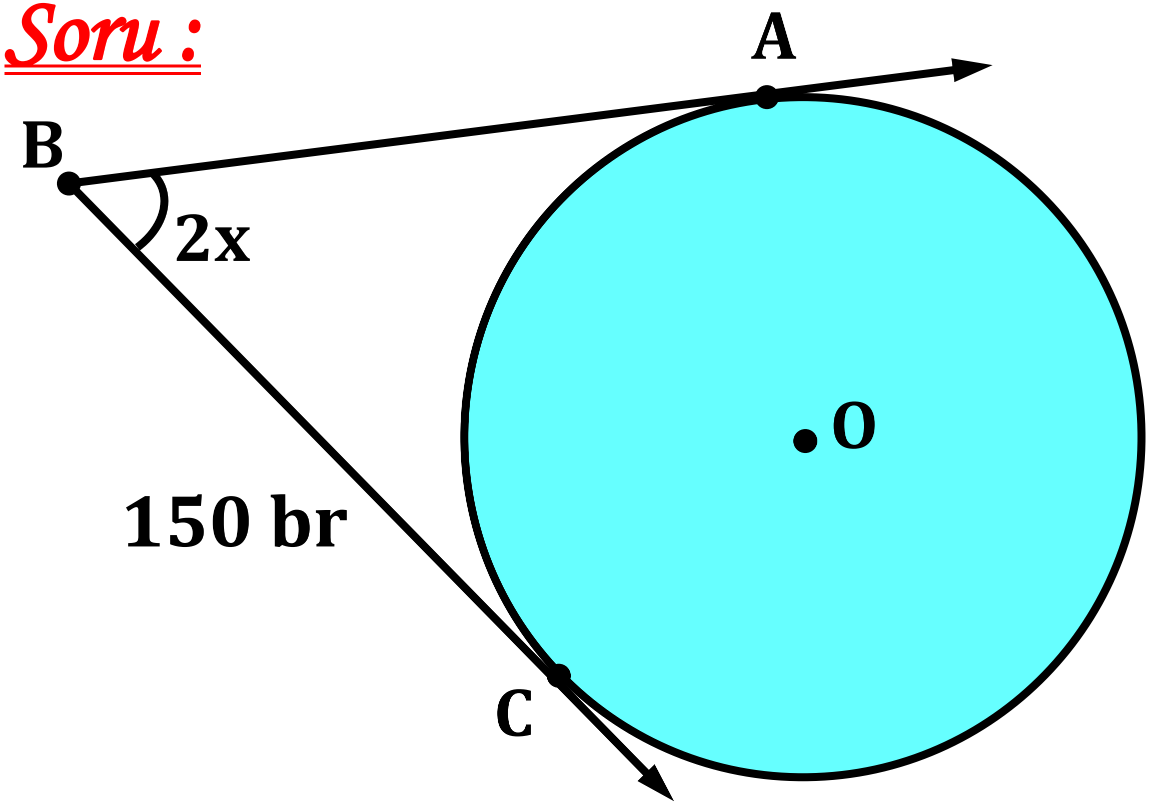
Soru : $\sin 50^\circ = \dfrac{6}{k}$ ise $\cos 20^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru : $\sin 40^\circ = \dfrac{k}{8}$ ise $\sin 155^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru : $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ ve $\cos x = \dfrac{3}{5}$ ise $\cos(2x) = ?$

Soru : $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ ve $\tan x = \dfrac{2}{5}$ ise $\cos(2x) = ?$

Soru :



O merkezli daire şeklindeki bir pistin alanı 6400π br^2 ise $\cos(2x) = ?$ (A ve C çembere teğet noktalardır.)

Soru : $\sin 22{,}5^\circ = ?$

Kural 3:

- $\tan(2x) = \tan(x + x) = \dfrac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \,.\, \tan x}$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$ olarak bulunur.

- $\cot(2x) = \cot(x + x) = \dfrac{\cot x \,.\, \cot x - 1}{\cot x + \cot x}$

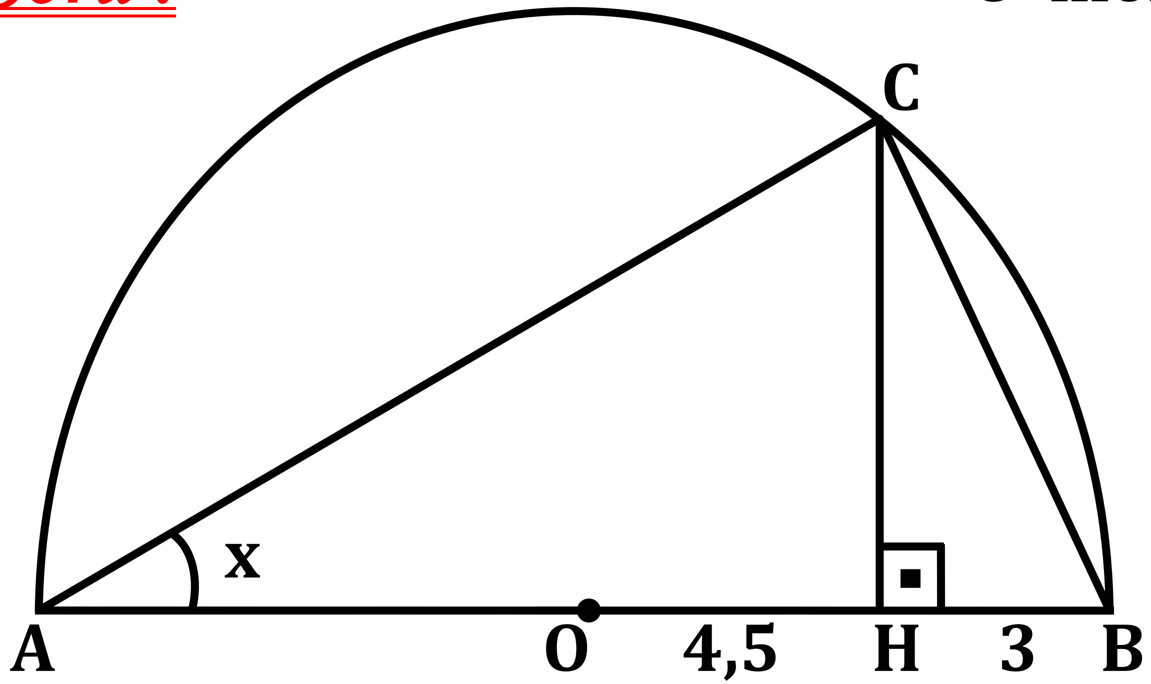
$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$ olarak bulunur.

Soru : $\tan x = \dfrac{2}{3}$ ise $\cot(2x) = ?$

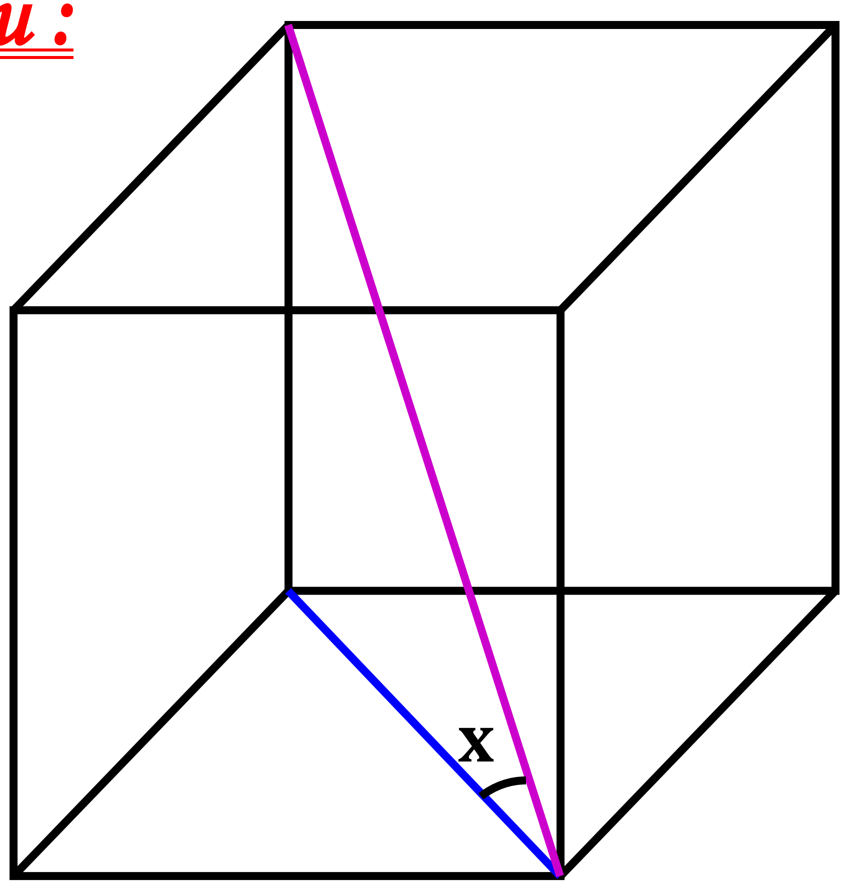
Soru : $\sin x = \dfrac{5}{13}$ ise $\tan(2x) = ?$

Soru :

O merkezli çemberde $\cot(2x) = ?$



Soru :



Taban alanı 32 br^2 olan küpte

tan (2x) = ?

Soru : $3\sin x - 4\cos x = 0$ ise $\tan(2x) = ?$

Soru :

$$\frac{\sin x - 2\cos x}{\cos x - 2\sin x} = 2 \quad \text{ise} \quad \cot(2x) = ?$$

Soru :

$$\frac{2\sin(2x)}{\cos^4 x - \sin^4 x + \cos(2x)} = \frac{3}{4} \text{ ise } \tan x = ?$$

Soru : $x \in \left(0, \pi/2\right)$ olsun. $\tan(2x) = \dfrac{4}{3}$ ise $\tan x = ?$

Soru : $\tan\frac{\pi}{8} = ?$

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 3. 2. Trigonometrik Denklemler

Terimler ve Kavramlar: **Trigonometrik denklem**

12. 3. 2. 1. **Trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulur.**

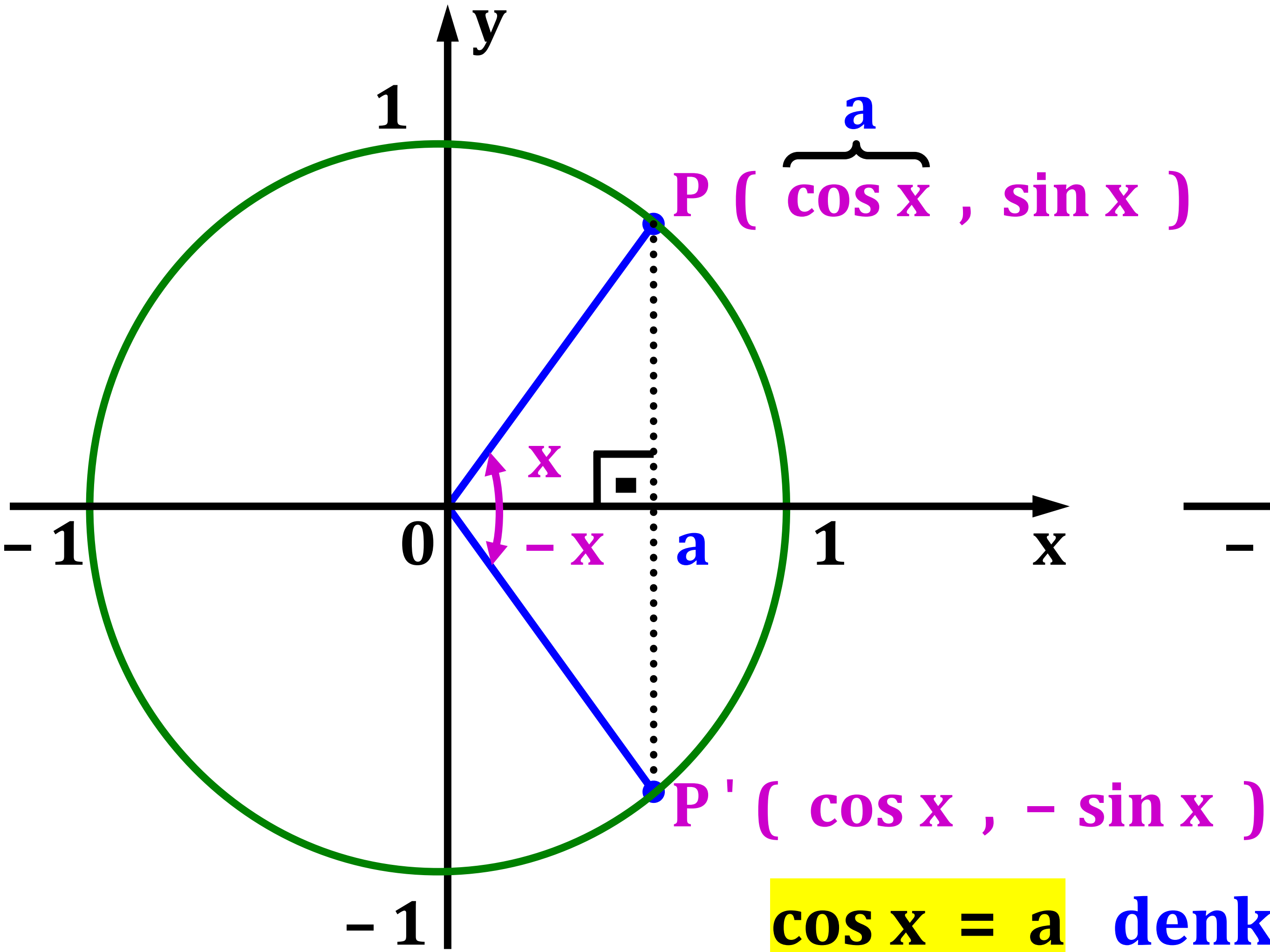
a) **a , b ve c ∈ ℝ olmak üzere**

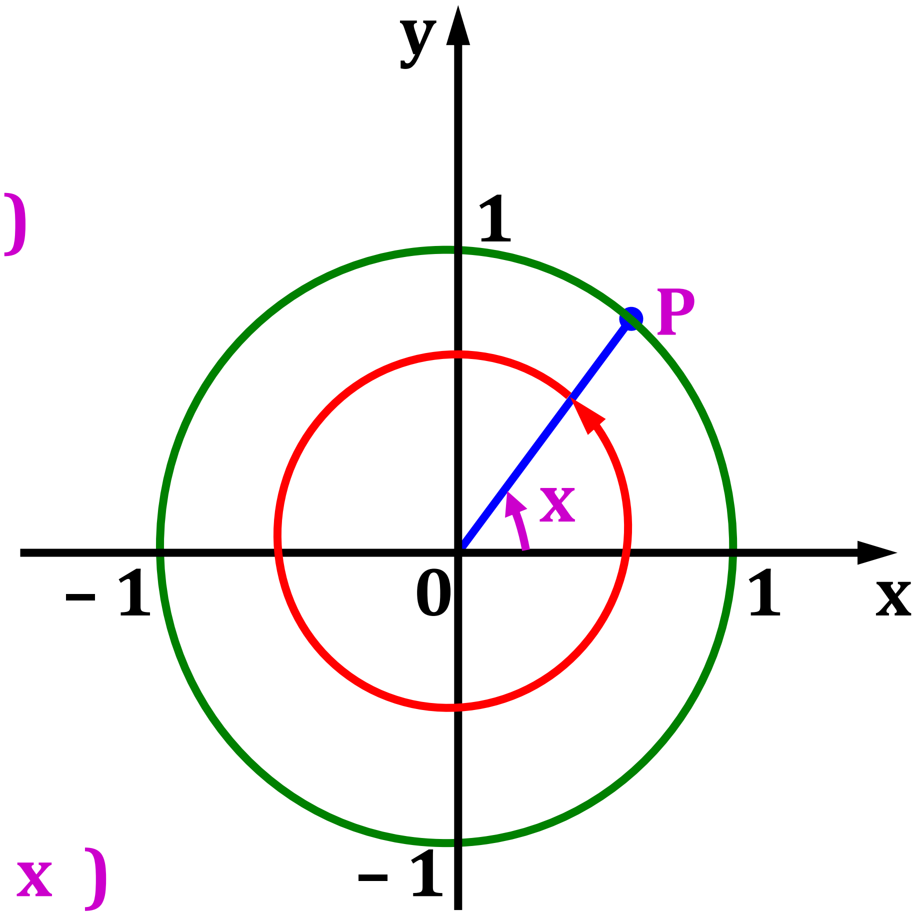
a . sin f (x) + b . cos g (x) = c biçimindeki trigonometrik denklemlerin kökleri buldurulur ; a , b ve c katsayıları ile çözüm ilişkilendirilir.

b) **Gerçek hayat problemlerine yer verilir.**

Trigonometrik Denklemler

1) cos x = a Denkleminin Çözüm Kümesi





cos x = a denkleminin çözüm kümesi

$x + k \cdot 2\pi$ veya **$-x + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)** olur.

Not : **Kosinüslü denklemin iki ayrı çözüm kümesi vardır. k yerine istenirse tam sayılar verilir ve sağlayan açı değerleri bulunur.**

Soru : $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **denkleminin çözüm kümesini (yani x'i) bulunuz.**

Soru : cos x $= \frac{1}{2}$ **veriliyor.** $x \in [-2\pi, 2\pi]$ **ise bu aralıktaki** x **değerlerini bulunuz.**

Soru : $\cos x = 0$ veriliyor. $x \in [-360^{\circ}, 540^{\circ}]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : **cos x = $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ veriliyor. x $\in$ [– 2π , 2π] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Soru : **cos (2x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\cos(3x) = 1$ ise ; **A)** Denklemin çözüm kümesini bulunuz.

B) $x \in [-\pi, \pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : **$\cos(2x - 60^\circ) = \dfrac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\cos(2x) + \cos x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Kural : $\cos f(x) = \cos h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$f(x) = h(x) + k.2\pi$ veya $f(x) = -h(x) + k.2\pi$

olarak alınır.

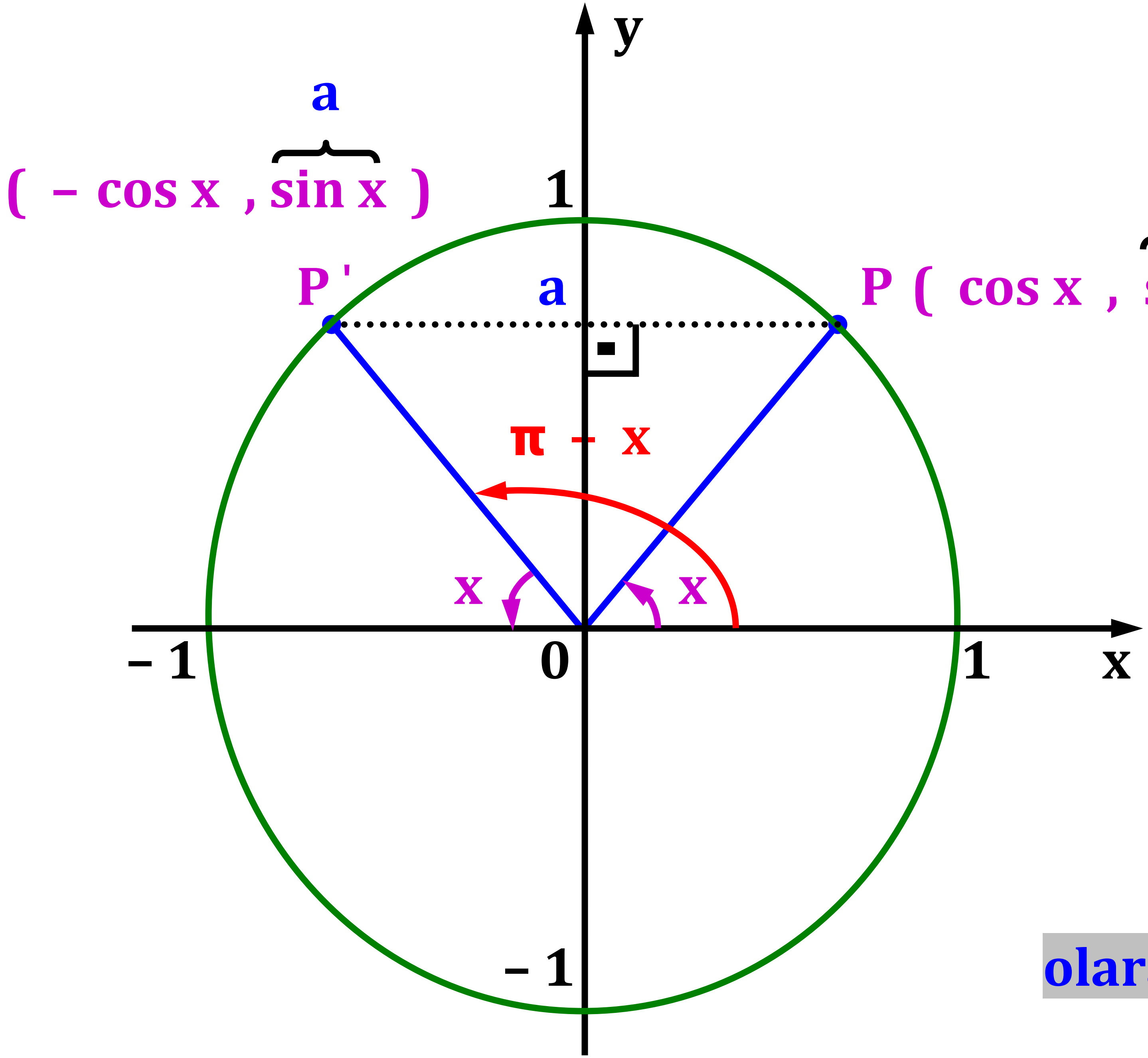
Soru : $\cos(3x - 10^\circ) = \cos(x + 10^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\cos(2x + 40^\circ) = \cos(x + 5^\circ)$ veriliyor.

$x \in [-2\pi, 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cos(3x + 20^\circ) = \sin x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. ($\sin a = \cos b$ ise $a + b = 90^\circ$ idi.)

2) sin x = a Denkleminin Çözüm Kümesi



sin x = a

denklemini sağlayan

x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

x + k . 2π veya

π – x + k . 2π

olarak bulunur. (k ∈ ℤ)

Soru : **$\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin; A) Çözüm kümesini (yani x 'i) bulunuz.**

B) $x \in [\,-2\pi\,,\,2\pi\,]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : **sin x = $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ denkleminde x $\in$ [– 2π , 2π] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Soru : **sin x = 1 denkleminde x ∈ [– 370° , 720°] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Soru : **$\sin(6x - 30^\circ) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sin(3x + 15^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminde $x \in [-\pi, \pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\cos(2x) + 3\sin x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sqrt{1 - \cos x} \, . \, \sqrt{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\sin(180^\circ - 2x) = -\sin(x + 270^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.** **(Dar açıya göre yazma yani indirgeme kurallarından yararlanılır.)**

Soru : **$\tan x - 2\sin(2x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Kural : sin f (x) = sin h (x) ise k ∈ ℤ olmak üzere,

f (x) = h (x) + k . 2π veya f (x) = π − h (x) + k . 2π

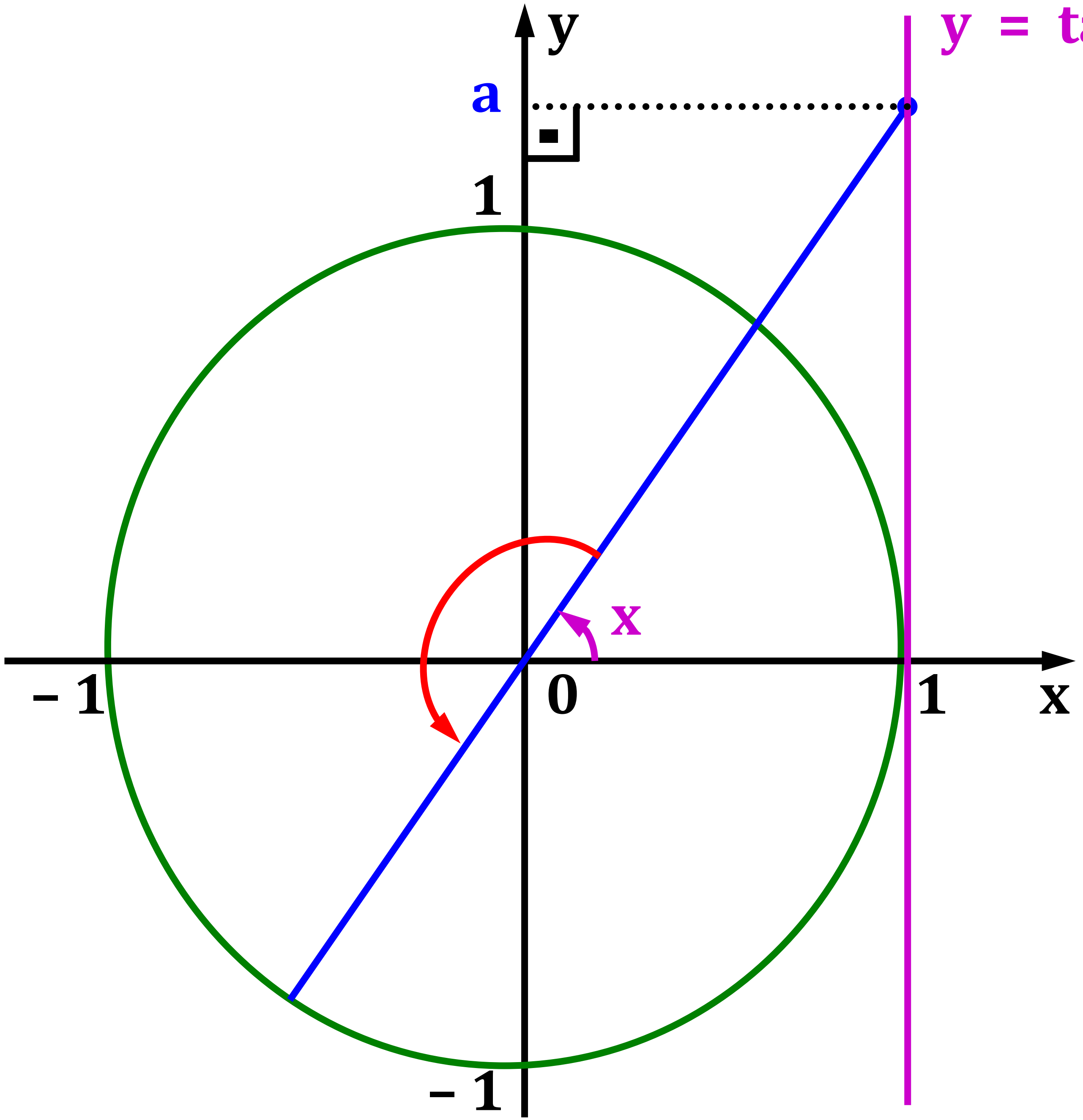
olarak alınır.

Soru : sin (x − 20°) = sin (− 2x + 10°) denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : **sin ($4x - 28^\circ$) = sin ($2x + 4^\circ$) denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sin(2x + 40^\circ) = \cos(x + 5^\circ)$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

3) tan x = a Denkleminin Çözüm Kümesi



tan x = a

denklemini sağlayan

x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

x + k . π olarak

bulunur. (k ∈ ℤ)

Soru : **tan x = $\sqrt{3}$ denkleminde x $\in$ [– 2π , 2π] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Soru : $\tan x = -1$ denkleminde $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\tan(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminde $x \in [-180^\circ, 180^\circ]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : **$\tan(25^\circ - 4x) = 1$ denkleminde $x \in [-90^\circ, 180^\circ]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Kural : $\tan f(x) = \tan h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

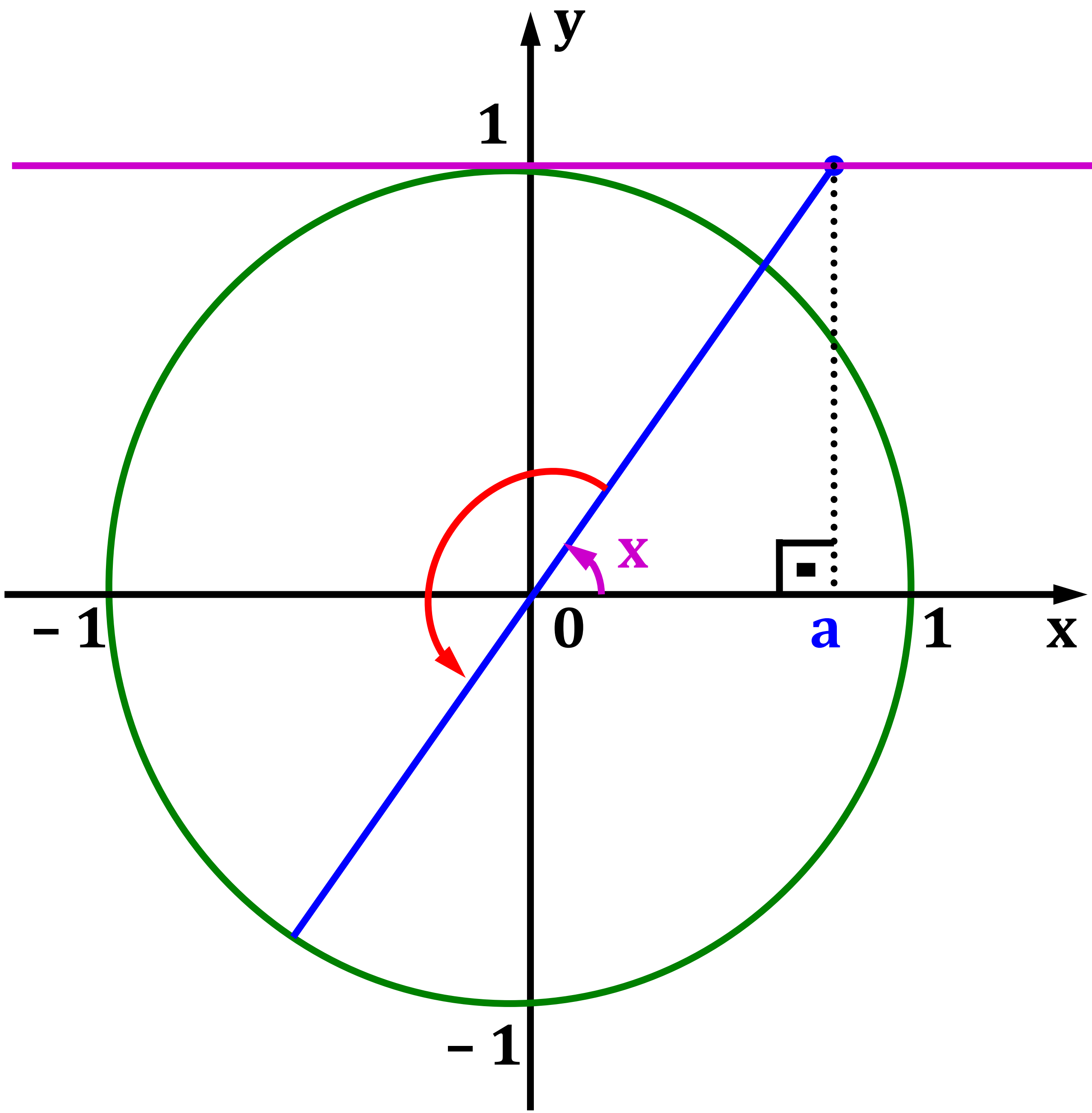
$f(x) = h(x) + k \cdot \pi$ olarak alınır.

Soru : $\tan(2x) = \tan\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : **$\tan(3x - 10^\circ) = \cot(x + 20^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$\tan(2x) \cdot \cot(3x) = \cot(2x) \cdot \tan(3x)$ denklemi-nin çözüm kümesini bulunuz.** $\left(\tan a = \dfrac{1}{\cot a} \text{ idi.} \right)$

4) cot x = a Denkleminin Çözüm Kümesi



cot x = a

denklemini sağlayan

x değeri bulunur.

Denklemin kökü;

x + k . π olarak

bulunur. (k ∈ ℤ)

Soru : **cot (5x) = 1 denkleminde x ∈ [−π / 2 , π / 2] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.**

Soru : $\cot(3x - 24^\circ) = -\sqrt{3}$ denkleminde $x \in [-\pi, \pi]$ ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

Soru : $\cot\left(-5x + \dfrac{7\pi}{18}\right) = 0$ **denkleminde** $x \in [-90^\circ, 90^\circ]$ **ise bu aralıktaki** x **değerlerini bulunuz.**

Kural : $\cot f(x) = \cot h(x)$ ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$f(x) = h(x) + k \cdot \pi$ olarak alınır.

Soru : $\cot(6x) = \cot(4x - 52^\circ)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : cot (x – 60°) . tan (12° – 4x) = 1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz. ($\tan a = \dfrac{1}{\cot a}$ idi.)

Tanım : a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $a \,.\, \sin x + b \,.\, \cos x = 0$ biçimindeki denklemlere " birinci dereceden homojen trigonometrik denklem " adı verilir.

Eşitlik sinüse bölünürse kotanjant, kosinüse bölünür ise tanjantlı denklemin çözümü bulunur.

Soru : $\sqrt{3}\,\sin x - \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru : $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 0$ **denkleminde** $x \in [-\pi, 2\pi]$ **ise bu aralıktaki** x **değerlerini bulunuz.**

Soru : cos (5x) = – sin (5x) denkleminde x ∈ [– π , π / 2] ise bu aralıktaki x değerlerini bulunuz.

$$\cos(5x) = -\sin(5x), \quad x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$$

Soru : **$4\sin(2x) - 4\cos(2x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Tanım : a , b ve c <u>sıfırdan farklı</u> reel sayılar olmak üzere

$a \sin x + b \cos x = c$ biçimindeki denklemlere " sin x ve cos x 'e göre lineer (doğrusal) denklem " adı verilir.

A) $c^2 \le a^2 + b^2$ ise <u>denklemin çözüm kümesi bulunabilir.</u>

Soru : $3\sqrt{2} \sin x + k \cos x = -5$ denkleminin çözüm kümesi <u>bulunabiliyorsa</u> k yerine hangi <u>tam sayılar kullanılmaz ?</u>

Soru : $4 \sin x - 6 \cos x = 2t$ **denkleminin çözüm kümesi yoksa t yerine gelebilecek en küçük pozitif tam sayı kaç olur ?**

Not : **a , b ve c** **sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere**

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ lineer denkleminin çözümünde:

1) Denklemde ister sinüsün ister kosinüsün katsayısı 1 yapılır.

2) Diğer terimin katsayısı tanjanta çevrilir.

3) Tanjant yerine sin / cos değeri yazılarak işlemde payda eşitlemesi yapılır.

4) Pay, toplam – fark formülleri kullanılarak bulunur.

5) İşlemde içler – dışlar çarpımı yapılarak elde edilen denklemden çözüm bulunur.

Soru : **$4 \sin x - 4 \cos x = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 3$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sqrt{12}\cos x + 2\sin x + 2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 4. DÖNÜŞÜMLER

12. 3. 1. Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler

Terimler ve Kavramlar: **Dönüşüm, öteleme, dönme, dönme merkezi, dönme açısı, simetri, simetri merkezi, simetri ekseni**

12. 4. 1. 1. **Analitik düzlemde koordinatları verilen bir noktanın öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulur.**

A) **Öteleme, simetri ve dönme kavramları hatırlatılır.**

B) **Noktanın; noktaya, eksenlere, $y = x$ doğrusuna, bir doğruya göre simetrileri ve doğrunun noktaya göre simetrileri vurgulanır.**

Doğrunun doğruya göre simetrilerine yer verilmez.

C) Bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla öteleme, simetri ve dönme ele alınır.

12. 4. 1. 2. Temel dönüşümler ve bileşkeleriyle ilgili problem çözer.

A) Modelleme çalışmalarına yer verilir.

B) Doğadan ve mimari eserlerden örneklendirme yapılır.

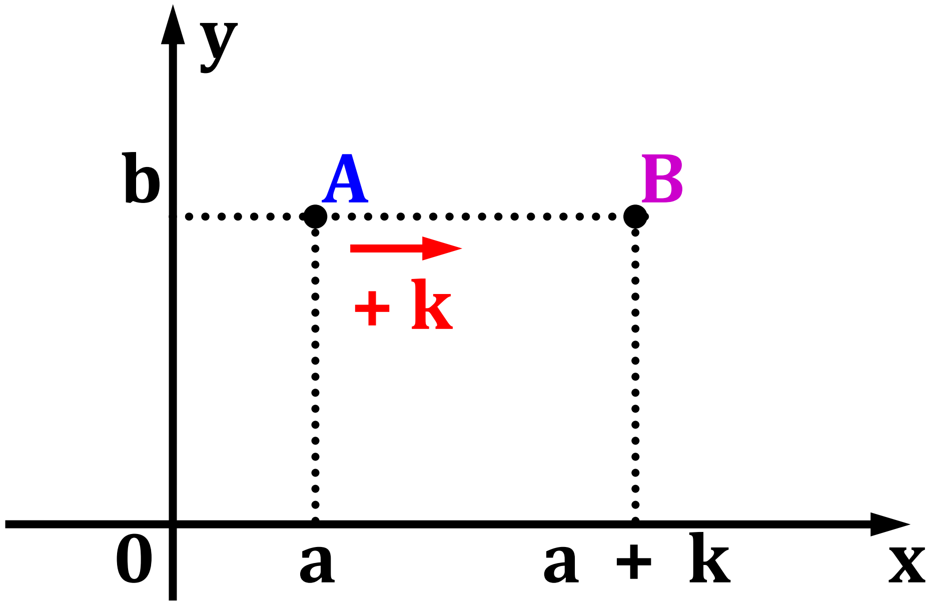
4. ÜNİTE : DÖNÜŞÜMLER

Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler

Öteleme

Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesine " öteleme " adı verilir.

Kural : A) **A (a , b) noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde k br ötelenmiş hali B (a + k , b) olarak bulunur. Noktanın ordinatı değişmez.**



B) **A (a , b) noktasının x ekseni boyunca negatif yönde k br ötelenmiş hali C (a – k , b) noktası olur.**

C) **A (a , b) noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde k br ötelenmiş hali D (a , b + k) noktası olur.**

D) **A (a , b) noktasının y ekseni boyunca negatif yönde k br ötelenmiş hali E (a , b – k) noktası olur.**

Soru : **Analitik düzlemde $A(-2, 4)$ noktası önce y ekseni boyunca negatif yönde 3 br, sonra da x ekseni boyunca pozitif yönde 5 br ötelenmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

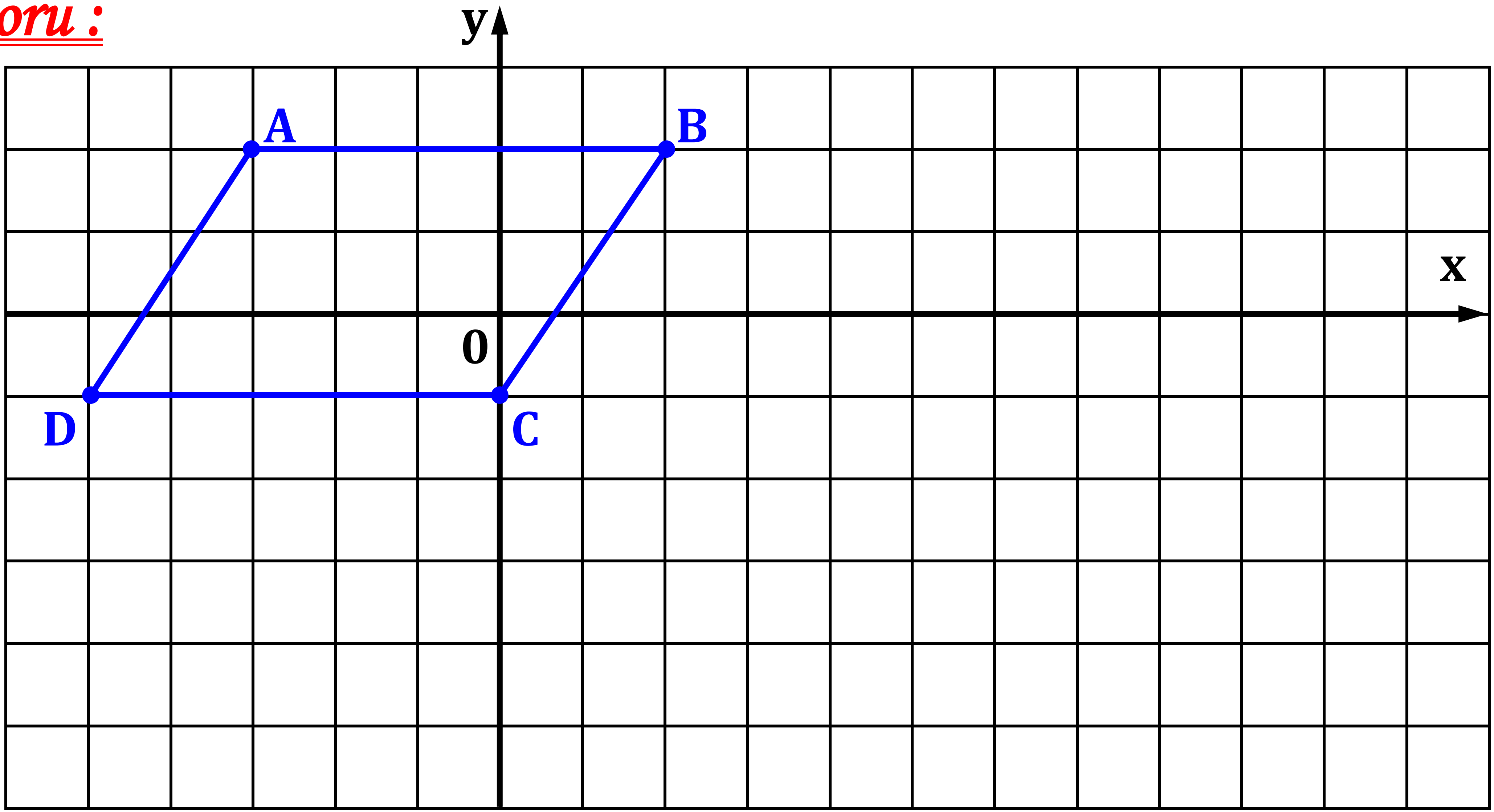
Soru : **Analitik düzlemde $A(-1, -9)$ noktası önce x ekseni boyunca negatif yönde 5 br, sonra da y ekseni boyunca pozitif yönde 12 br ötelenmesi ile oluşan nokta B ise $|AB| = ?$**

Soru : **Analitik düzlemde $A(8, 2)$ noktası önce x ekseni boyunca pozitif yönde 12 br, sonra da y ekseni boyunca negatif yönde 6 br ötelenmesi ile oluşan nokta $T(m + 14, 2n + m)$ ise**

$m \cdot n = ?$

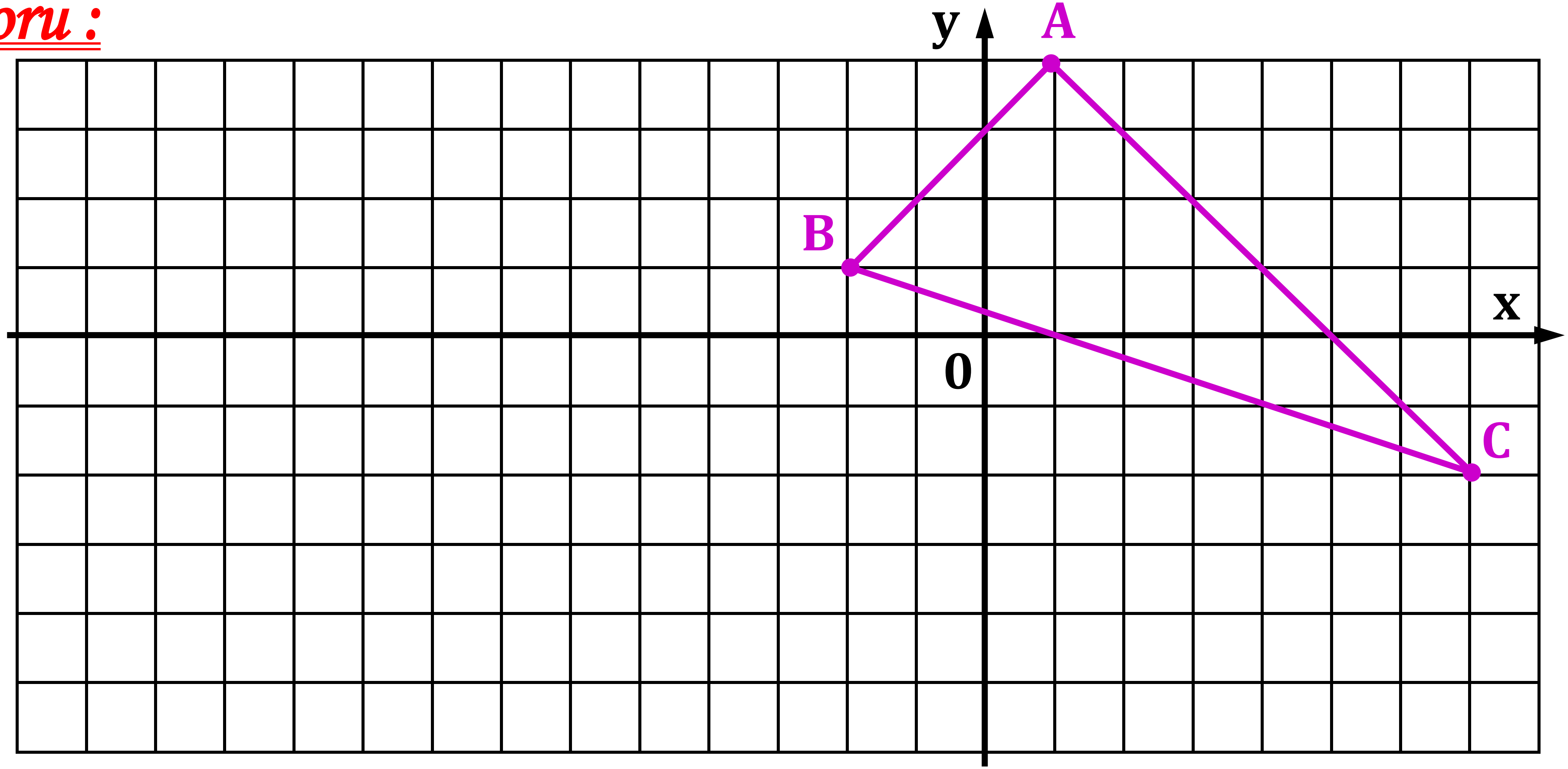
Soru : **Analitik düzlemde $A(3p - 5, q + 4)$ noktası önce hem x hem de y ekseni boyunca negatif yönde 10 br ötelenmesi ile oluşan nokta $B(p + 2, 3)$ ise $p + q = ?$**

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCD paralelkenarı; x ekseni boyunca pozitif yönde 8 br, y ekseni boyunca negatif yönde 4 br ötelendiğinde oluşan A'B'C'D' paralelkenarını çiziniz.

Soru :

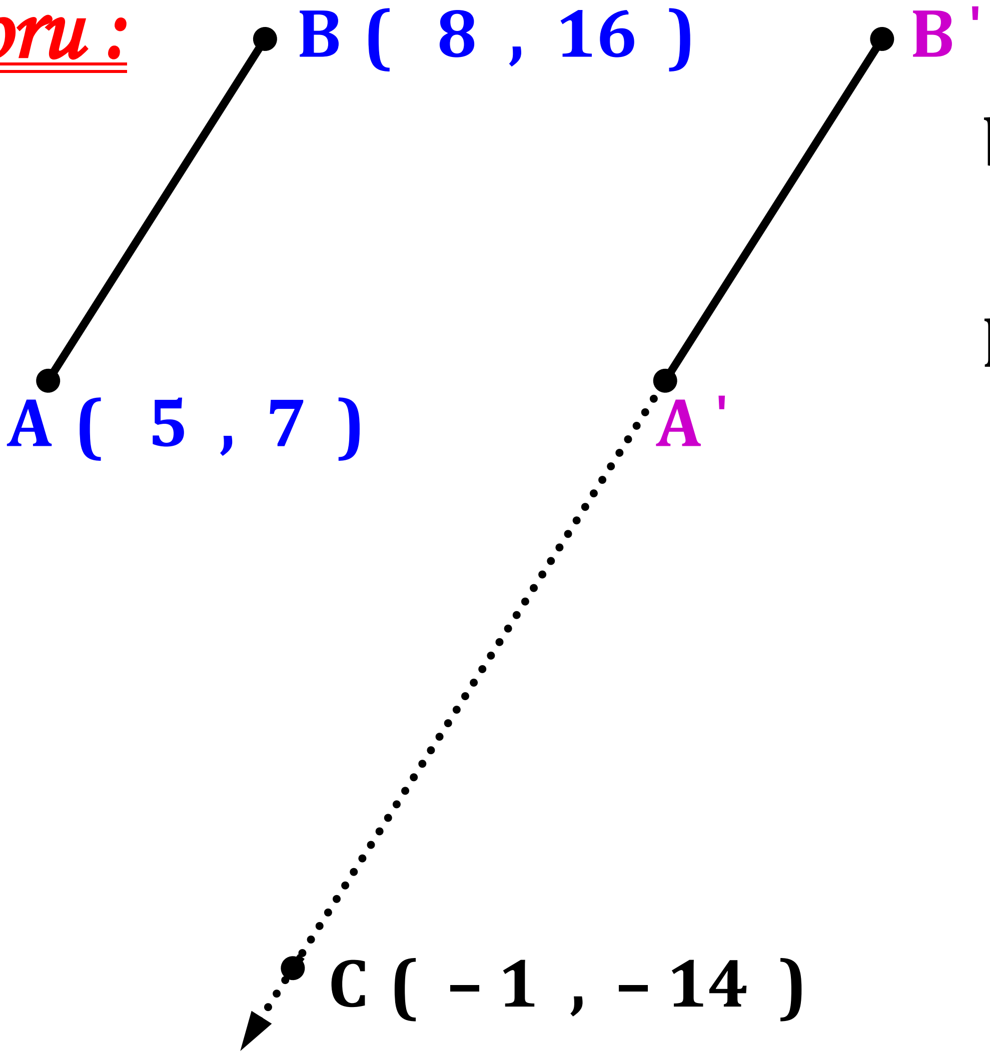


Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC üçgeni; x ekseni boyunca negatif yönde 10 br, y ekseni boyunca negatif yönde 3 br ötelendiğinde oluşan;

A) A'B'C' üçgenini çiziniz.

B) **$A'B'C'$ üçgenin <u>ağırlık merkezini</u> bulunuz.**

Soru :



[AB] doğru parçası x ekseni boyunca pozitif yönde k br ötelenmesi sonucunda elde edilen doğru parçasının uzantısı C noktasından da geçtiğine göre k = ? (Eğim değişmez. $m_{AB} = m_{A'C} = m_{B'C}$ eşitliğinden çözüm bulunur.)

Hatırlatma : A) $y = f(x)$ olup $y = f(x + a)$ ise fonksiyonun grafiği **a br sola** (x ekseni boyunca negatif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

B) $y = f(x)$ olup $y = f(x - a)$ ise fonksiyonun grafiği **a br sağa** (x ekseni boyunca pozitif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

C) $y = f(x)$ olup $y = f(x) + a$ ise fonksiyonun grafiği **a br yukarı** (y ekseni boyunca pozitif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

D) $y = f(x)$ olup $y = f(x) - a$ ise fonksiyonun grafiği **a br aşağı** (y ekseni boyunca negatif yönde a br öteleme olur) kaydırılırdı.

Soru : $y = f(x) = 2x + 6$ doğrunun x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenmesiyle elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

2. Yol : **Fonksiyonun grafiği çizilir. Öteleme yapılır ve yeni bulunan noktalardan geçen fonksiyonun denklemi bulunur.**

$y = f(x) = 2x + 6$ doğrunun x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenmesini yapalım.

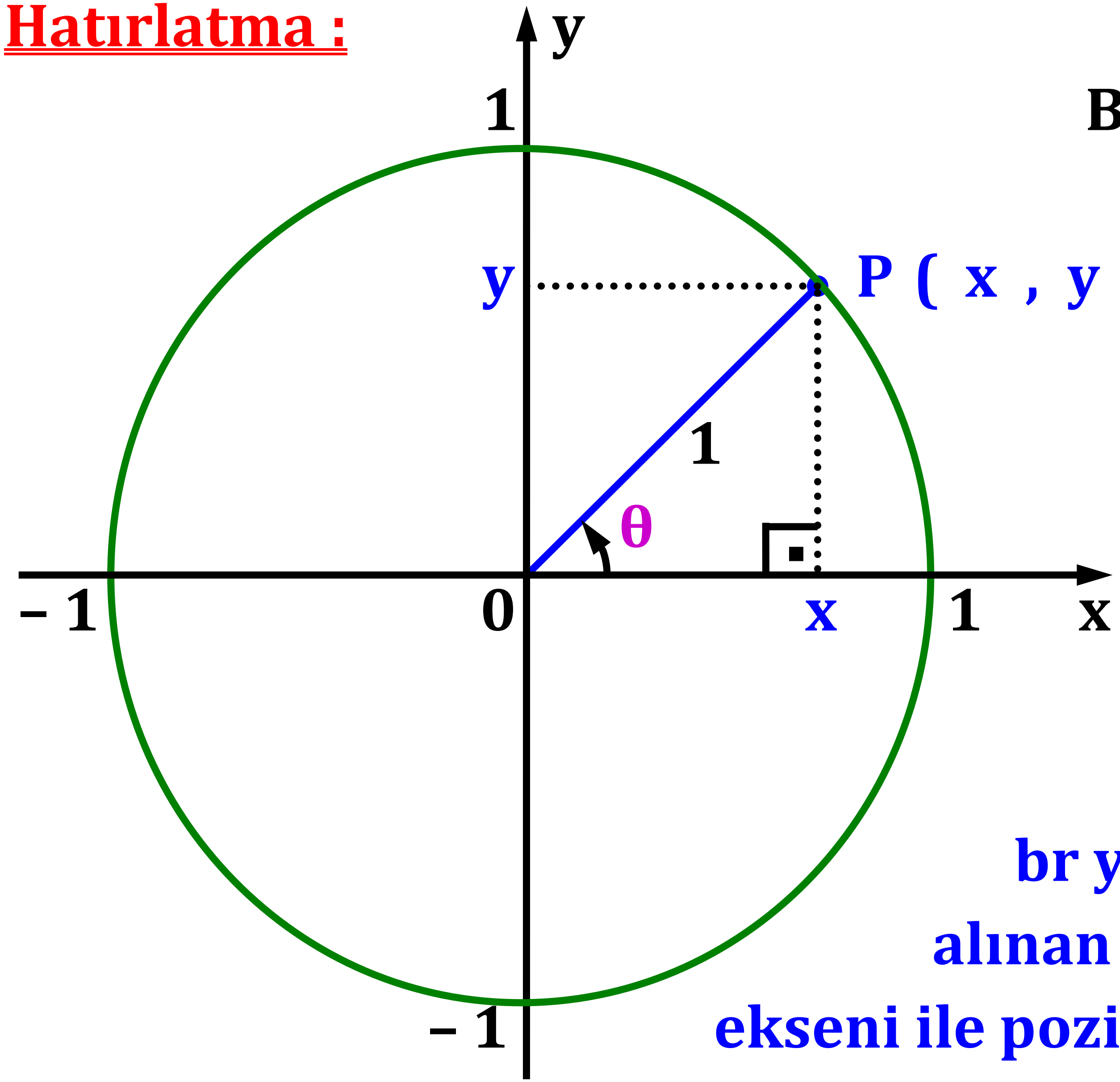
Soru : **$y = f(x) = 8 - 2x$ doğrunun x ekseni boyunca <u>negatif</u> yönde 3 br, ardından da y ekseni boyunca <u>pozitif</u> yönde 5 br ötelenmesiyle elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ parabolünün x ekseni boyunca pozitif yönde 1 br ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemi ne olur ?

Soru : **$y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ parabolünün önce; x ekseni boyunca negatif yönde 2 br, ardından da y ekseni boyunca negatif yönde 4 br ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemi ne olur ?**

Dönme Dönüşümü

Hatırlatma :



Birim çember üzerinde alınan bir nokta P (x , y) olsun.

$\sin\theta = y / 1$ ve

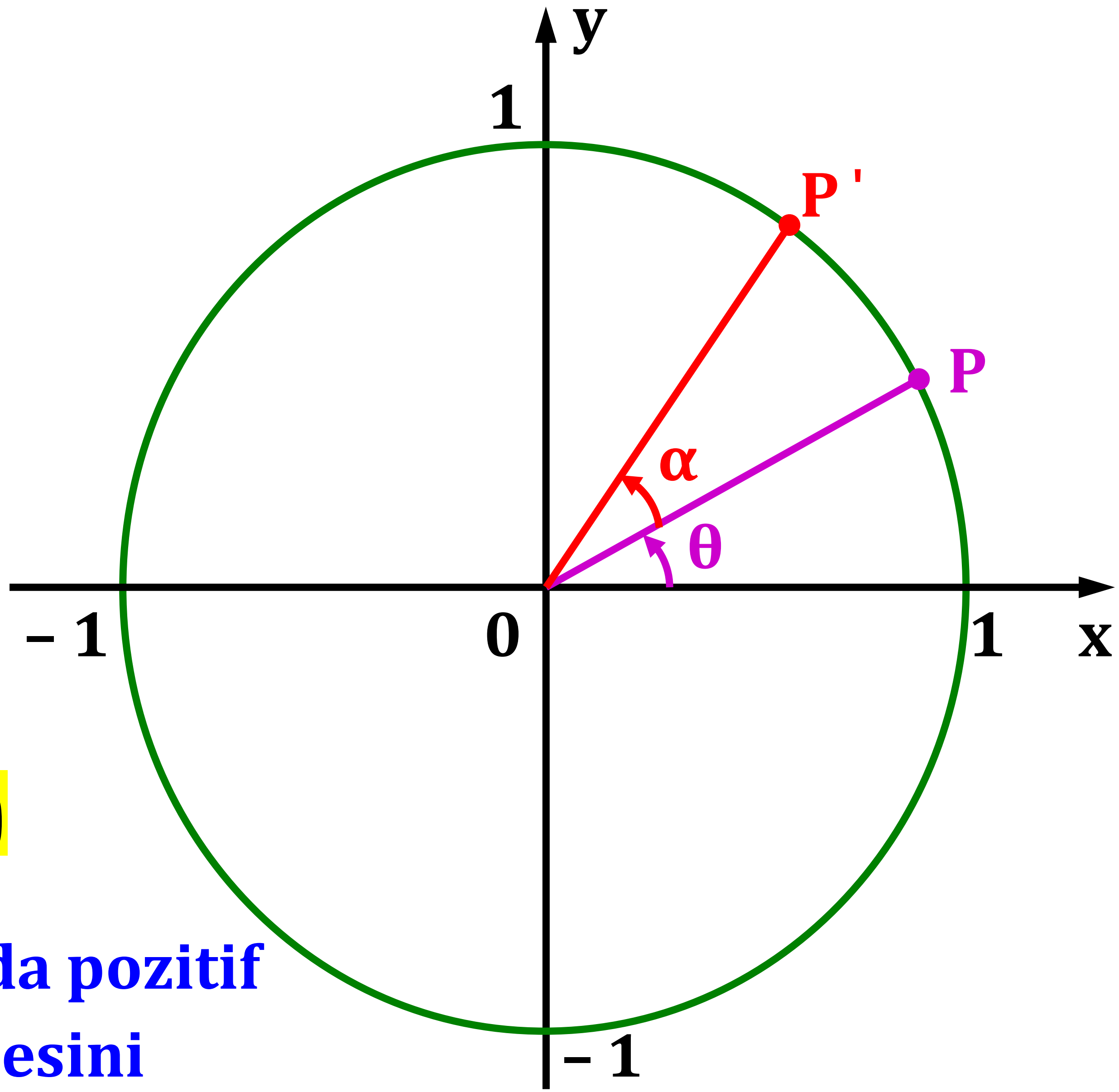
$\cos\theta = x / 1$ olur.

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ idi.

Not : **Analitik düzlemde r br yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir P (x , y) noktasının x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ olsun.**

Buna göre $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$ olarak bulunur.

Kural : Analitik düzlemde r br yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ olsun. P noktasının orijin etrafında <u>pozitif yönde</u> α açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta $P'(x', y')$ olsun.



$$P'(x', y') = \underbrace{R_\alpha}(P)$$

P noktasının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesini simgeler. (<u>Pozitif Yön :</u> Saat yönünün tersi idi.)

$x = r \, . \cos\theta \quad , \quad y = r \, . \sin\theta$ idi.

$$x' = r \, . \cos(\theta + \alpha) = r \, . [\cos\theta \, . \cos\alpha - \sin\theta \, . \sin\alpha]$$

$$= \underbrace{r \, . \cos\theta}_{x} \, . \cos\alpha - \underbrace{r \, . \sin\theta}_{y} \, . \sin\alpha = x \, . \cos\alpha - y \, . \sin\alpha$$

$x' = x \, . \cos\alpha - y \, . \sin\alpha$ bulunur.

$$y' = r \, . \sin(\theta + \alpha) = r \, . [\sin\theta \, . \cos\alpha + \cos\theta \, . \sin\alpha]$$

$$= \underbrace{r \, . \sin\theta}_{y} \, . \cos\alpha + \underbrace{r \, . \cos\theta}_{x} \, . \sin\alpha = y \, . \cos\alpha + x \, . \sin\alpha$$

$y' = y \, . \cos\alpha + x \, . \sin\alpha$ bulunur.

$R_\alpha(P) = P'(x', y') = (x \, . \cos\alpha - y \, . \sin\alpha \, ,$

$y \, . \cos\alpha + x \, . \sin\alpha)$ olur.

Soru : **Analitik düzlemde $P(-1, \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

2. Yol : **Noktayı analitik düzlemde işaretlediğimizde özel dik üçgen elde edebiliyorsak, nokta α açısı kadar döndürülür ve yeni nokta elde edilir.** **P $(-1 , \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesini ele alalım.**

Soru : **Analitik düzlemde P ($2\sqrt{3}$, 2) noktasının orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Analitik düzlemde $P(6, -6)$ noktasının orijin etrafında saat yönünde 315° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.** **(Negatif yönde α açısı kadar döndürmek, noktayı pozitif yönde $360^\circ - \alpha$ açısı kadar döndürmektir.)**

Soru : **Analitik düzlemde $P(1, 3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 120° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz. (Büyük açılarda açıyı dar açı türünden yazmak gerekir.)**

Soru : **Analitik düzlemde $P(-4, -1)$ noktasının orijin etrafında saat yönünün tersi yönünde 225° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Analitik düzlemde <u>dördüncü bölgede</u> bulunan $P(6, k)$ noktasının orijin noktasına olan uzaklığı $2\sqrt{13}$ br'dir. Noktanın orijin etrafında pozitif yönde 1575° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Analitik düzlemde $P(x, y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 330° döndürülmesi ile oluşan nokta $P'(2, 2\sqrt{3})$ ise P noktasının koordinatlarını bulunuz.** **(Denklemlerin taraf tarafa çözümü yapılır.)**

Analitik düzlemde $P(x, y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 330° döndürülmesi ile oluşan nokta $P'(2, 2\sqrt{3})$ ise P noktasının koordinatlarını bulunuz. **(Çizimden sonucu bulmak daha kolay olur.)**

Soru : **Analitik düzlemde $P(0, 4)$ noktası; önce orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmüş, ardından da x ekseni boyunca negatif yönde 3 br ötelendiğinde oluşan noktanın koordinatları ne olur ?** **(Öteleme ve dönme dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere " ötelemeli dönme dönüşümü " adı verilir.)**

Soru : **Analitik düzlemde $P(10, -2)$ noktası; önce orijin etrafında pozitif yönde 45° döndürülmüş, ardından y ekseni boyunca negatif yönde 2 br, ardından da x ekseni boyunca pozitif yönde 5 br ötelendiğinde oluşan noktanın koordinatları ne olur ?**

Not : **A)** Bir P (x , y) noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle oluşan noktayı bulalım.

$$R_{90^\circ}(P) = P'(x', y') = (x.\cos 90^\circ - y.\sin 90^\circ\ ,\ y.\cos 90^\circ + x.\sin 90^\circ)$$

$$= (x.0 - y.1\ ,\ y.0 + x.1) = (-y\ ,\ x)$$

$R_{90^\circ}(P) = P'(x', y') = (-y\ ,\ x)$ bulunur.

Benzer şekilde alttaki sonuçlar bulunur.

B) $R_{180^\circ}(P) = P'(x', y') = (-x\ ,\ -y)$ bulunur.

C) $R_{270^\circ}(P) = P'(x', y') = (y\ ,\ -x)$ bulunur.

D) $R_{360^\circ}(P) = P'(x', y') = (x\ ,\ y)$ bulunur.

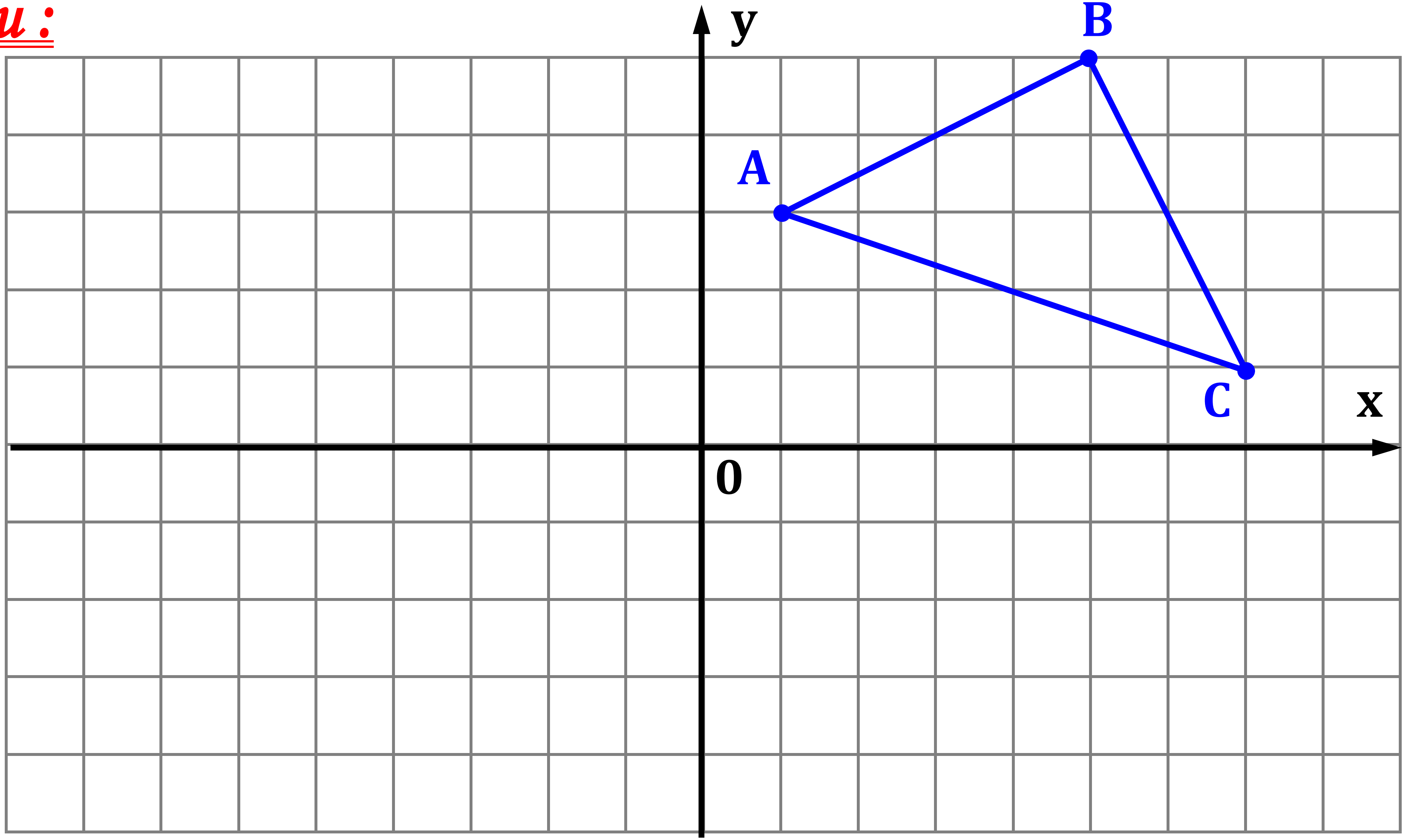
Soru : **Analitik düzlemde $P(-4, -1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesiyle oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Analitik düzlemde $P(-2, 5)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde; önce 180°, ardından da 270° döndürülmesiyle oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Analitik düzlemde $P(8, 1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle $Q(k-1, m+4)$ noktası elde ediliyorsa $k \cdot m = ?$**

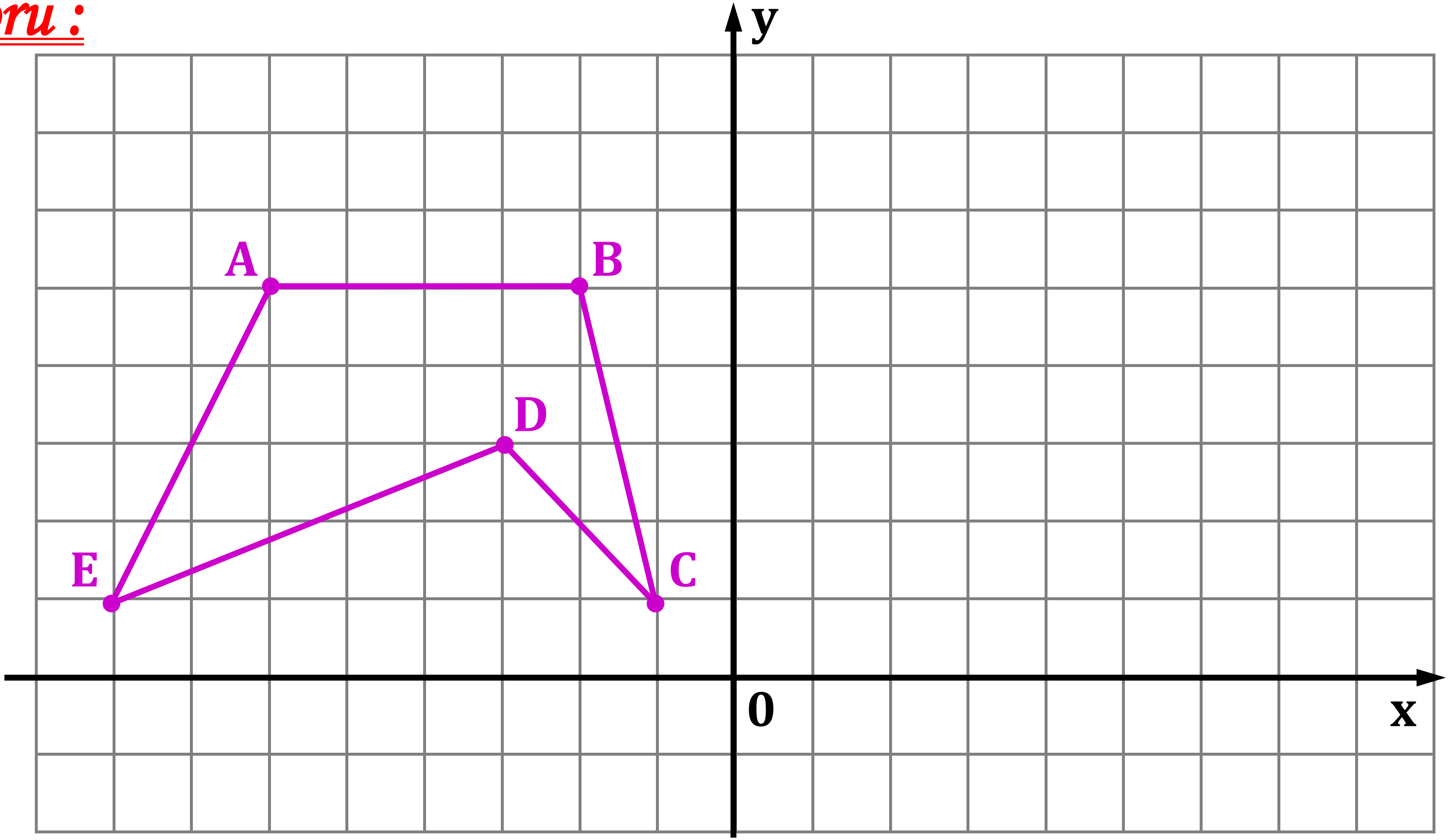
Soru : **Analitik düzlemde $P(2t - 5, 6 + z)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülmesiyle $Q(9, -2 + z)$ noktası elde ediliyorsa $t + z = ?$**

Soru :



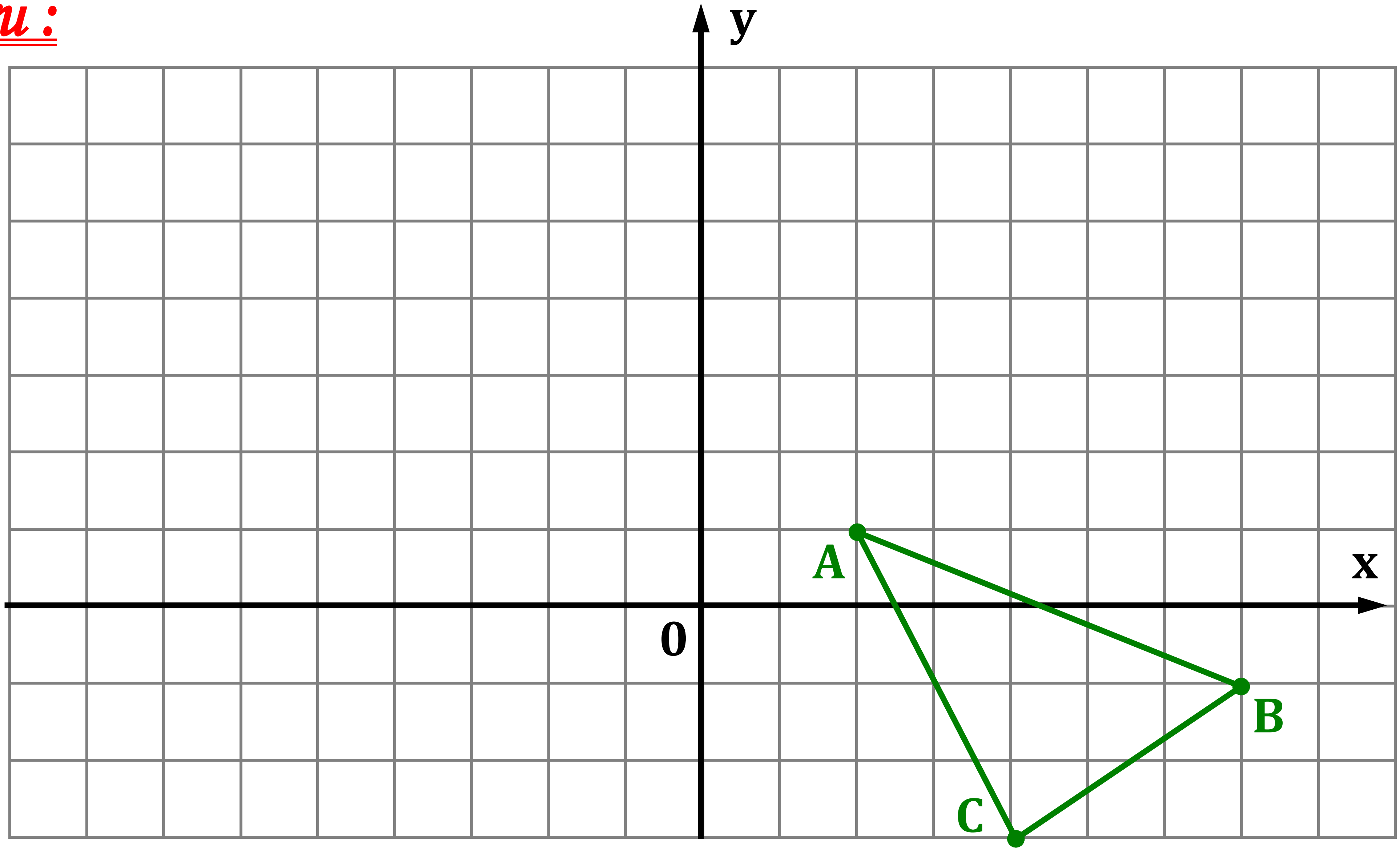
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde
ABC üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 180°
döndürüldüğünde oluşan A'B'C' üçgenini çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCDE beşgeni orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürüldüğünde oluşan A'B'C'D'E' dörtgenini çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC üçgeni önce; orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmüş, ardından da x ekseni boyunca negatif yönde 4 br ötelendiğinde oluşan yeni üçgeni çiziniz.

Bir Noktanın Bir Başka Noktaya Göre Simetriği

$A(x\,,\,y) \longrightarrow P(a\,,\,b) \longrightarrow A'(x'\,,\,y')$

Bir A noktasının bir P noktasına göre simetriği A' olsun. A ile A' noktalarının P noktasına olan uzaklığı aynı olacağından P noktası orta nokta olur.

$a = \dfrac{x + x'}{2}$ ve $b = \dfrac{y + y'}{2}$ olarak alınır.

Artma – azalmadan da istenen değerler bulunabilir.

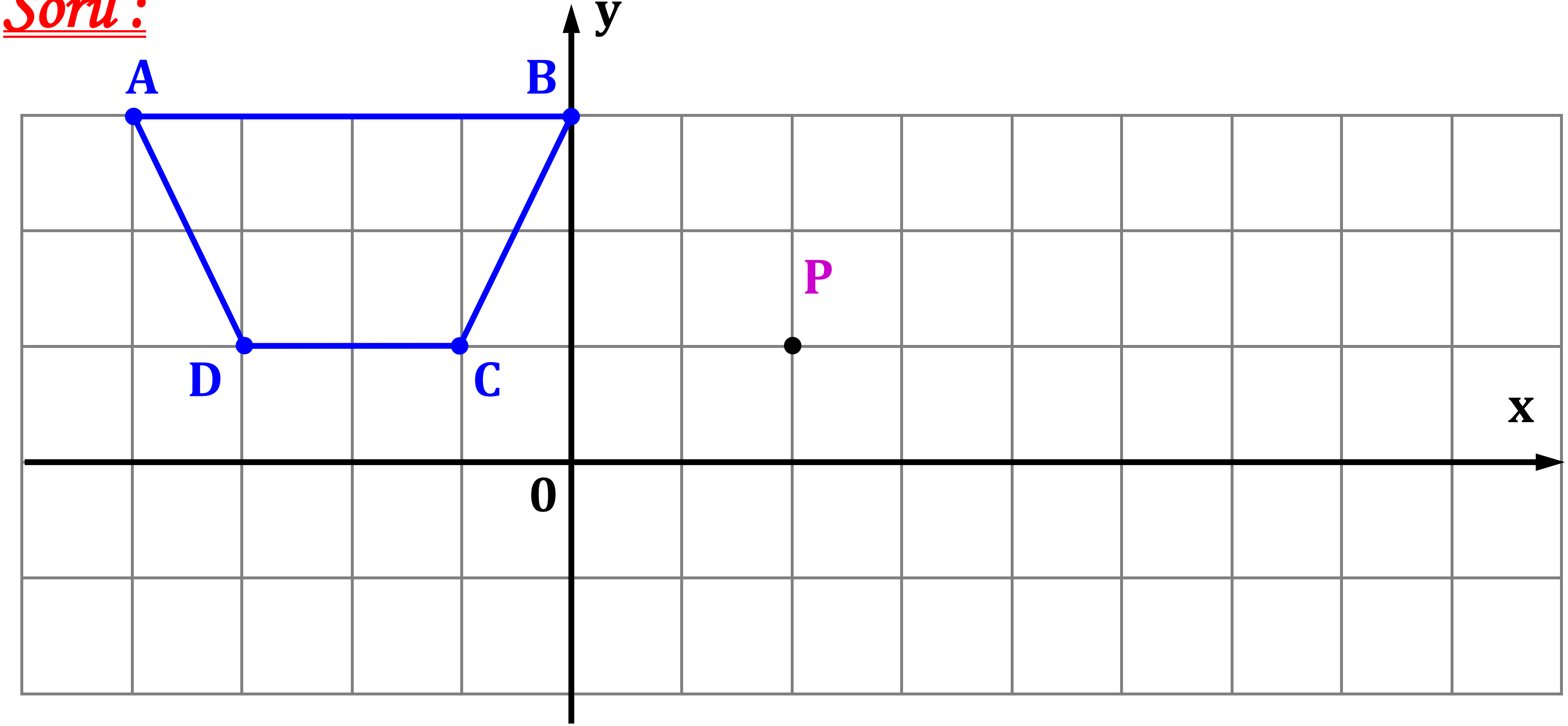
Soru : **A (3 , – 12) noktasının bir P noktasına göre simetriği A' (– 9 , 20) ise P noktasını bulunuz.**

Soru : **A (21 , 8) noktasının bir P (5 , 10) noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz.**

Soru : **A (– 6 , 2) noktasının bir P (3 , – 5) noktasına göre A ' , P ’nin de A ' noktasına göre simetriği P ' ise A ' ile P ' noktaları-nı bulunuz.**

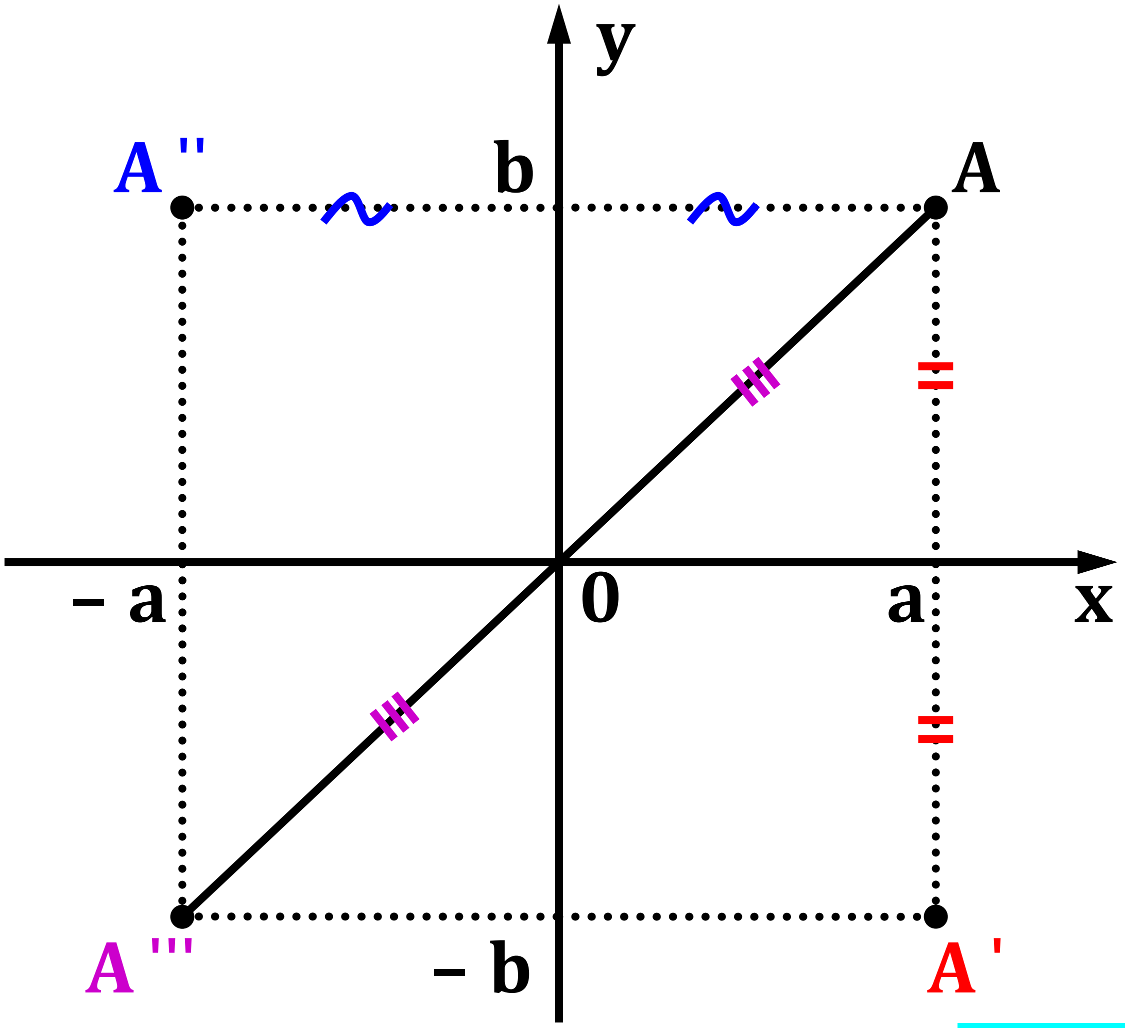
Soru : **A (k – 3 , 1) noktasının bir P (1 + k , 7) noktasına göre simetriği A' (2 , 3m + 10) ise | AA' | = ?**

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCD yamuğunun P noktasına göre simetriği olan A'B'C'D' yamuğunu çiziniz.

Bir Noktanın x , y ve Orijine Göre Simetriği



Bir A (a , b) noktasının

x eksenine göre simetriği

A' (a , – b) olur.

Bir A (a , b) noktasının

y eksenine göre simetriği

A'' (– a , b) olur.

Bir A (a , b) noktasının orijine

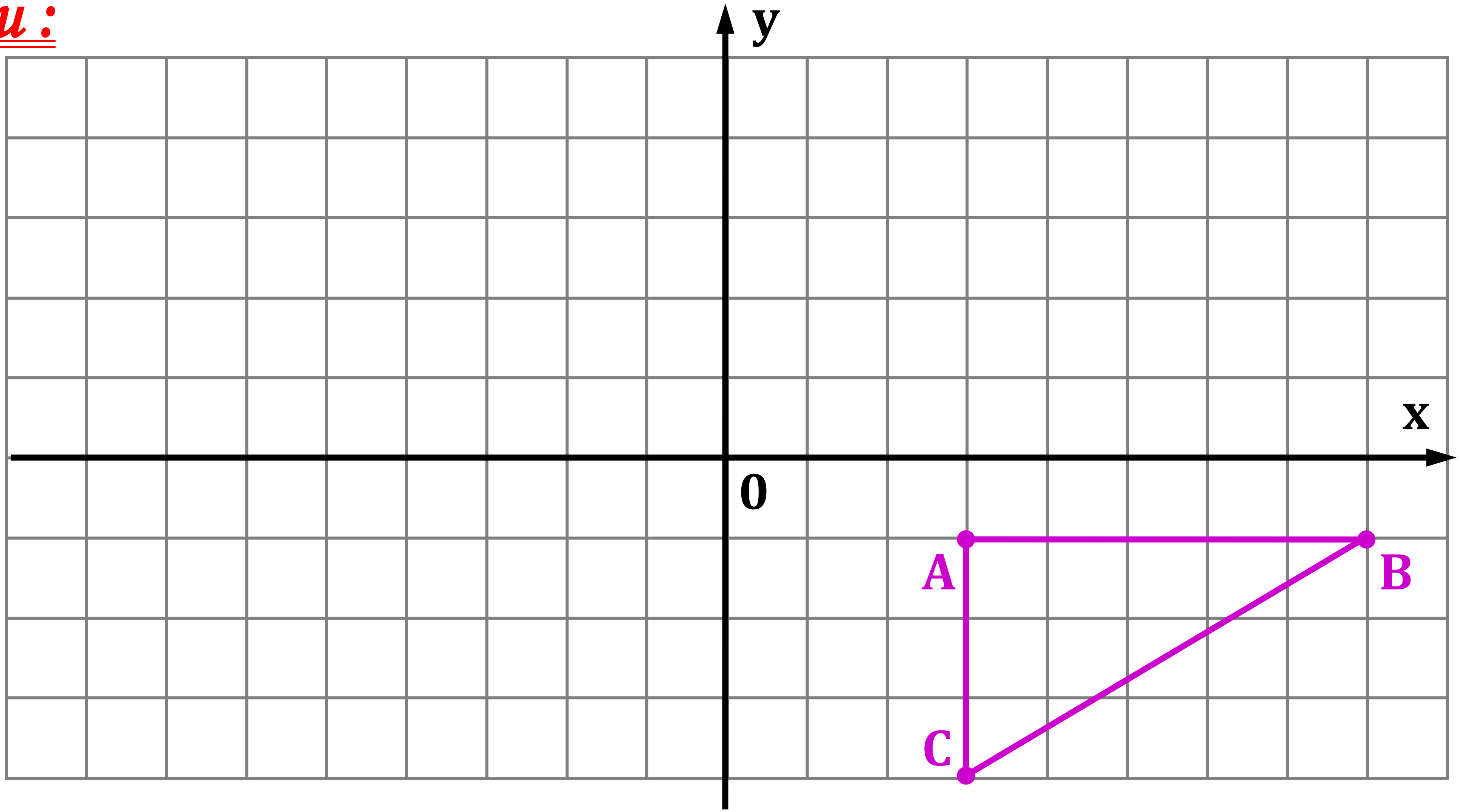
göre simetriği A''' (– a , – b) olur.

Soru : **A (8 , 7) noktasının orijine göre simetriği B , B noktasının da y eksenine göre simetriği C noktası ise C noktasının koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **A (– 10 , 1) noktasının y eksenine göre simetriği B , B noktasının x eksenine göre simetriği C , C noktasının ise x ekseni-ne göre pozitif yönde 3 br ötelenmesiyle oluşan nokta da D ise D noktasının koordinatlarını bulunuz.**

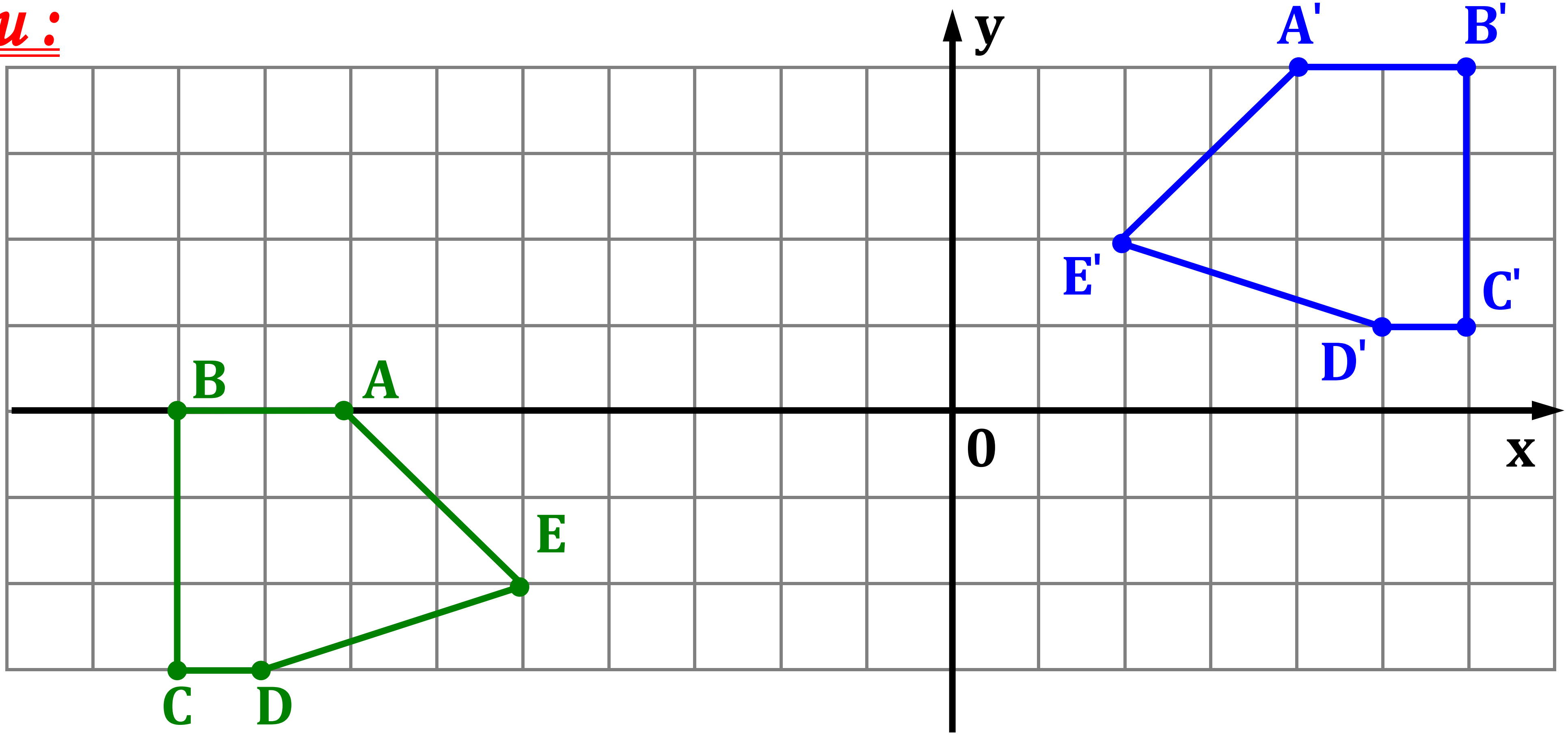
Soru : **A (3k + 7 , 4 – t) noktasının x eksenine göre simetriği B , B noktasının da orijine göre simetriği C (13 , 9) ise k . t = ?**

Soru :



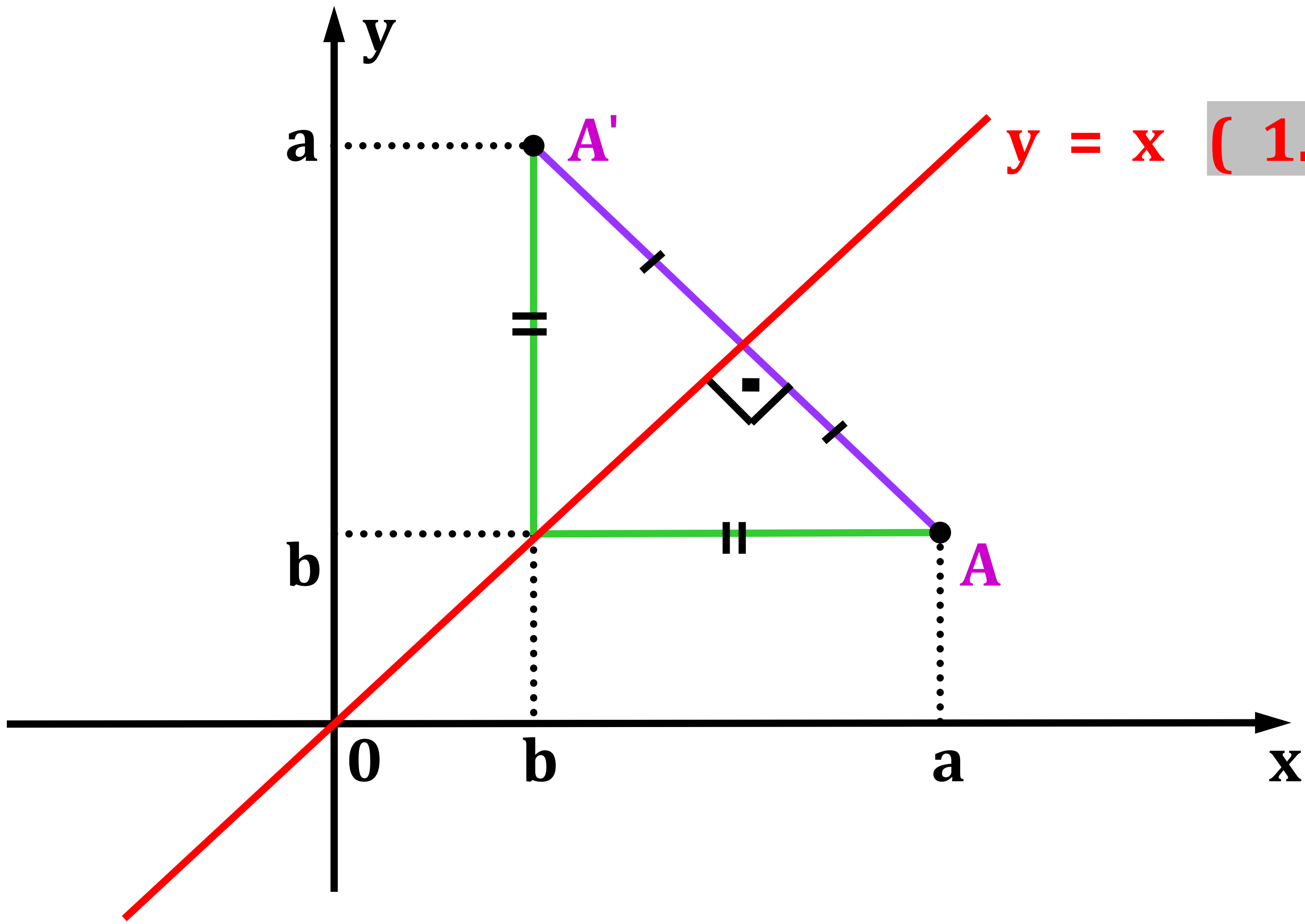
Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABC üçgeninin önce x eksenine göre simetriği alınıp; ardından x ekseni boyunca negatif yönde 10 br, y ekseni boyunca ise pozitif yönde 1 br ötelenmesiyle oluşan yeni üçgeni çiziniz.

Soru :



Birim karelere bölünmüş analitik düzlemde ABCDE beşgenine bir takım öteleme ve simetri aşamaları uygulanarak şekildeki gibi A'B'C'D'E' dörtgeni elde edilmiştir. Bu aşamaların ne olduğunu bulunuz.

Bir Noktanın $y = x$ Doğrusuna Göre Simetriği



(1. Açıortay Doğrusu idi)

Bir A (a , b) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği

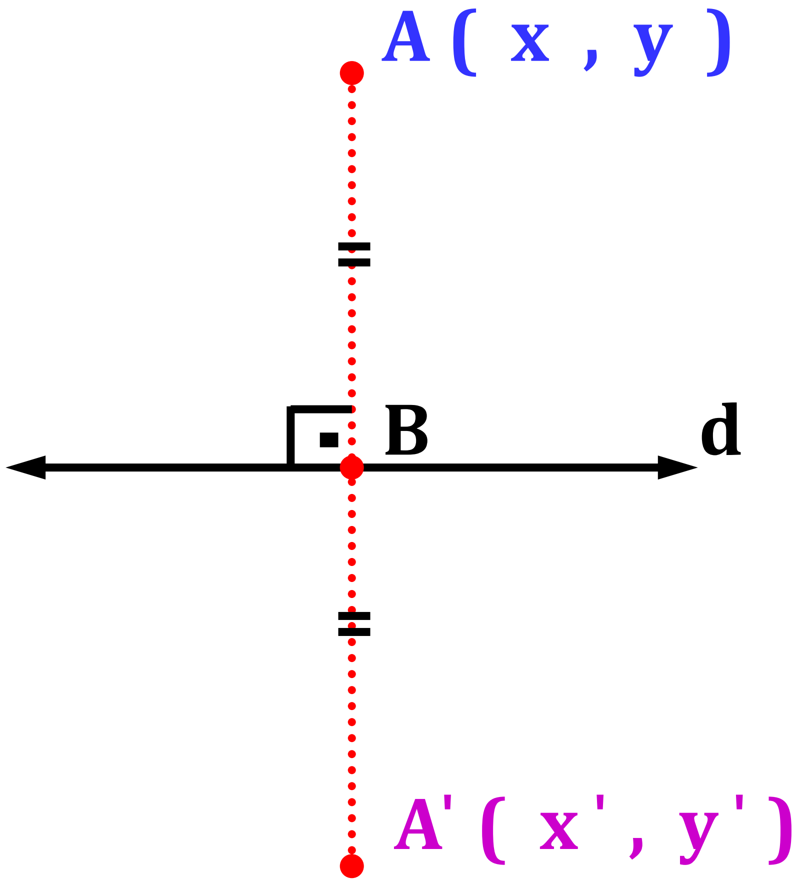
A' (b , a) olur.

Soru : **A (2m – 7 , n + 8) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A' (2 , – 13) ise m + n = ?**

Soru : **A (8 , 5 – t^3) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği B (32 , t + k – 2) ise t . k = ?**

Soru : **A (3p – 5 + q , q + 15) noktasının 1.açıortay doğrusuna göre simetriği B (9 – q , 1 + p) ise B noktasının y eksenine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği



A noktasının bir d doğrusuna göre simetriğini bulmak için;

i . d doğrusunun eğimi bulunur.

ii . $m_{AB} \cdot m_d = -1$ idi. m_{AB} bulunur.

iii . A ile B noktalarından geçen doğrunun denklemi bulunur.

iv . İki doğru denkleminin ortak çözümünden B noktası elde edilir.

v . Orta nokta kuralından A' noktası bulunur.

Soru : Bir A (– 6 , 8) noktasının y = 2x + 10 doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

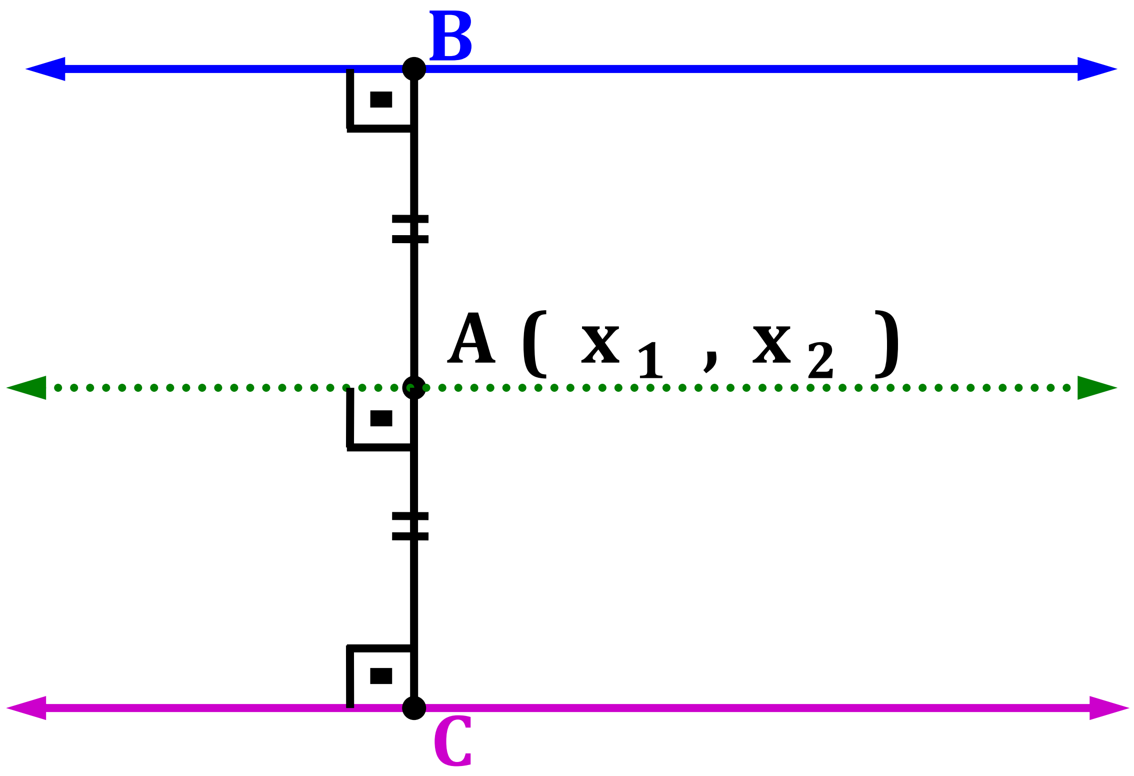
Soru : **Bir A (7 , 6) noktasının y + x = – 4 doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru : **Bir $A(-1, 3)$ noktasının bir d doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(3, 7)$ ise bu doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **Bir A (2 , – 4) noktasının $x - y + 6 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan nokta A' ise $|AA'| = ?$**

(Kısayol : Bir $P(x_1, y_1)$ noktasının bir $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı $h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ idi.)

Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği



$d_1 : ax + by + c_1 = 0$

$k : ax + by + t = 0$

$d_2 : ax + by + c_2 = 0$

Bir d_1 doğrusunun bir A noktasına göre simetriği d_2 olsun. $d_1 \; // \; d_2$ olur. A noktasından geçen ve bu doğrulara paralel olan bir k doğrusu alınır. A noktası k doğru denklemine uygulanır ve t sayısı bulunur. t sayısı c_1 ve c_2 sayılarının ortasıdır.

Soru : **Bir $2y - x + 6 = 0$ doğrusunun $A(-2, 5)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.**

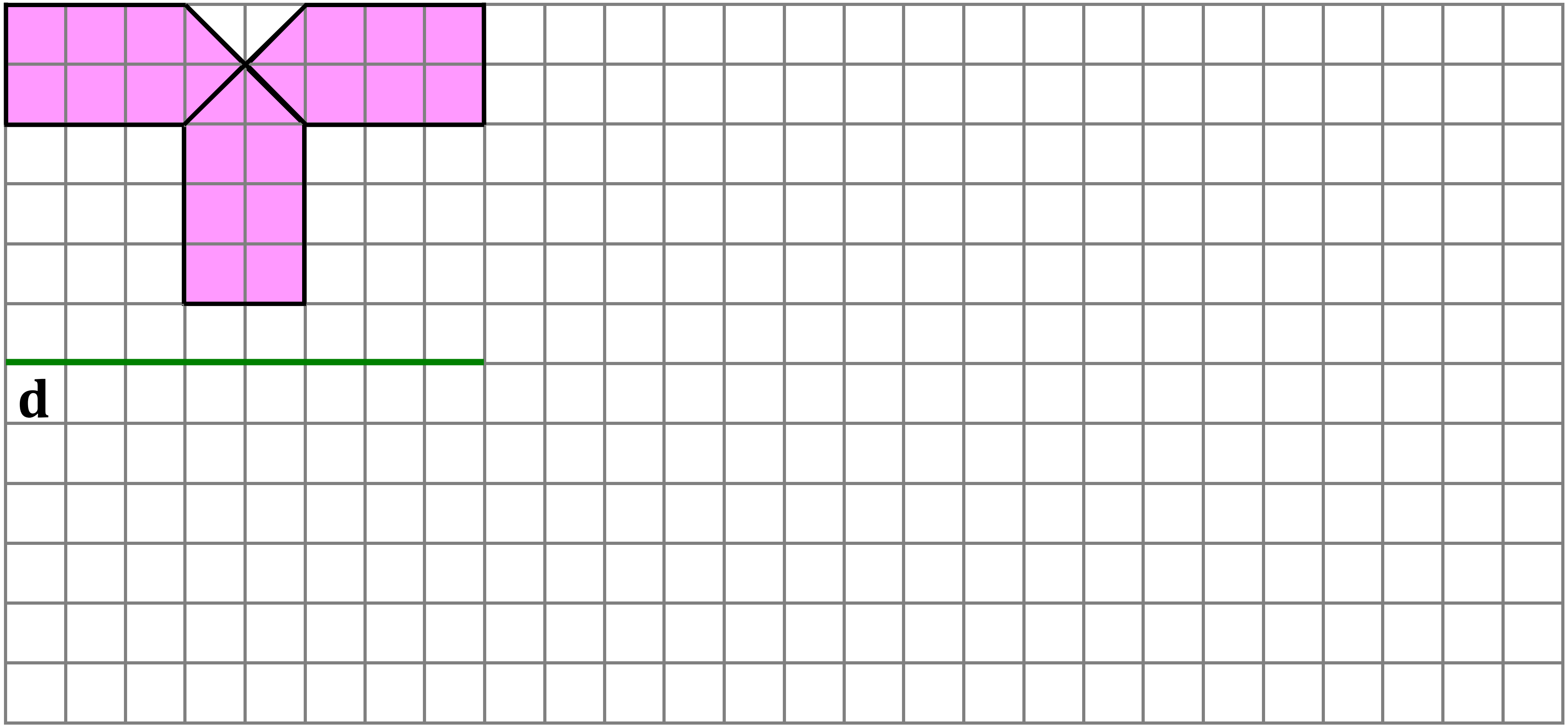
Soru : **Bir $3x + 2y - 12 = 0$ doğrusunun $A(1, -3)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **Bir $3x - 4y + 1 = 0$ doğrusunun $A(2, 1/2)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini ve iki doğru arası mesafeyi bulunuz.**

Örnek Uygulamalar

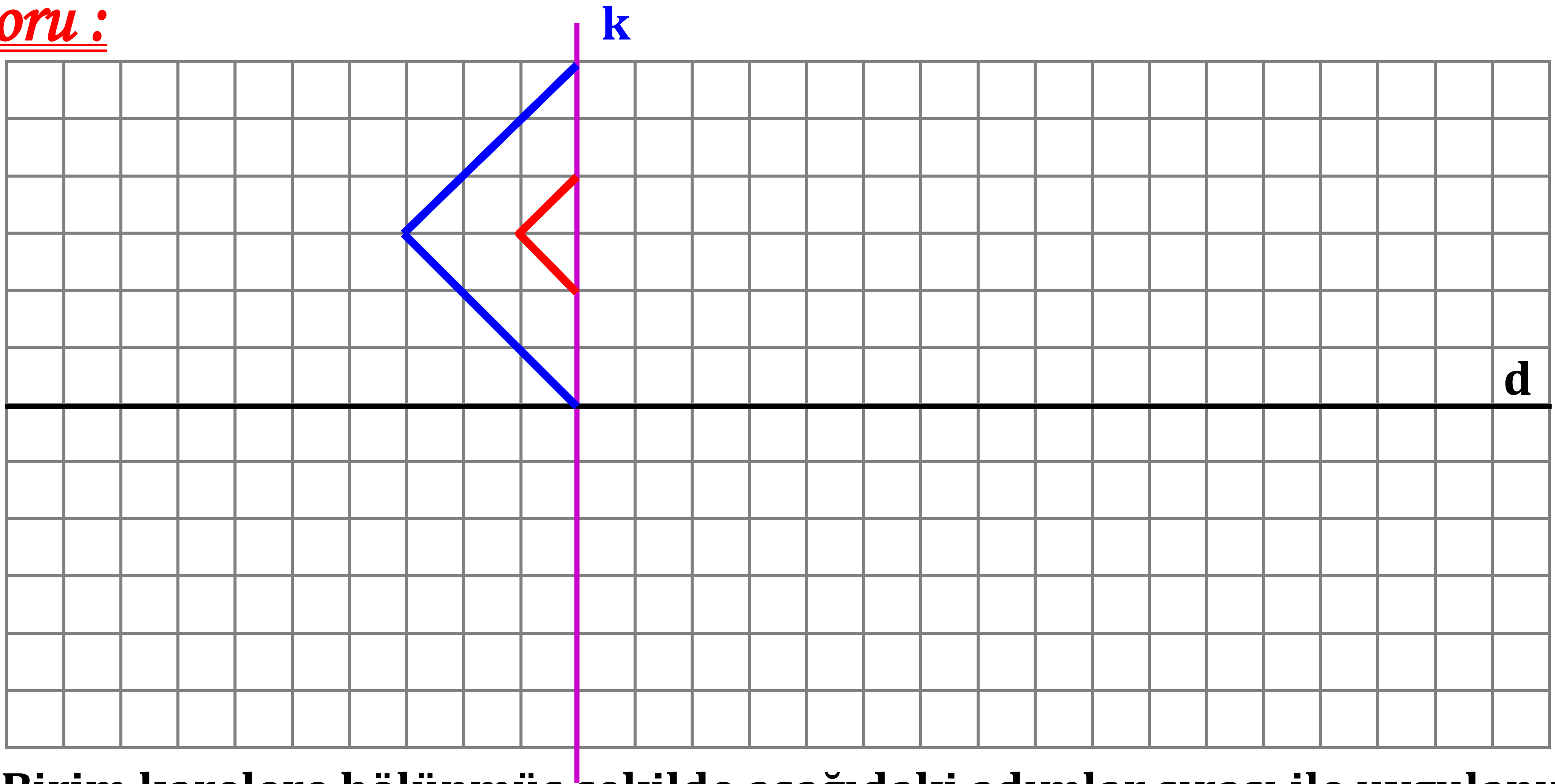
Öteleme, dönme ve simetri kavramlarını; mimari eserlerde, doğada, süsleme el işlerinde v.b. alanlarda görebiliriz.

Soru :

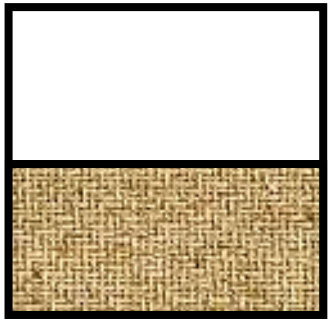


Birim karelere bölünmüş şekilde mavi boyalı şeklin önce d doğrusuna göre simetriği alınıyor. Elde edilen <u>tüm şeklin</u> kopyası arada <u>bir sütun boşluk</u> kalacak şekilde <u>bir birim sağa öteleniyor</u>. Aynı öteleme yeni şekle de uygulanırsa tüm şeklin son durumunu bulunuz.

Soru :

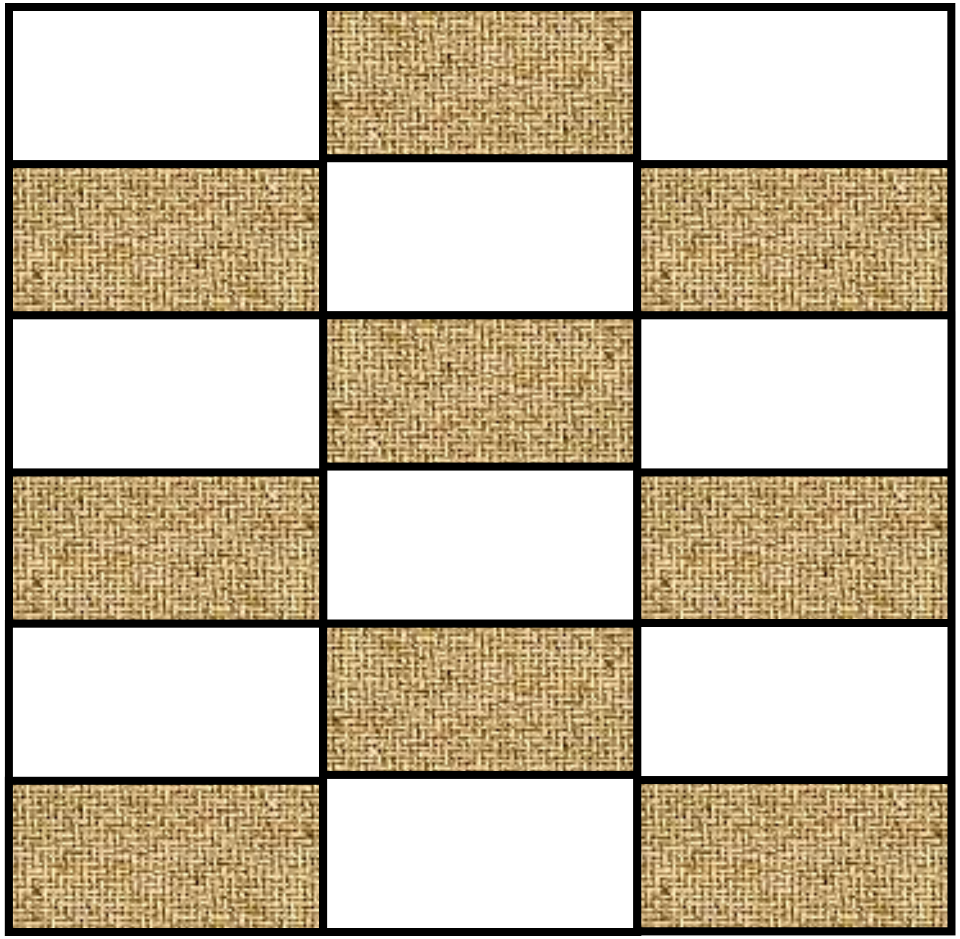


Birim karelere bölünmüş şekilde aşağıdaki adımlar sırası ile uygulanırsa oluşacak motifi bulunuz. 1) Mavi ve kırmızı çizgilerin k doğrusuna göre simetriği alınıyor. 2) Tüm çizgilerin d doğrusuna göre simetriği alınıyor. 3) <u>Elde edilen motif</u>, iki şekil arasında bir sütun boşluk kalacak şekilde sağ ve sol tarafa öteleniyor.

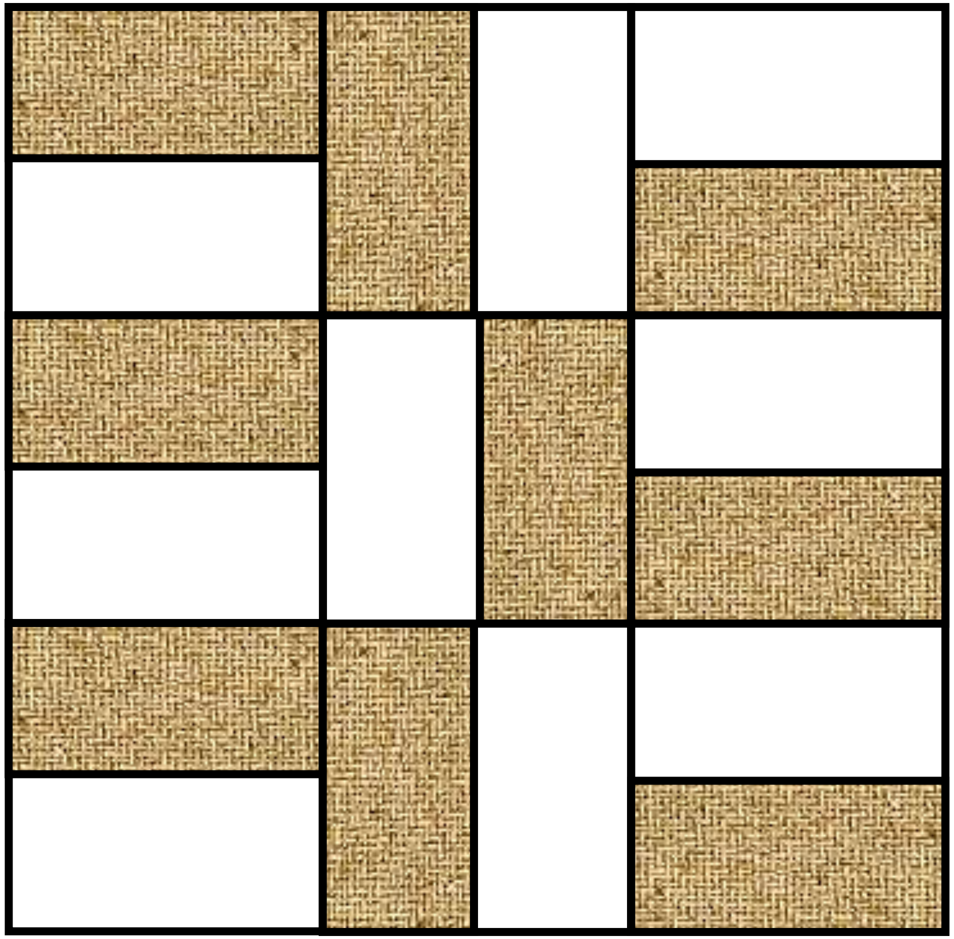
Soru : 

Yandaki şekle öteleme, simetri, döndürme aşamalarından hangileri uygulanırsa alttaki desenlerden hangisi elde <u>edilemez</u> ?

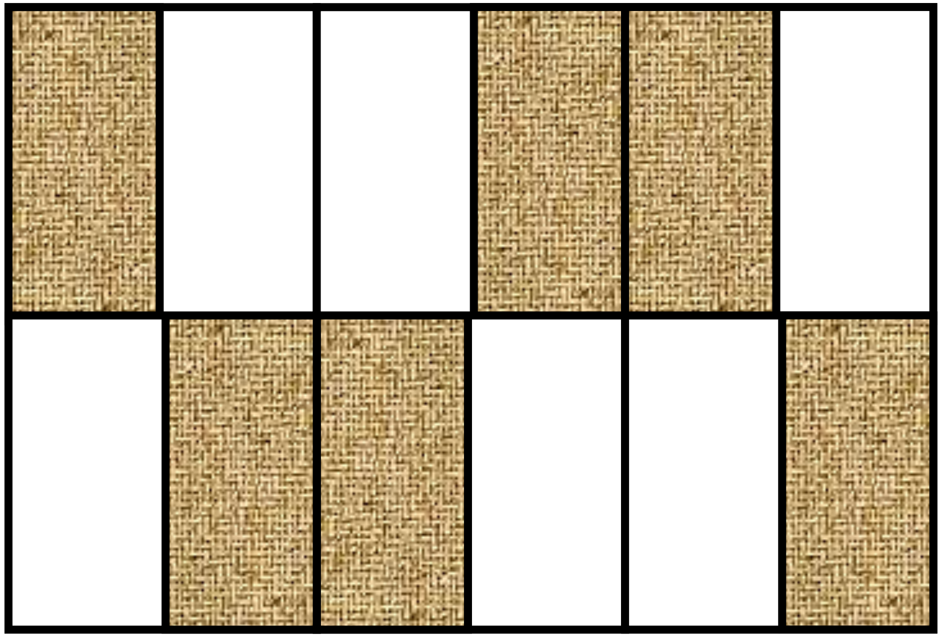
A)



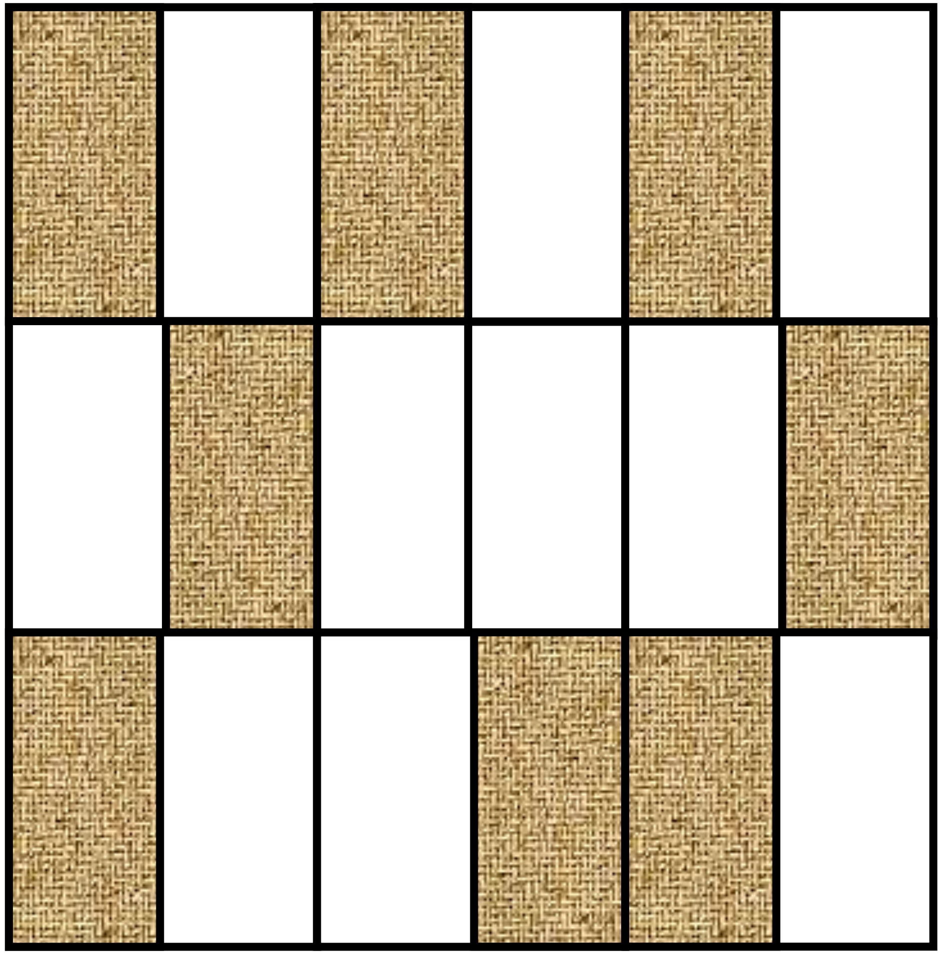
B)



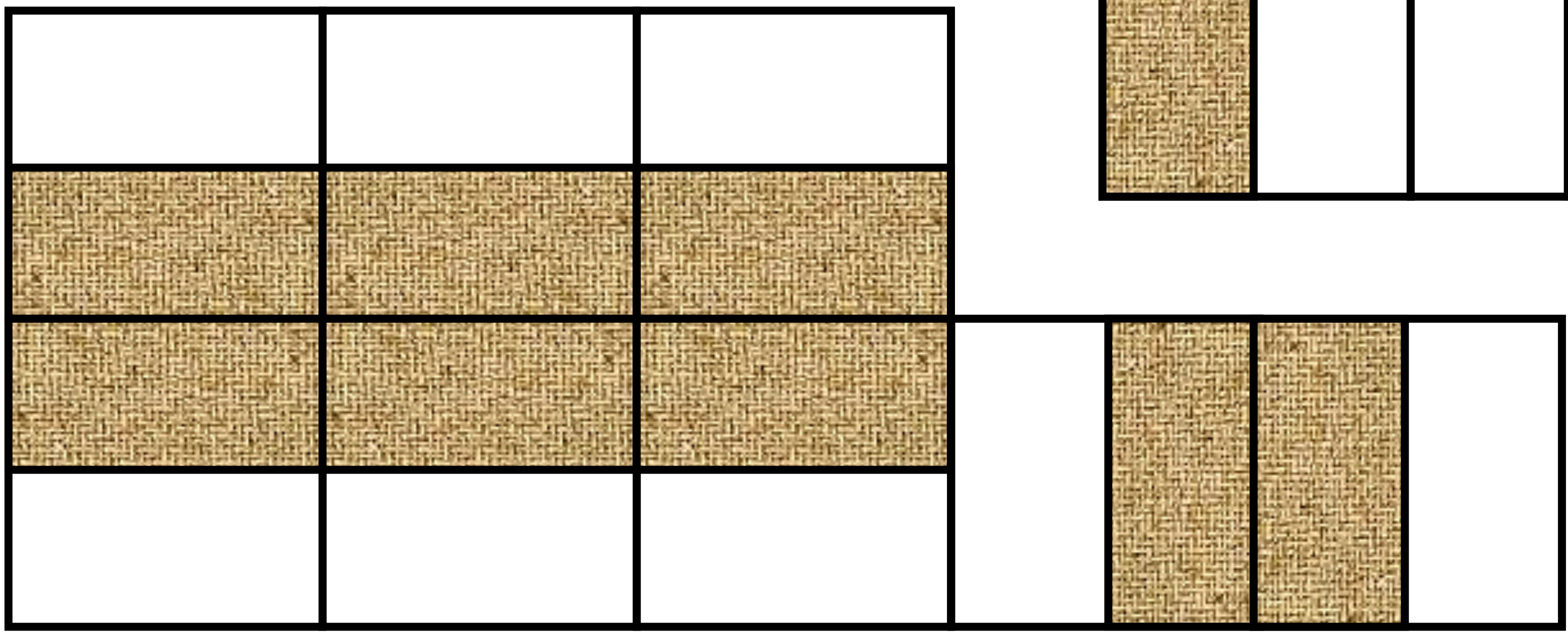
C)



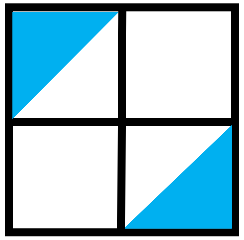
D)



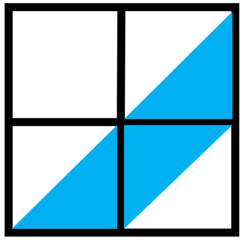
E)



Soru :

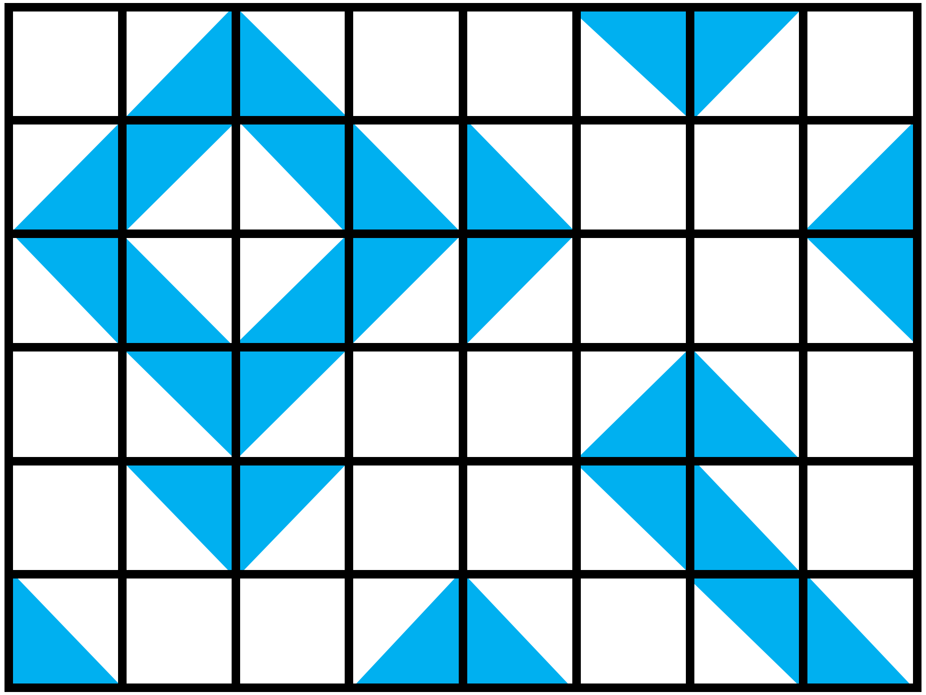


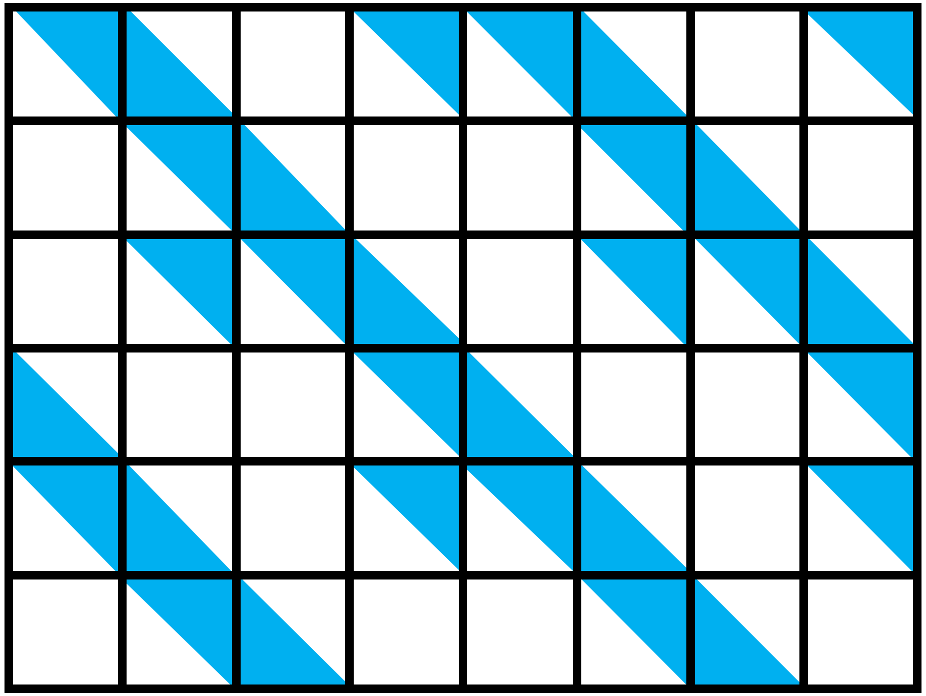
1.Motif



2.Motif

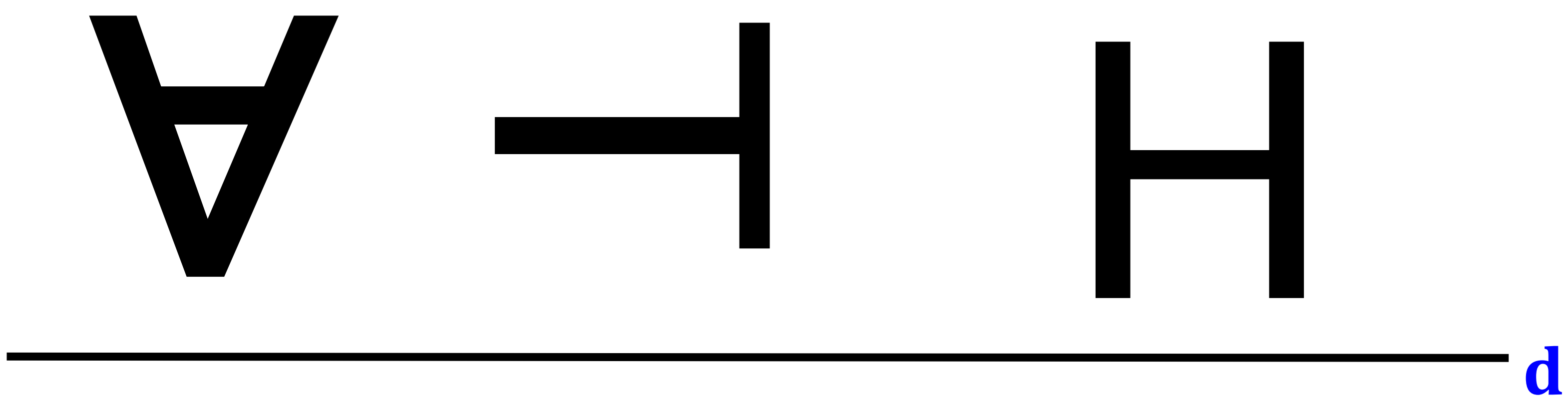
Yanda verilen eş büyüklükte kare biçimindeki motifler verilmiştir. Bunları kullanılarak çeşitli desenler oluşturuluyor. Bu desenlerdeki kullanılan motif sayısını bulunuz.





Soru : **Altta verilen harflere alttaki aşamalar uygulandıktan sonra oluşan harf sırasını d doğrusunun altına yazınız.**

1. **Son harf en başa, diğerleri de sağa ötelenir.**
2. **İkinci harfin d doğrusuna göre simetrisi alınır.**
3. **Son harf saat yönünün tersi yönünde 90° döndürülür.**



Soru : **Altta verilen sayı grubu merkez nokta etrafında saat yönünde 4590° döndürülürse sayı grubunun yeni durumunu bulunuz.**

0	**1**
2	**3**

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 5. TÜREV

12. 3. 1. Limit ve Süreklilik

Terimler ve Kavramlar: **Bir noktada limit, sağdan limit, soldan limit, süreklilik**

12. 5. 1. 1. **Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limit ve sağdan limit kavramlarını açıklar.**

A) **Limit kavramı bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasından hareketle, tablo ve grafikler yardımıyla açıklanır.**

B) **Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.**

C) **Cauchy'nin çalışmalarına yer verilir.**

12. 5. 1. 2. Limit ile ilgili özellikleri belirterek uygulamalar yapar.

A) Polinom, köklü, üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar içeren limit uygulamaları yapılır ancak sonsuz için limit, sonucu $\mp\infty$ olan durumlara girilmez.

B) Sadece pay ve paydası çarpanlarına ayrılarak belirsizliğin kaldırılabileceği limit örneklerine yer verilir.

12. 5. 1. 3. Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğini açıklar.

A) Fonksiyonun grafiği üzerinde sürekli ve süreksiz olduğu noktalar buldurulur.

B) Limitin tarihsel gelişiminden ve Salih Zeki'nin bu alana katkılarından bahsedilir.

C) Bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla süreklilik uygulamaları yaptırılır.

5. ÜNİTE : TÜREV

Limit Ve Süreklilik

Limit

y = f (x) = 5 – x fonksiyonunun x ve y değerlerinin alttaki tablosunu inceleyelim.

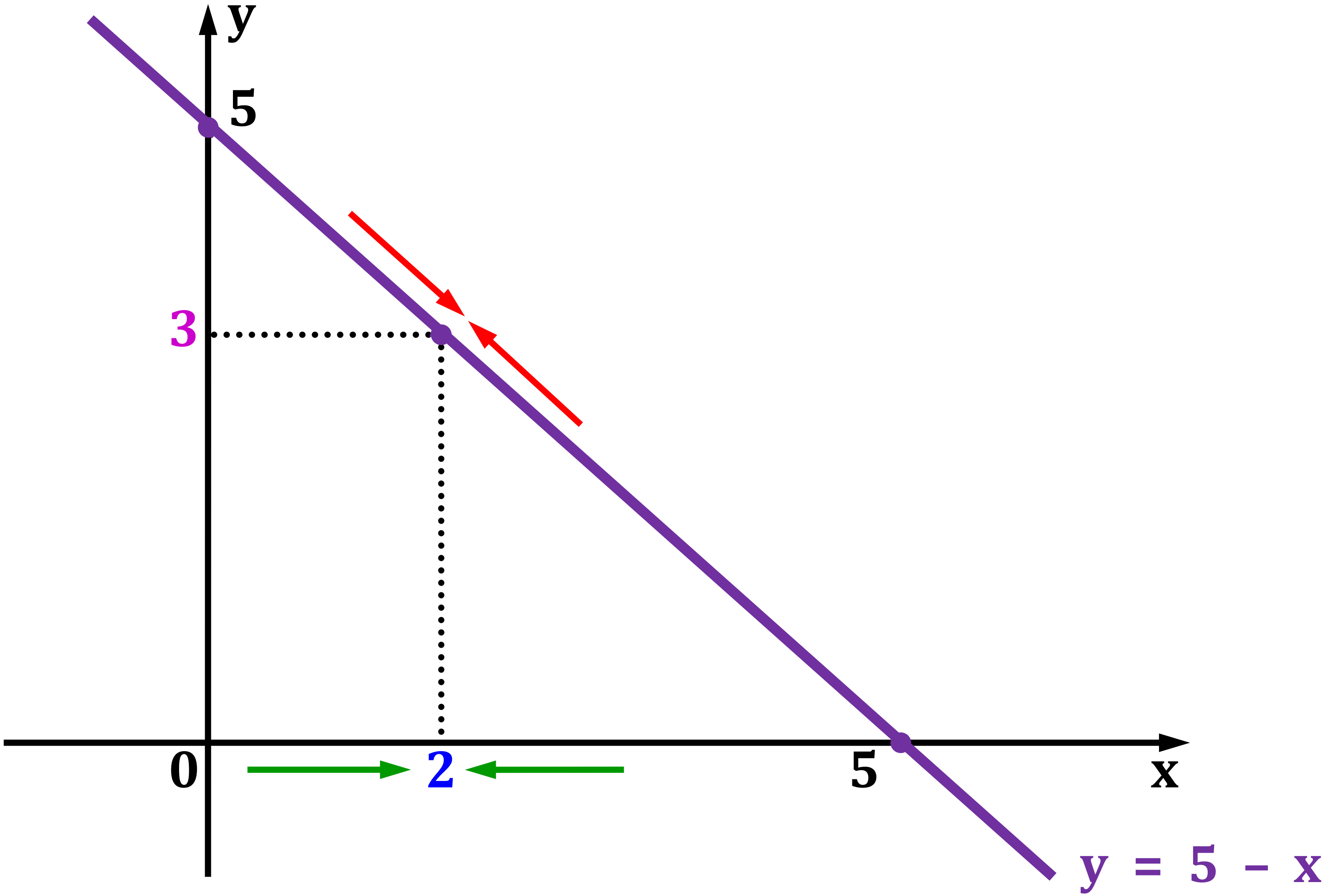
x	. . .	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03	. . .
y	. . .	3,03	3,02	3,01	3	2,99	2,98	2,97	. . .

Tablodan da görüldüğü gibi x sayısı 2 'ye yaklaştıkça, x sayısına karşılık gelen y sayısı da 3 sayısına yaklaşıyor.

Tablo değerlerini fonksiyonun grafiği üzerinde de görebiliriz. Bunun için doğrusal fonksiyonun grafiğini çizelim.

$x = 0$ için $y = 5 - 0 = 5$

$y = 0$ için $0 = 5 - x$ ise $x = 5$ bulunur.



Tanım : **$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a ve $l \in \mathbb{R}$ için; x değeri a sayısını alırken $f(x)$ fonksiyonunun sonucu l değerini alıyorsa, " $f(x)$ 'in limiti l 'dir " denir.**

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$ **olarak gösterilir.**

Günlük dilde " limit " kelimesi bir miktar, bir fikir ya da herhangi bir şeyin ötesine geçemeyeceği sınırları tanımlamak için kullanılır.

Bizim işleyeceğimiz konuda ise limitin tanımı " x değerine yaklaşılırken grafik üzerinde fonksiyonun yaklaştığı değer " olarak adlandırılır.

Kural 1: **Özel durumlar hariç (sağdan – soldan limit, belirsizlikler)** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ **olarak alınır.**

Yani f fonksiyonunda x yerine a sayısını kullanır ve sonucu buluruz.

Soru : $\lim_{x \to 5} (3x^2 - 4x + 7) = ?$

Soru : $\lim\limits_{x \to 3} (x^4 + 3x - 1) - \lim\limits_{x \to -2} (9 - x^3) = ?$

Soru : $$\lim_{x \to -13} \left(\frac{\sqrt[3]{12 - 4x}}{3x + 27} \right) = ?$$

Not : a ve c $\in \mathbb{R}$ için;

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \mp \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

4) $\lim\limits_{x \to a} [c.f(x)] = c.\lim\limits_{x \to a} f(x)$ olarak alınır.

V.b. kurallar çoğaltılabilir.

Soru : **$f(x) = 4 + 6x$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre ;**

A) $\lim_{x \to -2} [f(x) + h(x)] = ?$

$f(x) = 4 + 6x \quad , \quad h(x) = x^2 - 3x + 2$

B) $\lim_{x \to 3} [f(x) . h(x)] = ?$

Soru : $f(x) = 5x - 7$, $h(x) = 4x^3 - 14x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre ;

A) $\lim_{x \to 2} [f(x)]^{h(x)} = ?$

$f(x) = 5x - 7$, $h(x) = 4x^3 - 14x + 1$

B) $\lim_{x \to -1} |h(x) - f(x)| = ?$

Soru : $f(x) = 3m + 6x - x^2 - 1$ **fonksiyonu veriliyor.**

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 31 - m$ **ise** $m = ?$

Soru : $f(x) = x^3 + 3x - 10 + k$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 2} f^2(x) = \lim\limits_{x \to -1} [f(x) - k + 23]$ ise $k = ?$

Soru : $\lim_{x \to \pi/6} [\sin x + \cos(6x)] = ?$

Soru :

$$\lim_{x \to 60^\circ} \frac{8 \sin x \,.\, \tan x}{\cos x} = ?$$

Soru : $\lim_{x \to \pi/12} \left[\cos^2 x - \sin^2 x + \tan(x - 15^\circ) \right] = ?$

Soru : $\lim_{x \to \pi/4} \arccos(\tan x) = ?$

Soru : $\lim_{x \to 1} [\arcsin x + \arctan(1 - x)] = ?$

Soru :

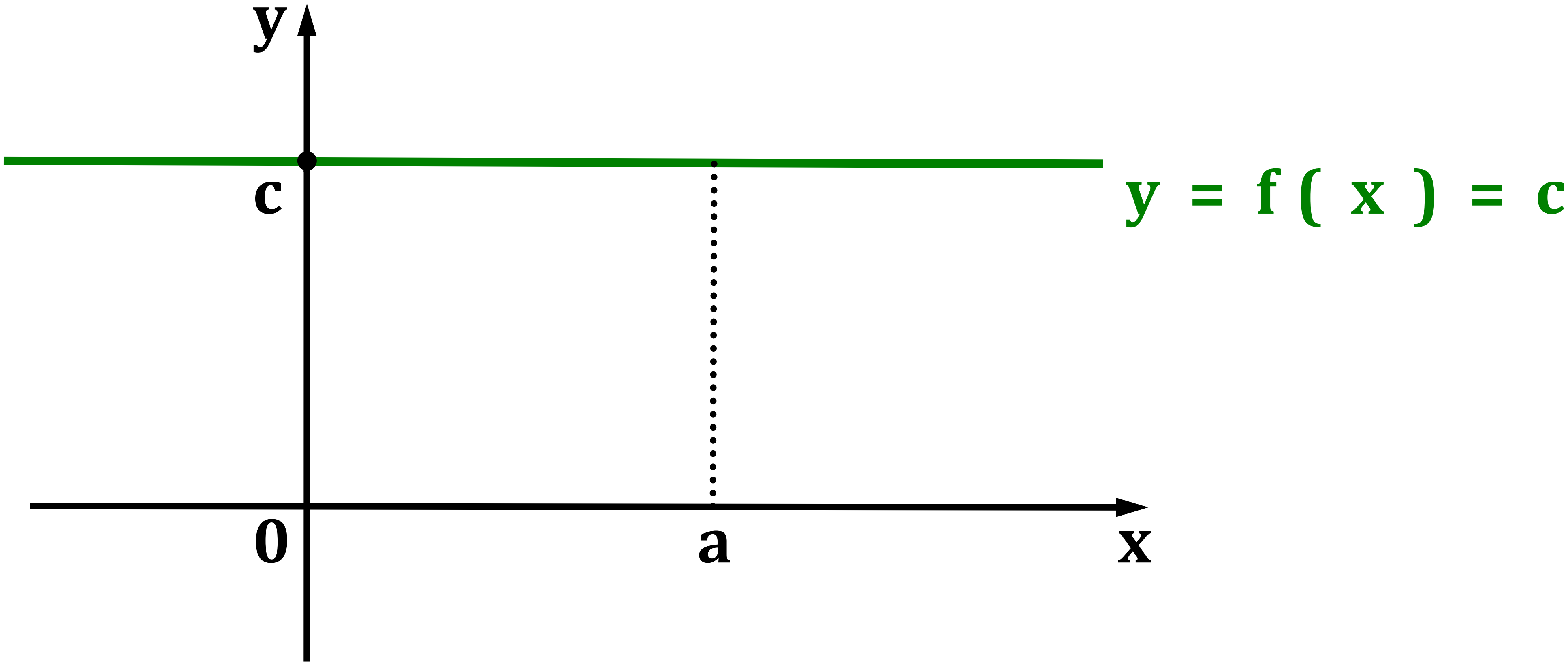
$$\lim_{x \to 125} \left(\log_{25} x^{5} \right) = ?$$

Soru :

$$\lim_{x \to -6} \left[\log_2(x+126) - \log_2(9-x) \right] = ?$$

Kural 2: $f(x) = c$ (c sabit, $c \in \mathbb{R}$) **sabit fonksiyonunun sonucu, x bir a ($a \in \mathbb{R}$) sayısına gitse de değişmez.**

$\lim_{x \to a} f(x) = c$ olarak alınır.



Soru : $f(x) = 5$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \to 4} f(x) + \lim_{x \to -7} f^3(x) = 2m - 14$$ ise $m = ?$

Soru : $f(x) = kx - 4x + 3k - m + 6$ fonksiyonunda her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to a} f(x) = 10$ ise $k \cdot m = ?$

(**Hatırlatma :** **Sabit fonksiyonda x'li terim bulunmazdı.** **Sabit dizi konusunda da işlemiştik.)**

Soru : $f(x) = \dfrac{2mx - 5}{24x + 30}$ fonksiyonunda her $a \in \mathbb{R}$ için

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$ ise $k + m = ?$

(**Hatırlatma :** **Sabit fonksiyon kesirli verilirse benzer terimlerin oranları birbirine eşittir.**)

Tanım : 1) $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ sayısına soldan yaklaşırken aldığı değere f fonksiyonunun " soldan limiti " adı verilir ve $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ile gösterilir.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$ değerine de fonksiyonun " soldan limit değeri " adı verilir.

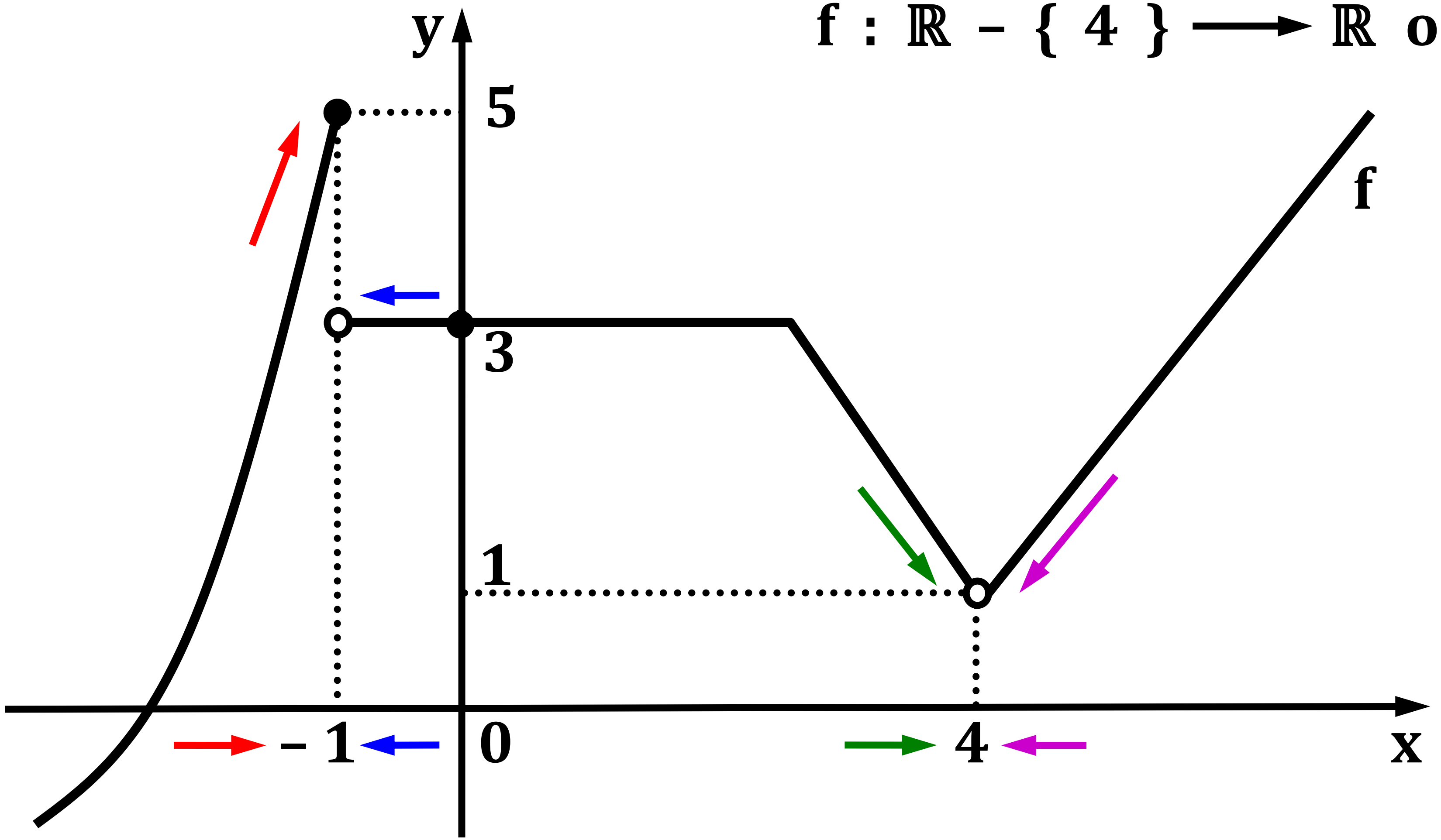
2) $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ sayısına sağdan yaklaşırken aldığı değere f fonksiyonunun " sağdan limiti " adı verilir ve

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ ile gösterilir.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_2$ değerine de fonksiyonun " sağdan limit değeri " adı verilir.

Örneğin alttaki grafiği verilen fonksiyonu inceleyelim.

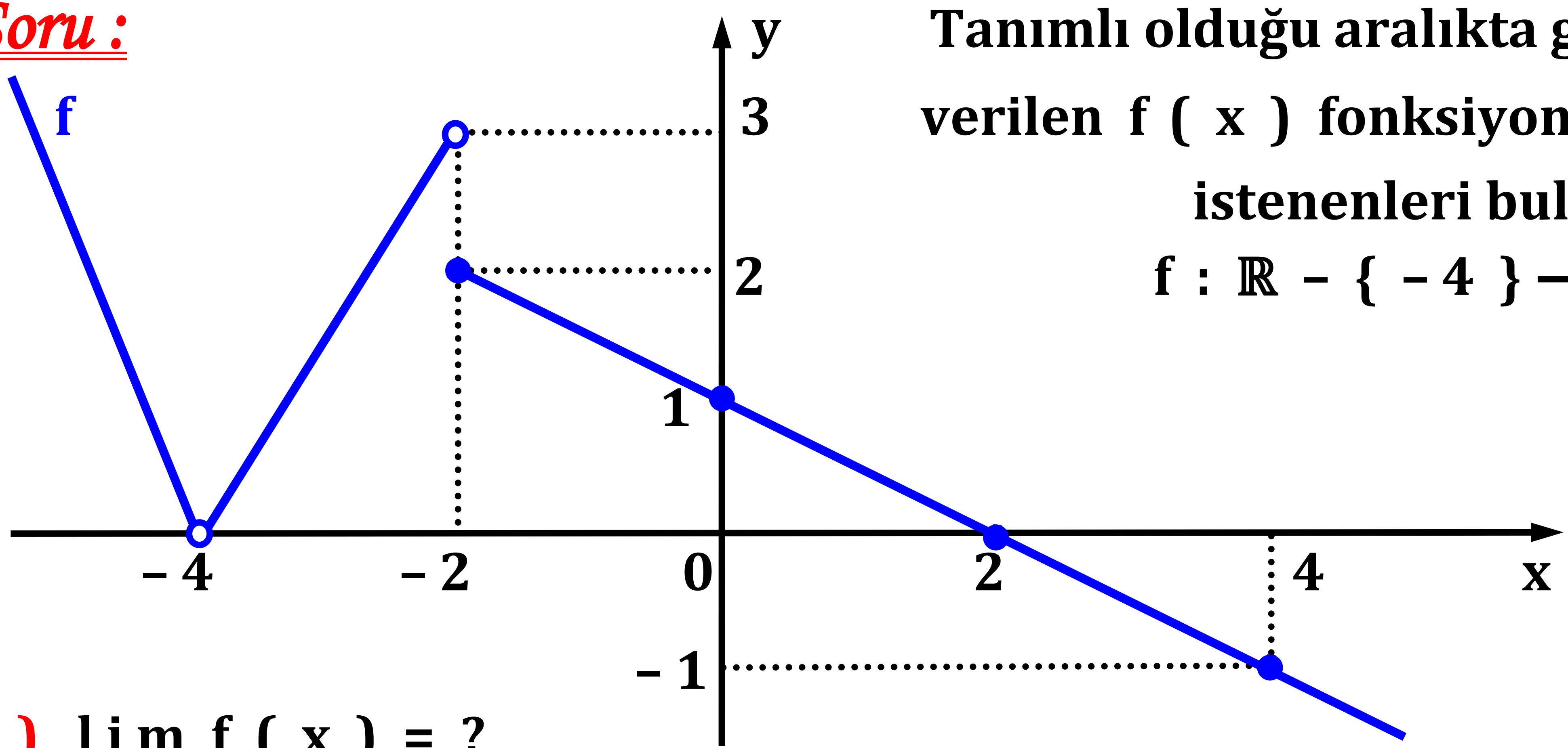
$f : \mathbb{R} - \{ 4 \} \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun.



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 5 \quad , \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 \quad , \quad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1$$ **olarak bulunur.**

Soru :

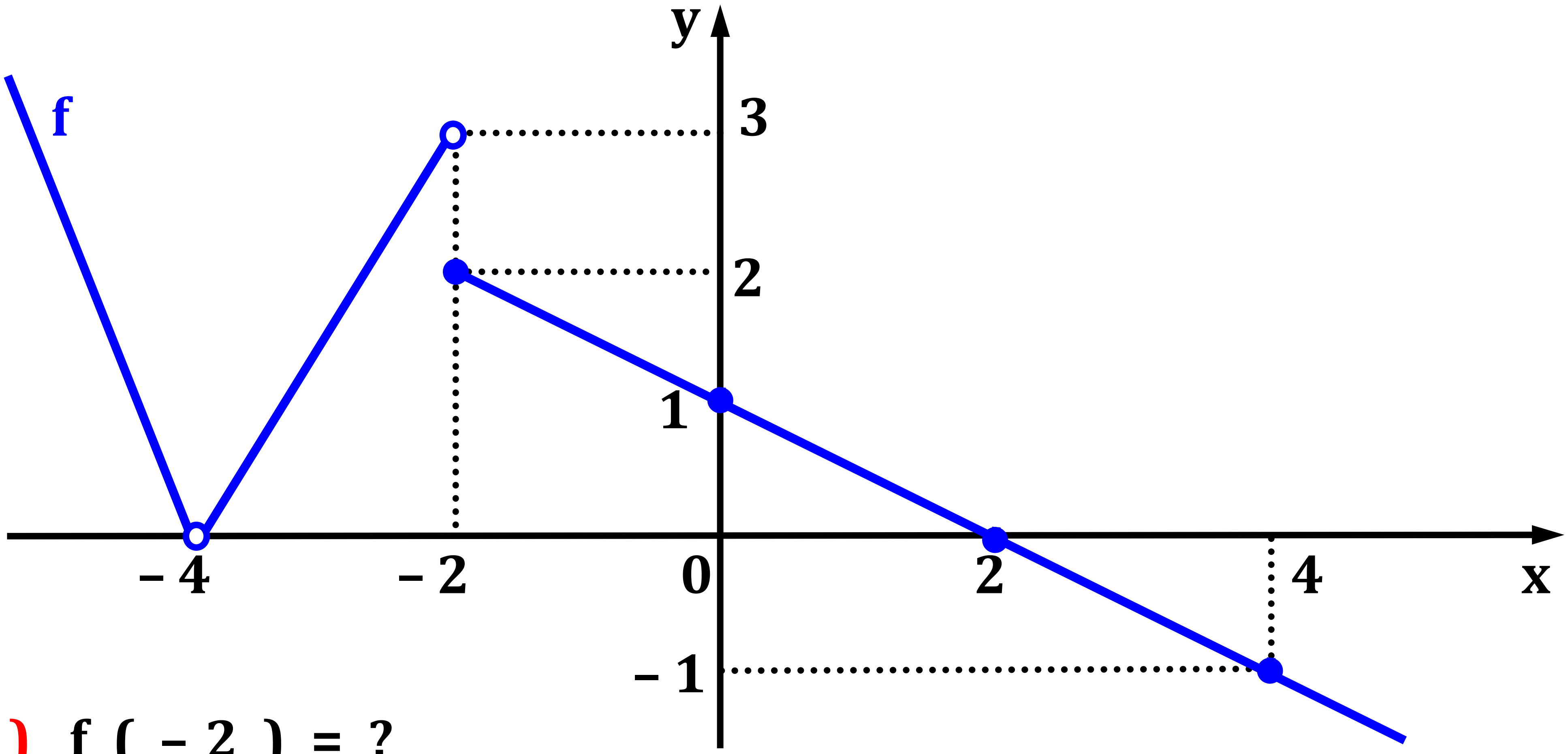


Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f (x) fonksiyonu için istenenleri bulunuz.

$f : \mathbb{R} - \{-4\} \longrightarrow \mathbb{R}$

A) $\lim\limits_{x \to -2^{+}} f(x) = ?$

B) $\lim\limits_{x \to -2^{-}} f(x) - \lim\limits_{x \to 4^{+}} f(x) = ?$



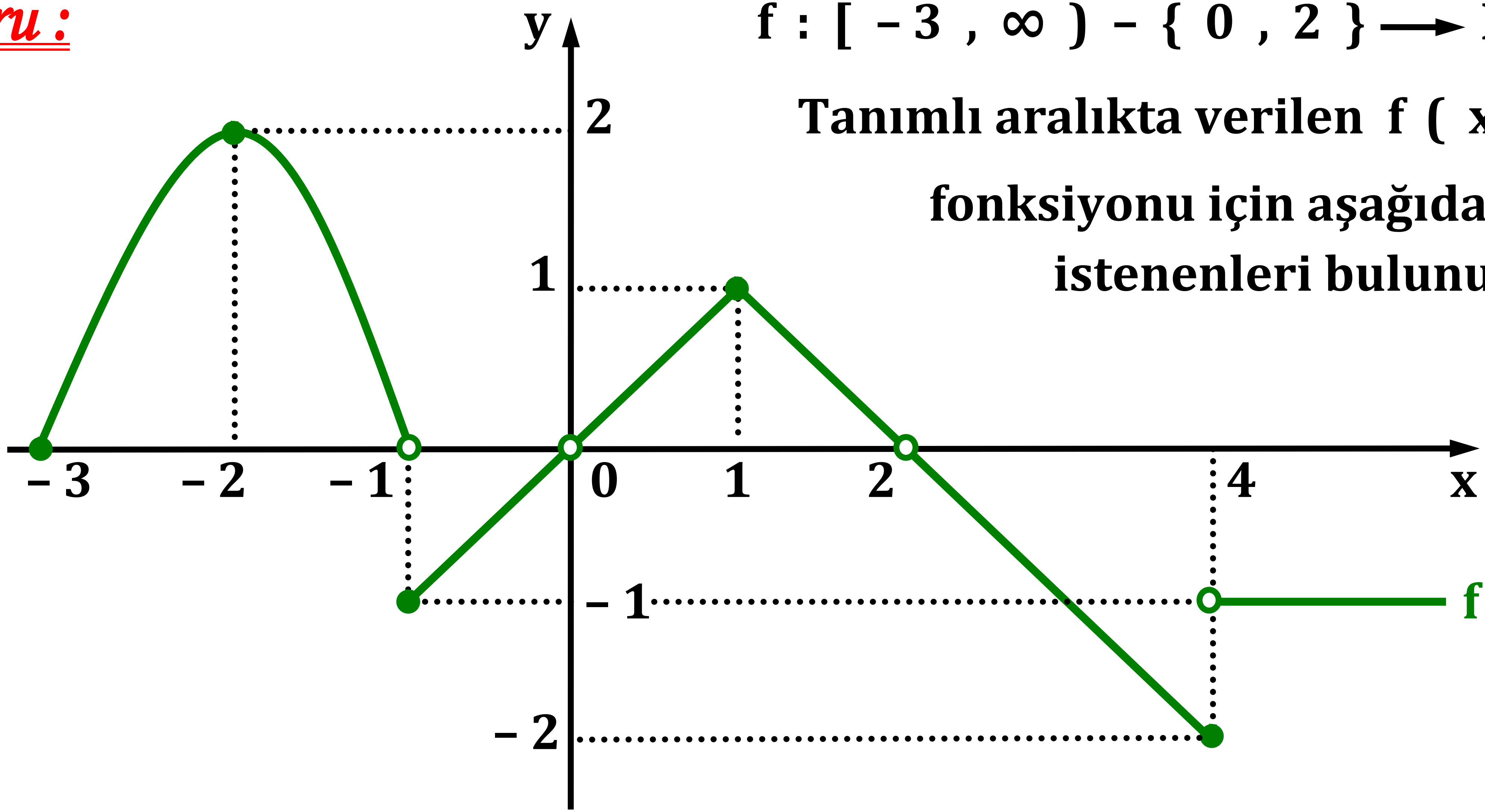
C) $f(-2) = ?$

D) $\lim_{x \to 0^+} f(x) + \lim_{x \to -4^-} f(x) = ?$

Soru :

$f : [-3, \infty) - \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

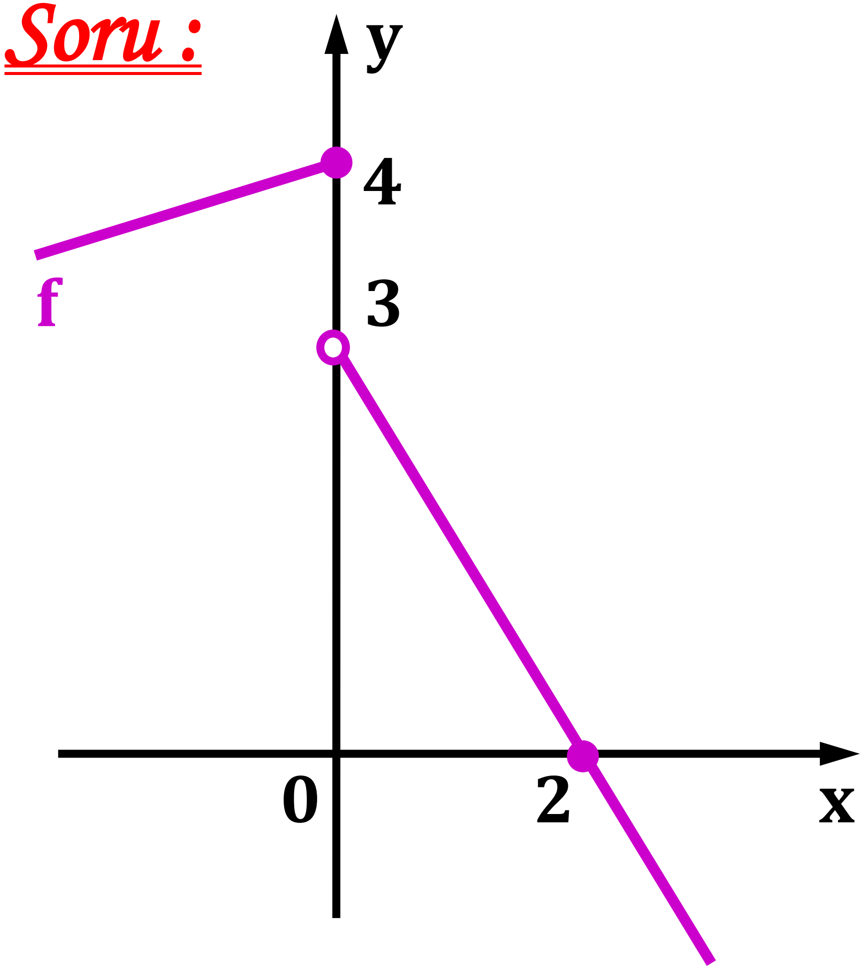
Tanımlı aralıkta verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki istenenleri bulunuz.

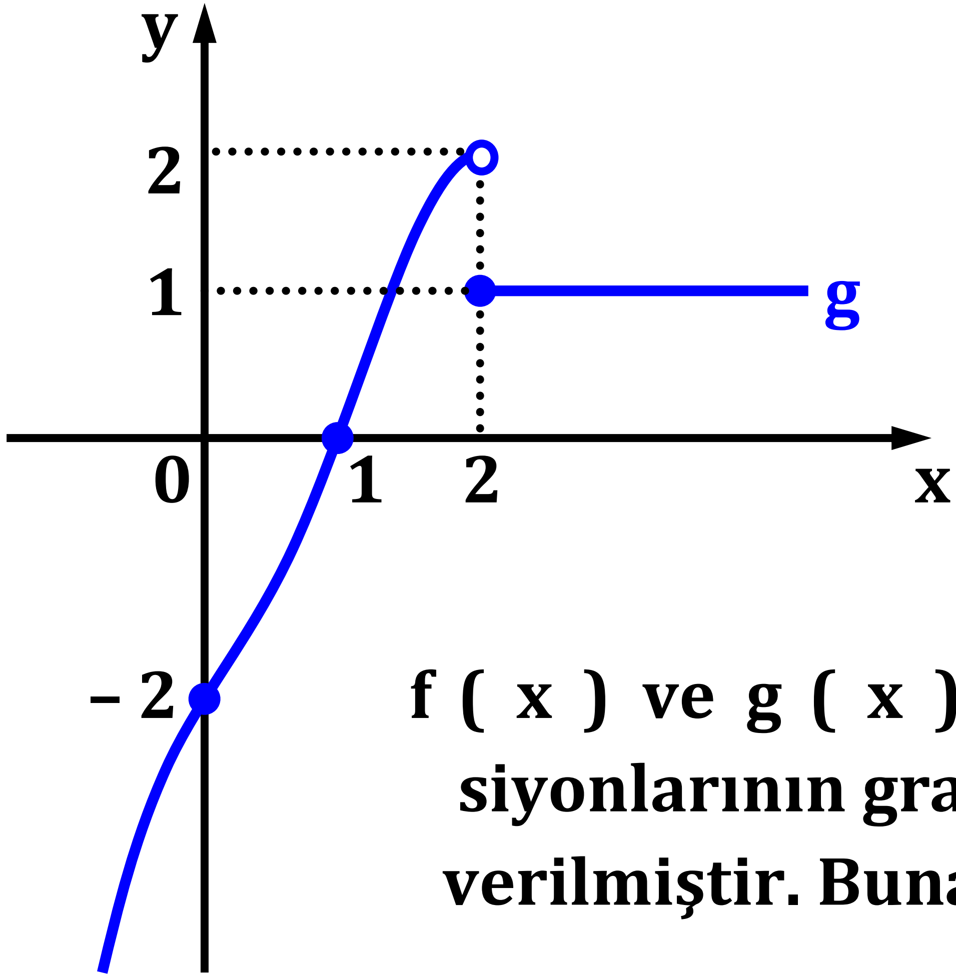


A) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = ?$

B) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) - \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = ?$

Soru :

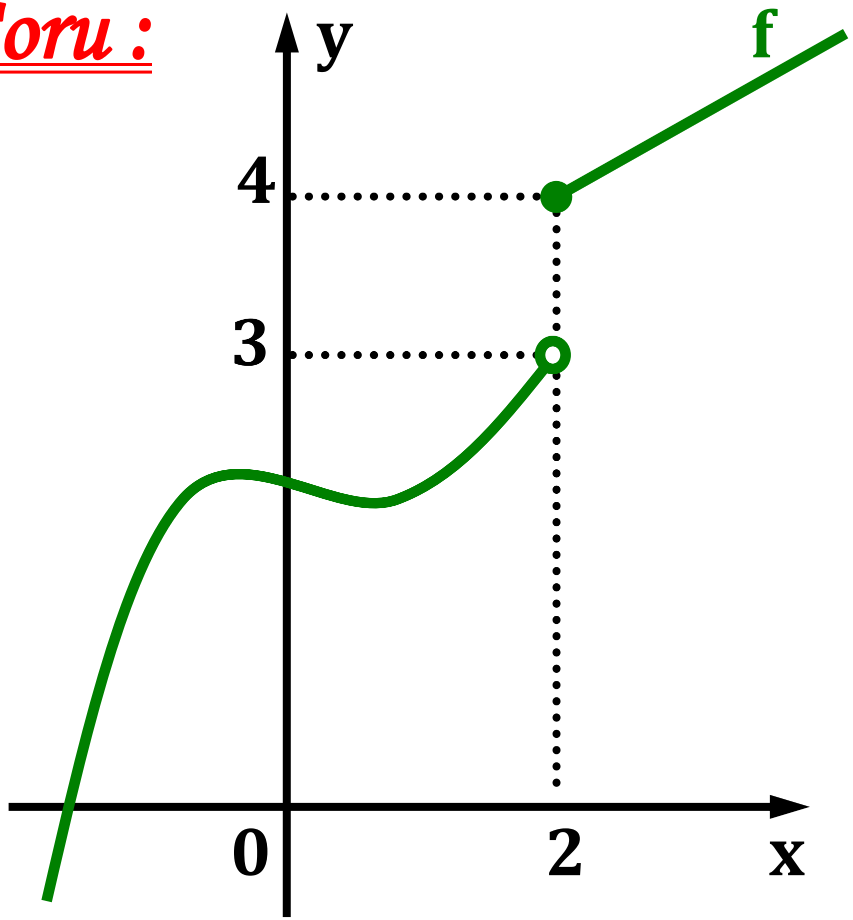


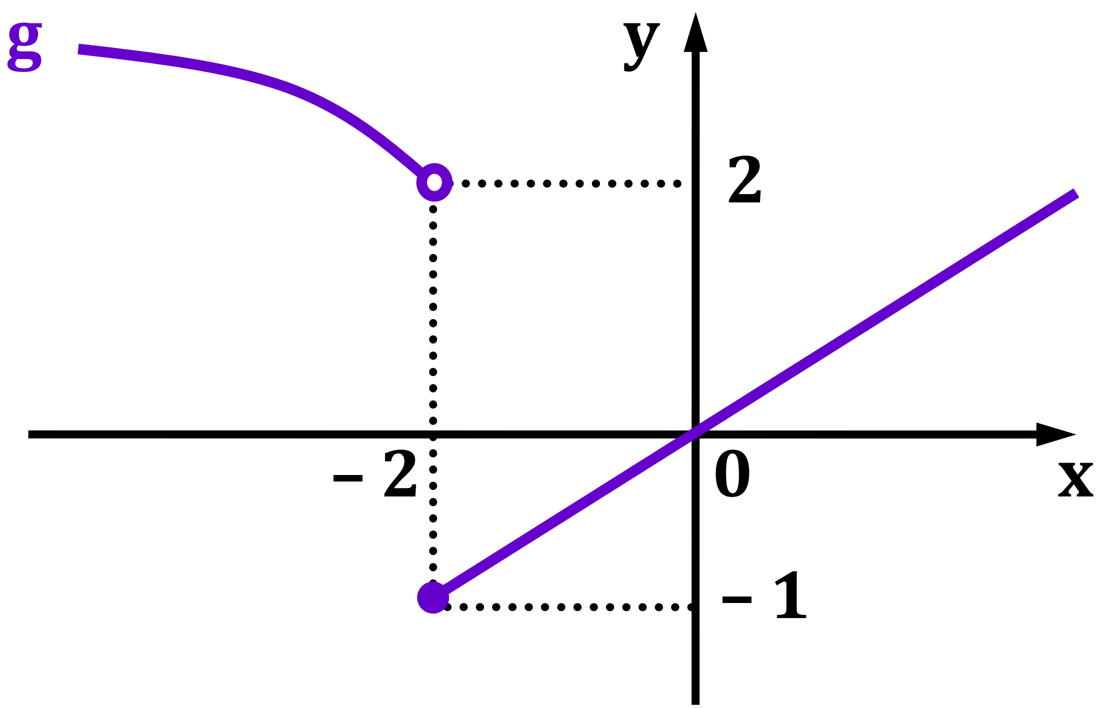


f (x) ve g (x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre;

A) $\lim\limits_{x \to 0^-} [f(x) + g(x)] = ?$ **B)** $\lim\limits_{x \to 2^+} [5g(x) - f(x)] = ?$

Soru :



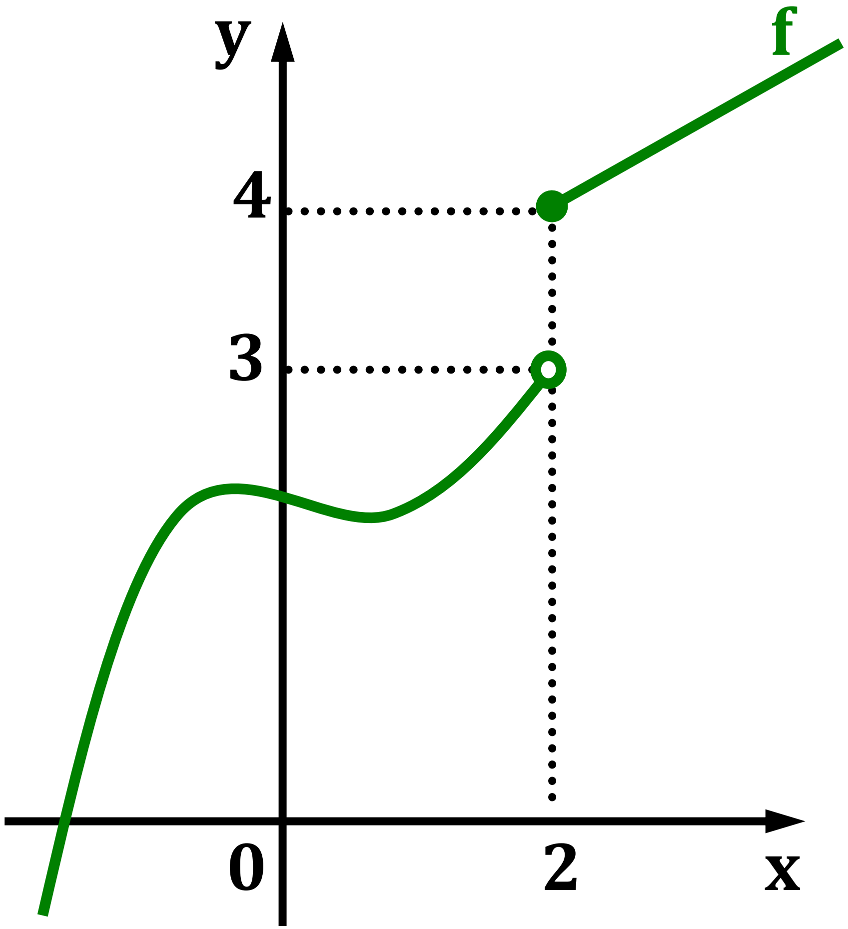


f (x) ve g (x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre;

$$\lim_{x \to 2^+} [\, f(x) + g(-x) \,] = ?$$

(x sayısı için limit değeri bilinmeyen fonksiyonda x 'in yerine, yaklaşılan tarafa göre yaklaşık bir değer için limit sonucu kullanılır.)

2. yol: $g(-x)$ fonksiyonunun grafiği çizilip istenenler bulunabilir. Grafiğin y eksenine göre simetriği çizilirdi. (11. Sınıf)

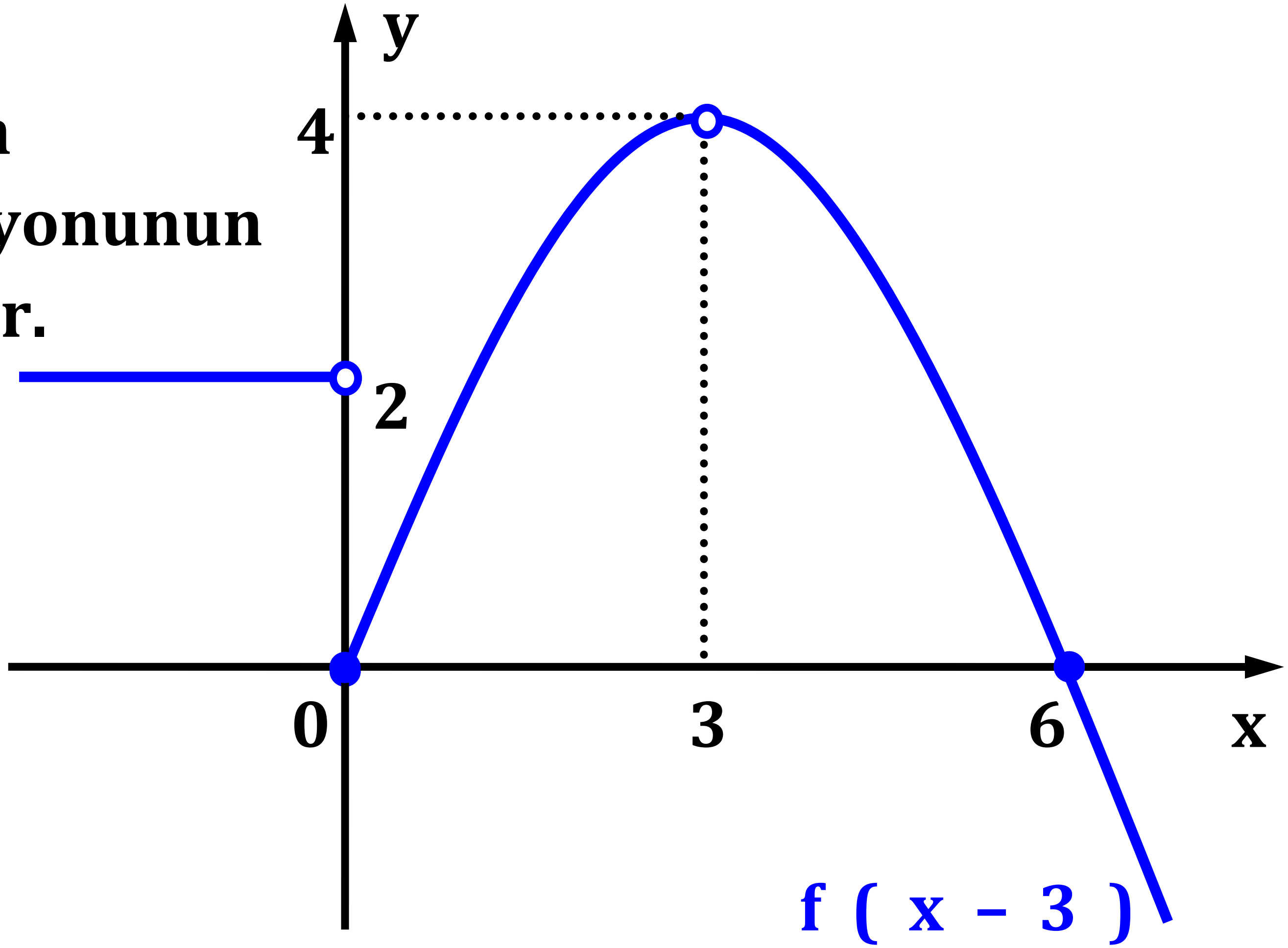


$$\lim_{x \to 2^+} [f(x) + g(-x)] = ?$$

Soru :

Tanımlı olduğu aralıkta $y = f(x - 3)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. buna göre;

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = ?$$



(İstenilen x değerinin limitini bulmak için x 'e <u>yaklaşılan tarafa</u> uygun yaklaşık bir değer alınır. <u>Bu sayıyı verecek</u> grafik üzerinden bir sayı seçilir ve bu sayı için limit bulunur.)

2.yol: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilir ve istenen limit değerleri bulunur. $f(x-3)$ verildiği için grafik ilk haline yani 3 br sola kaydırılır.

Kural 3: f (x) fonksiyonunun x = a sayısına soldan ve sağdan yaklaşırken aldığı değer (l) aynı oluyorsa, fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır.

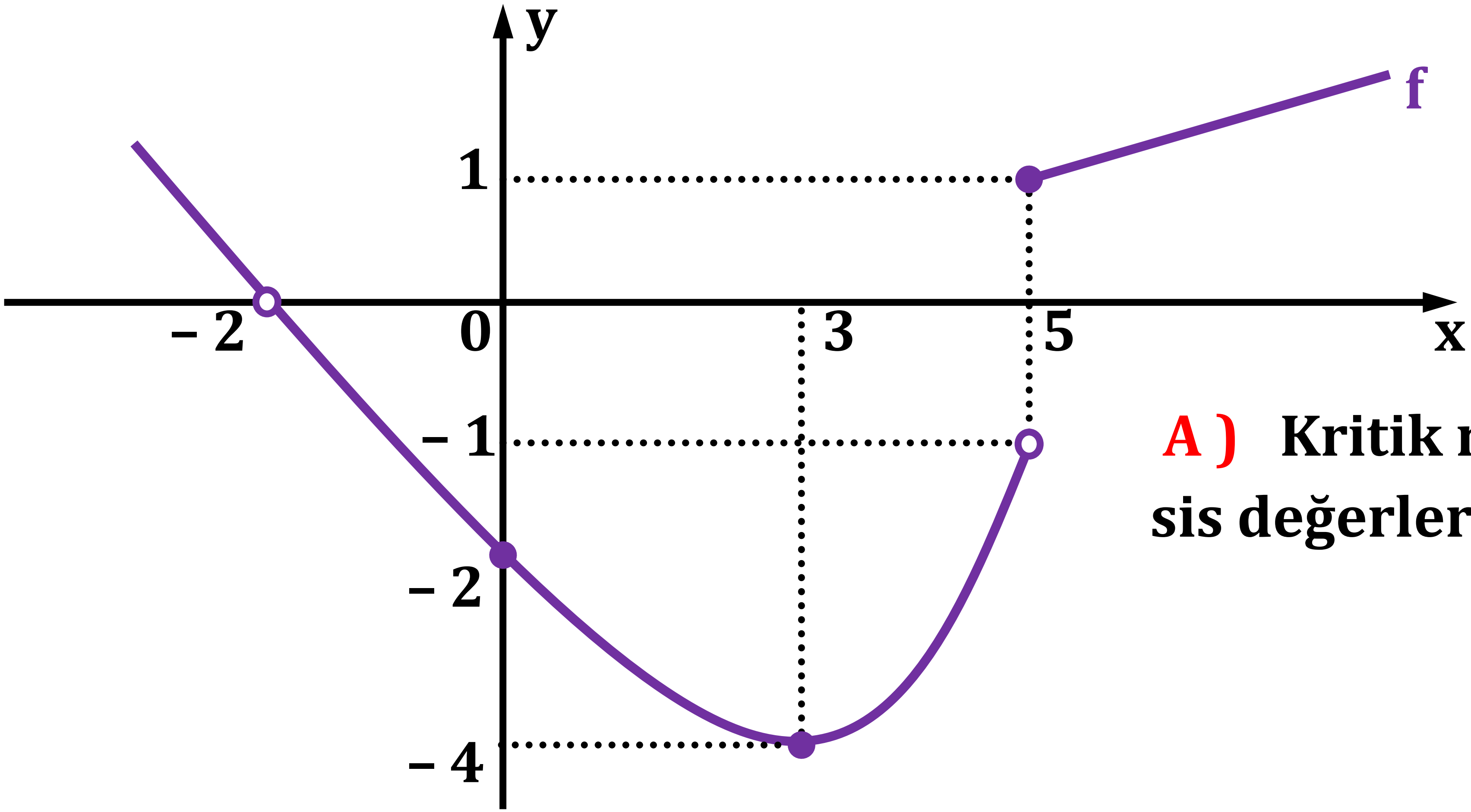
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = l_2 \quad \text{olup} \quad l_1 = l_2 \quad \text{ise}$$

fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır.

$l_1 = l_2 = l$ olarak alınıp $\lim_{x \to a} f(x) = l$ sonucu bulunur.

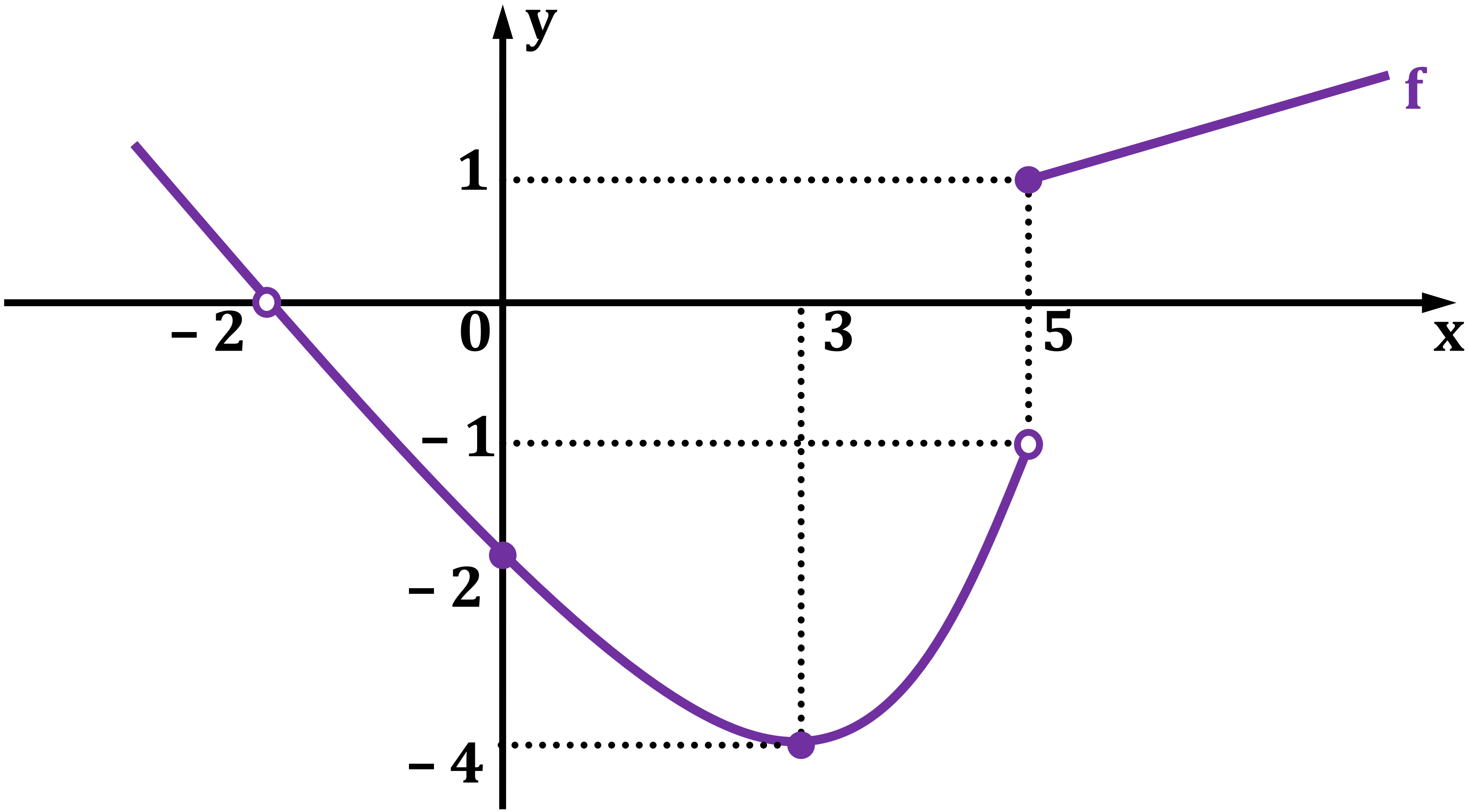
Tanım : Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk (grafikte; kesiklik, atlama gibi) olan noktalara " kritik nokta " adı verilir.

Soru : Aşağıda tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f (x) fonksiyonu için istenenleri bulunuz. $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$



A) Kritik noktaların apsis değerlerini söyleyiniz.

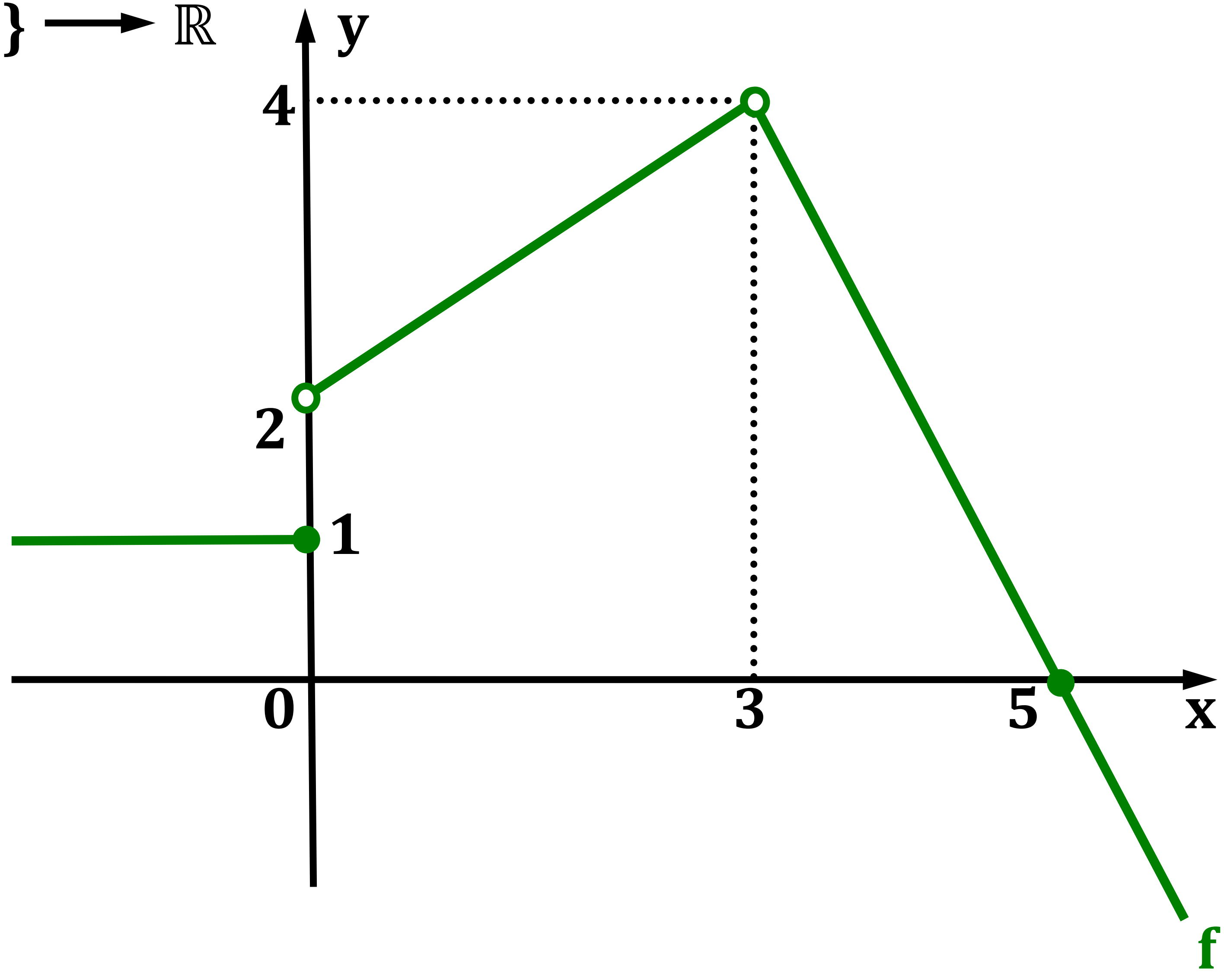
B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$



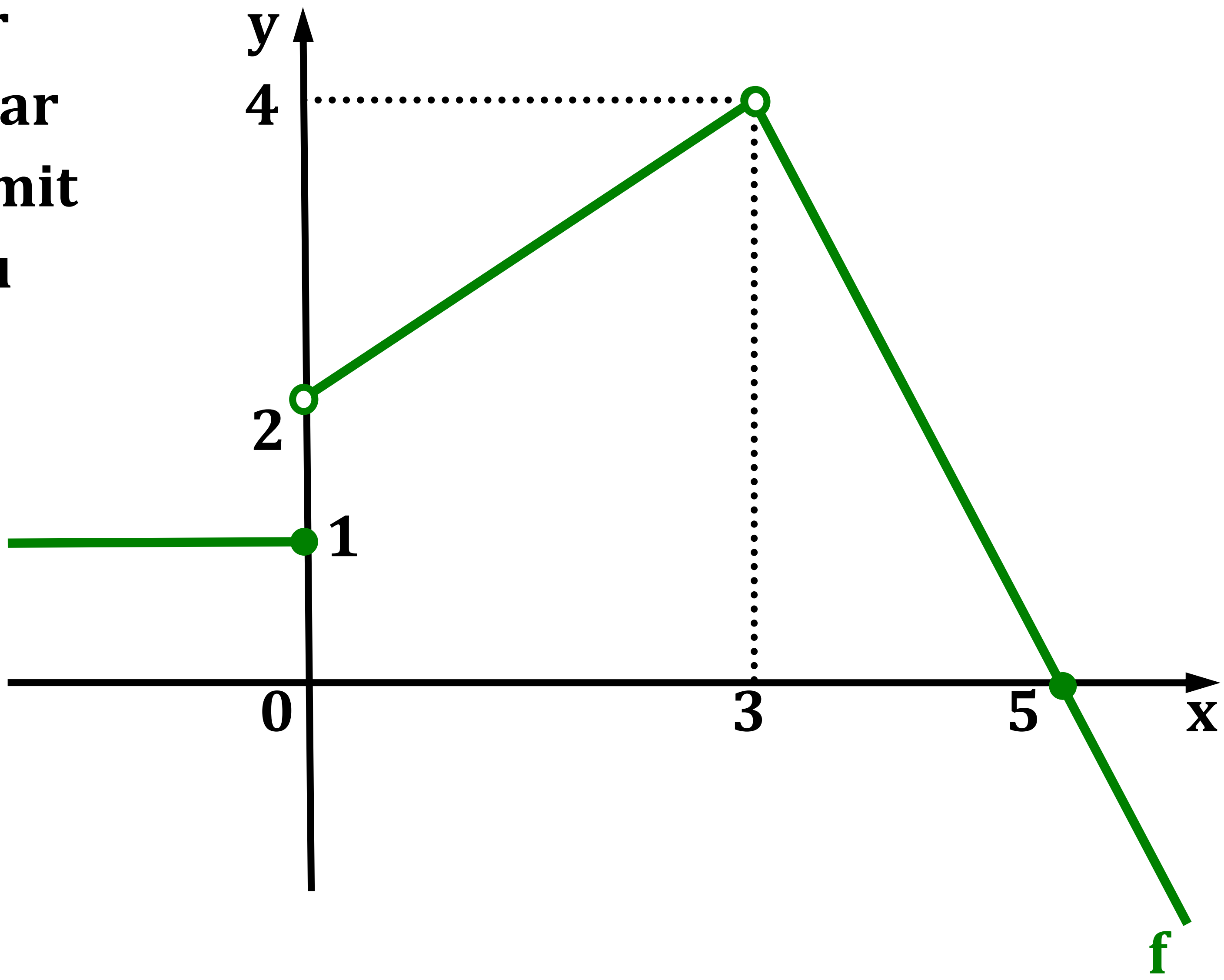
C) $\lim_{x \to 5} f(x) = ?$

D) $\lim_{x \to 3} f(x) = ?$

Soru : Aşağıda tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f (x) fonksiyonunun grafik üzerinde; **A)** Verilen hangi x değerleri için limit vardır ? $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

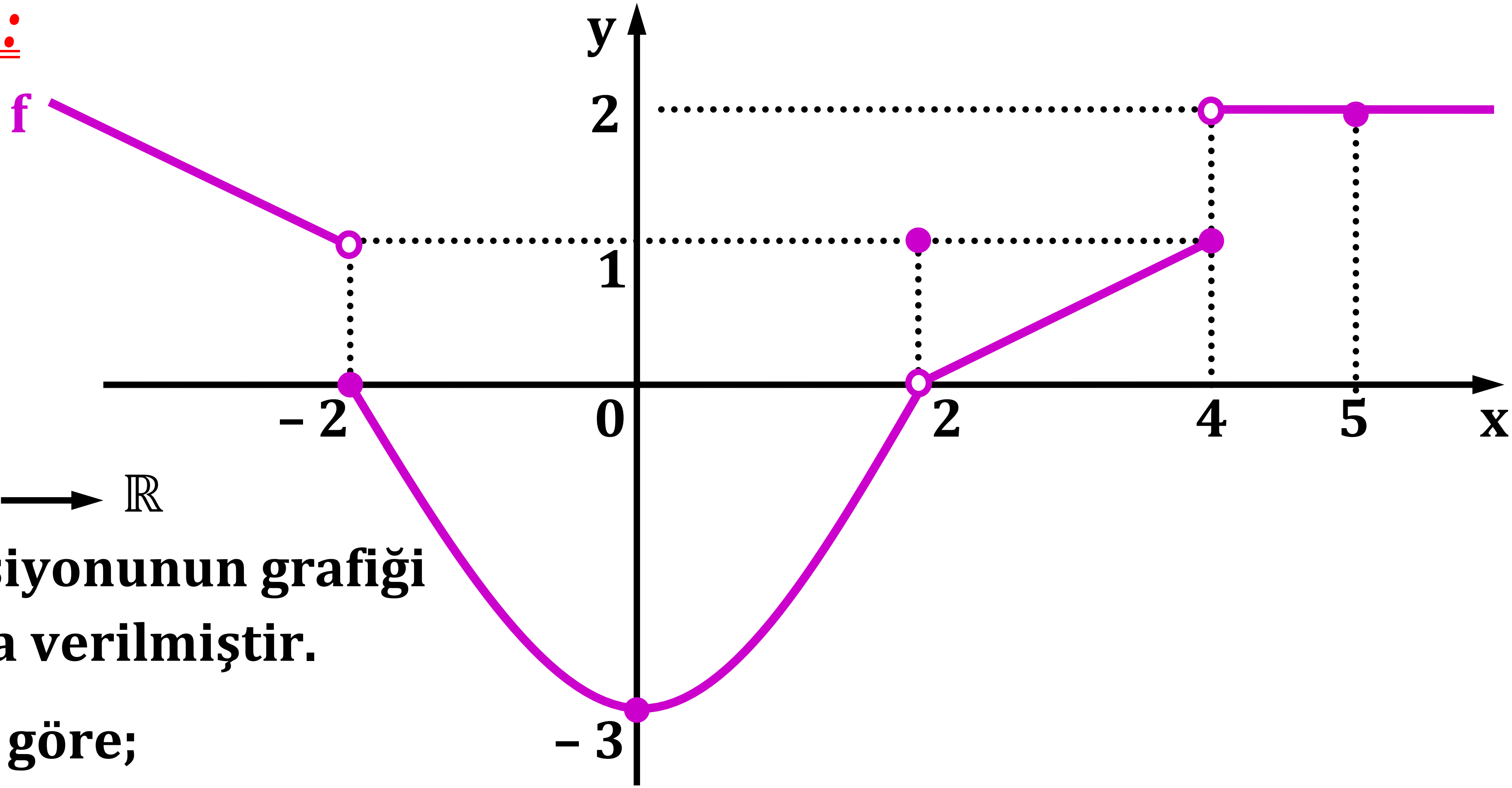


B) **Verilen noktalar düşünülerek limiti var olan noktalardaki limit değerlerinin toplamı kaç olur ?**



C) **Kritik noktaların apsisleri toplamı kaç olur ?**

Soru :

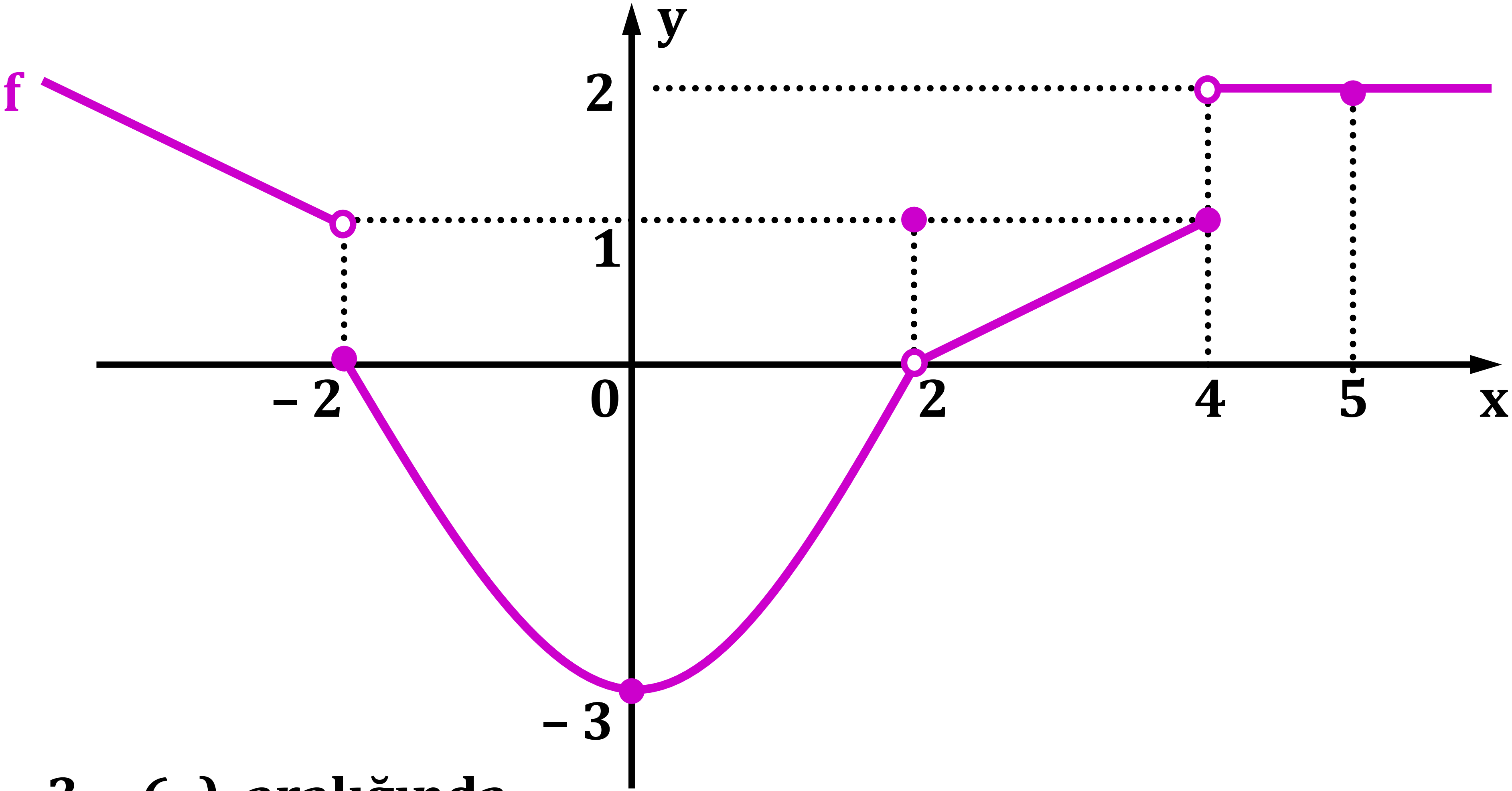


f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre;

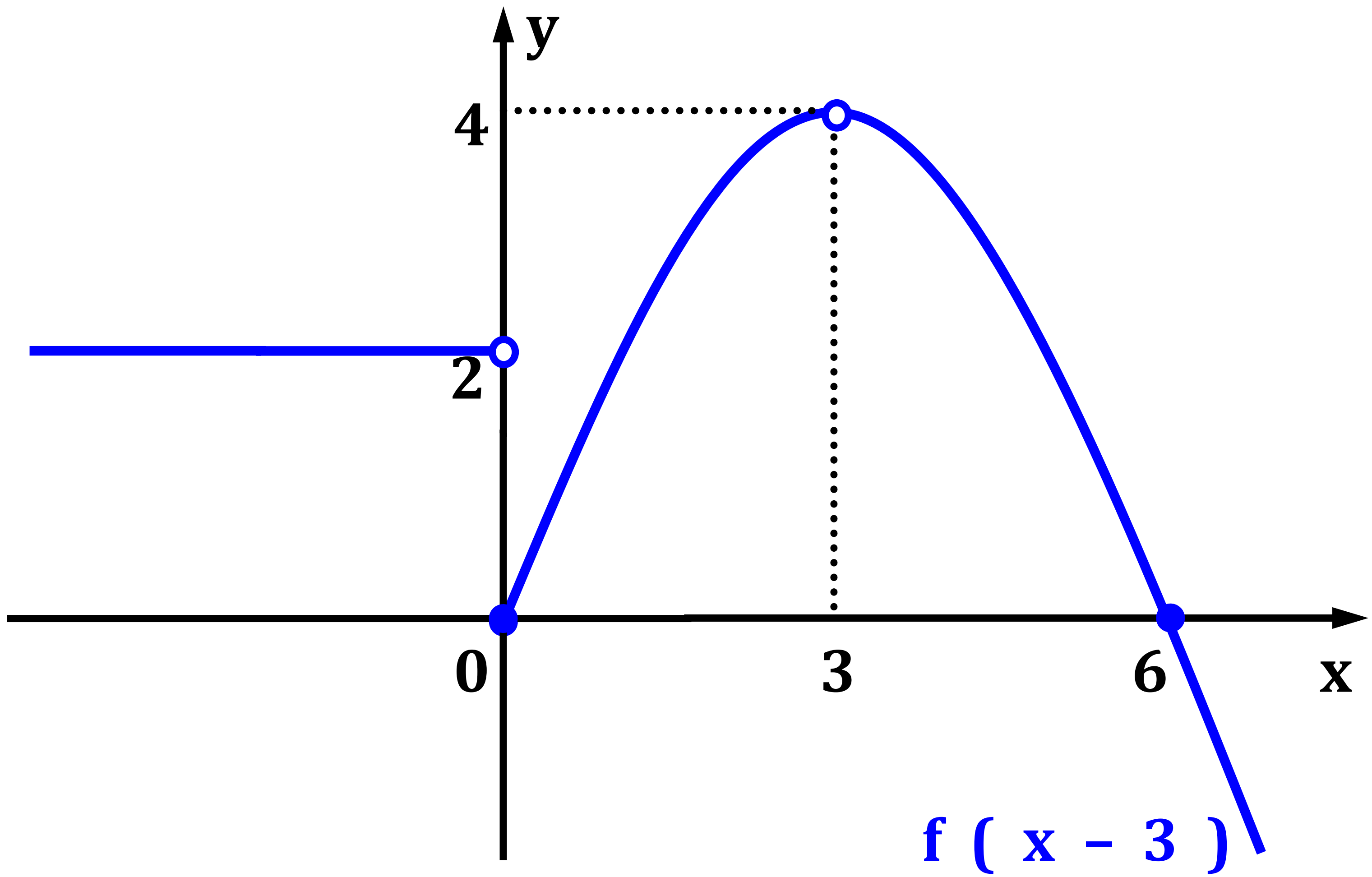
A) Verilen noktalardan, limiti var olan noktalardaki limit değerlerinin toplamını bulunuz.



B) (– 3 , 6) aralığında hangi x tam sayı değerleri için fonksiyonun limiti vardır ?

(Verilen noktalar denmiyor. Aralıktaki gizli x değerleri kontrol edilir.)

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta y = f (x – 3) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. f (x) fonksiyonunun grafiğinde <u>verilen noktalar düşünülerek</u> fonksiyonun limitinin var olduğu noktalardaki x değerlerini bulunuz.

Kural 4: (Parçalı Fonksiyonun Limiti)

$$f(x) = \begin{cases} K(x), & x < a \text{ ise} \\ M(x), & x = a \text{ ise} \\ N(x), & x > a \text{ ise} \end{cases}$$ parçalı fonksiyonu verilsin.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} K(x) = l_1$$ ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} N(x) = l_2$$ değerleri bulunur.

- $l_1 = l_2$ ise fonksiyonun $x = a$ noktasında limiti vardır. $x = a$ parçalı fonksiyonun sınır noktasıdır.
- $x = b$ değeri sınır noktası değilse fonksiyonun limit değeri b 'nin bulunduğu yere göre $f(b)$ olarak alınır.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 24 - 3x & , \quad x < 2 \quad \text{ise} \\ 12 & , \quad x = 2 \quad \text{ise} \\ x^2 + 4x + 6 & , \quad x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyonun $x = 2$ ve $x = 5$ noktalarındaki limit değerleri varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + x^2}{x - 2} & , \quad x \leq 1 \quad \text{ise} \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-x} - \dfrac{11}{3} & , \quad x > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyonun $x = 1$ ve $x = -3$ noktalarındaki limit değerleri varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 4x + 1 & , \quad x < -2 \quad \text{ise} \\ 4x^2 - x + 2 & , \quad -2 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ x^3 + 2x + 2 & , \quad 3 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyonun; A) $x = -2$ noktasındaki limit değeri varsa bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 4x + 1 & , \quad x < -2 \quad \text{ise} \\ 4x^2 - x + 2 & , \quad -2 \leq x < 3 \quad \text{ise} \\ x^3 + 2x + 2 & , \quad 3 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$$

B) **$x = 0$ ve $x = 3$ noktalarındaki limit değeri varsa bulunuz.**

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 4^{2-3x}, & x < a \text{ ise} \\ 8^{4x+1}, & x \geq a \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun $x = a$ noktasında limiti varsa a değerini bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{5 - x} & , \quad x \leq 4 \quad \text{ise} \\[2ex] \log_m x + \log_m 5 & , \quad x > 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun $x = 4$ noktasında limiti varsa m değerini bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} m^2 - mx^2 & , \quad x < 2 \quad \text{ise} \\ -x^2 & , \quad x = 2 \quad \text{ise} \\ n^3 + 2m & , \quad x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ise $m + n = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b - 1 & , \quad x \le 2 \quad \text{ise} \\ \sqrt{x^2 + 4x + 4} & , \quad 2 < x \le 3 \quad \text{ise} \\ a + bx & , \quad x > 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun her x reel sayısı için limiti var olduğuna göre a . b = ?

Kural 5: **(Limitte Belirsizlik Durumu)**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği ortaya çıkarsa, pay ve payda-da çarpanlara ayırma yapılır ve ortak çarpanlar sadeleştirilerek belirsizlik ortadan kaldırılır.

İşlem yapmadan önce belirsizliğin olup olmadığı kontrol edilmelidir.

Soru : $$\lim_{x \to -8} \frac{x^2 - 64}{x + 8} = ?$$

2. yol : **0 / 0 belirsizliğinin çözümü için çarpanlara ayırmak kimi durumlarda zor olabilir. Bu durumlarda L'Hospital kuralını kullanmak işimizi kolaylaştırır. Pay ve paydanın ayrı ayrı türevleri alınır. Türevi alacağımız değişken x olmalıdır. Yani x 'e bağlı olarak türev alıyoruz. L'Hospital kuralı müfredatta yok ama türev konusunu daha sonra işleyeceğiz.**

a sayısının türevi 0 olarak alınır. Yani herhangi bir sayının türevi sıfır olarak alınır.

x fonksiyonunun türevi 1 olarak alınır.

a . x fonksiyonunun türevi a olarak alınır.

x^n fonksiyonunun türevi $n \cdot x^{n-1}$ olarak alınır.

$a \cdot x^n$ fonksiyonunun türevi $a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olarak alınır.

$$\lim_{x \to -8} \frac{x^2 - 64}{x + 8} = ?$$

Soru :

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 + 3x - 28} = ?$$

Soru : $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x - 12} = ?$$

Soru : $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{x^3 - y^3}{y^2 - x^2} = ?$

Soru : $$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x - 1} = ?$$

Soru : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + mx - 7}{x - 1} = k$ olup $k \neq 0$ ise m ve k sayılarını bulunuz. **(Payda 0 olurken sonuç tanımsız olmuyorsa demek ki işlemde 0 / 0 belirsizliği vardır. Payın 0 olması için m değeri bulunur ve ardından kural kullanılır.)**

Soru : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - mx - 3}{x^3 + 1} = k$ olup $k \neq 0$ ise m ve k sayılarını bulunuz.

Soru : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{-4x^2 + mx - 3} = k$ olup $k \neq 0$ ise m ve k sayılarını bulunuz.

Soru : $$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+8} = ?$$

(x ’in kuvvetlerinin ortak katına değişken değiştirmesi yapılır. x ’in kuvvetleri bu değişken türünden yazılır. x ’in aldığı değer de değiştirilir ve kural kullanılır.)

2. yol : **L'Hospital kuralı da uygulanabilinir.**

$$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x + 8} = ?$$

Soru : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = ?$

Soru : $$\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = ?$$

Soru : $$\lim_{x \to 0} \frac{16^{x} - 1}{2^{x} - 1} = ?$$

(Özel fonksiyonların türevine girmeyeceğimiz için L'hospital kuralı yerine çarpanlara ayırma kuralından faydalanılır.)

Soru :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos x - \sin x} = ?$$

Not : **Mutlak değerli fonksiyonların limitinde $x = a$ sayısına nerden yaklaşıldığına dikkat edilerek mutlak değerin <u>işaret kontrolü</u> yapılır ve mutlak değer ortadan kaldırılır. Belirsizlik varsa ortadan kaldırılır ve $x = a$ sayısı fonksiyonda kullanılır.**

Soru : $$\lim_{x \to 5^-} \frac{|x - 5|}{x - 5} = ?$$

Soru : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 + 1}{|x + 1|} = ?$

Soru : $$\lim_{x \to 2^-} \frac{4x - 8 + |2 - x|}{x^2 - 4} = ?$$

Soru :

$$\lim_{x \to 3^{+}} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - x - 6} = ?$$

Soru :

$$\lim_{x \to 2\pi^-} \frac{\tan x}{|\tan x|} = ?$$

Soru :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \frac{|\sin(2x)|}{2\sin x \cos x} = ?$$

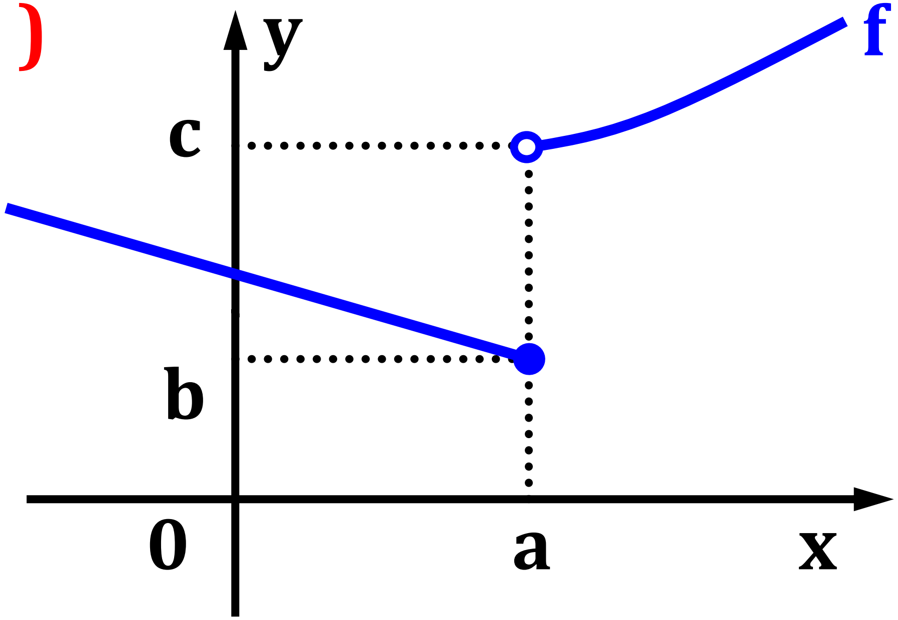
Soru : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - 1}{x^2 - 1} = ?$ **(Sayı mutlak değerin kökü ise verilen sayıya sağdan ve soldan yaklaşırken limit kontrolü yapılmalıdır.)**

Soru : $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - |x|}{2x^2 + |x|} = ?$

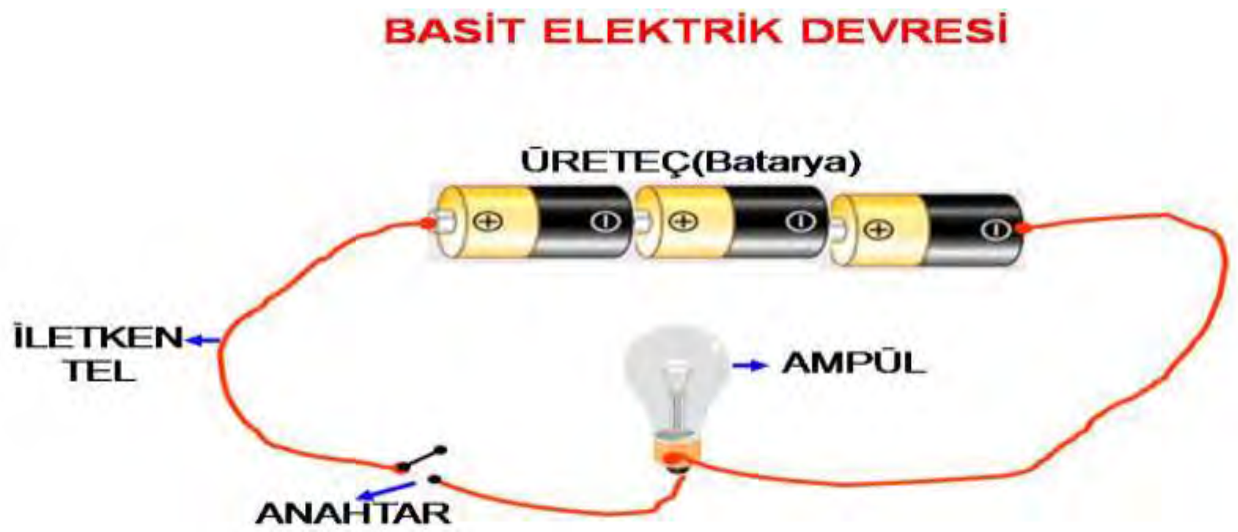
Süreklilik

x = a için f fonksiyonunun alttaki üç durumunu inceleyelim.

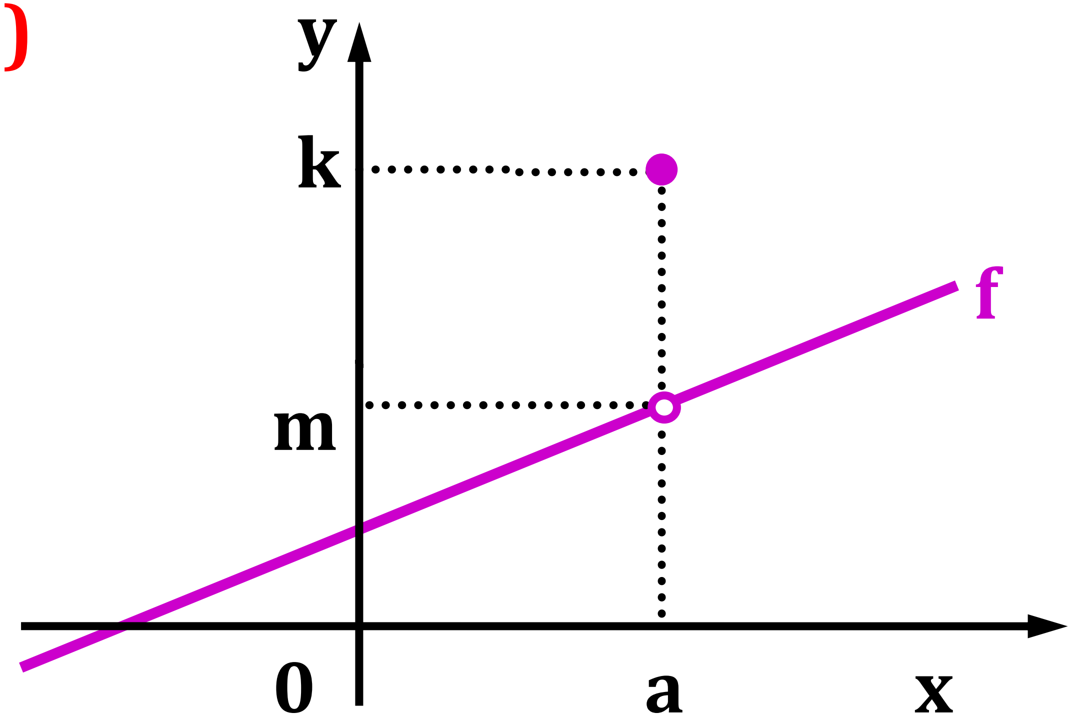
1)



$\lim_{x \to a} f(x)$ yoktur. Çünkü sağdan ve soldan limit değerleri birbirine eşit değildir.

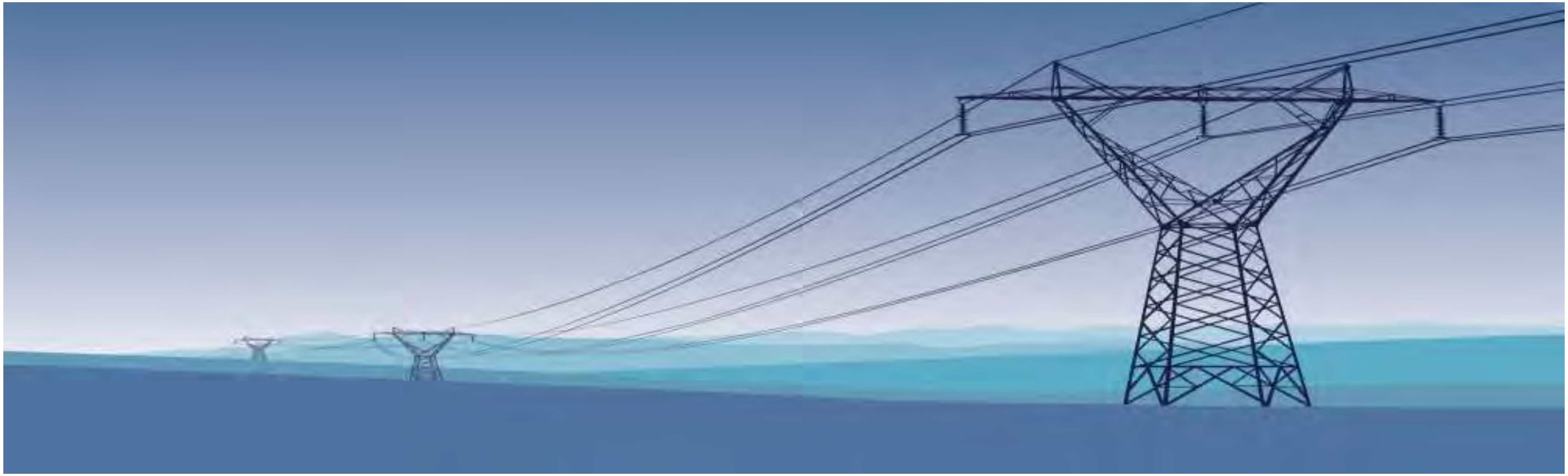


2)

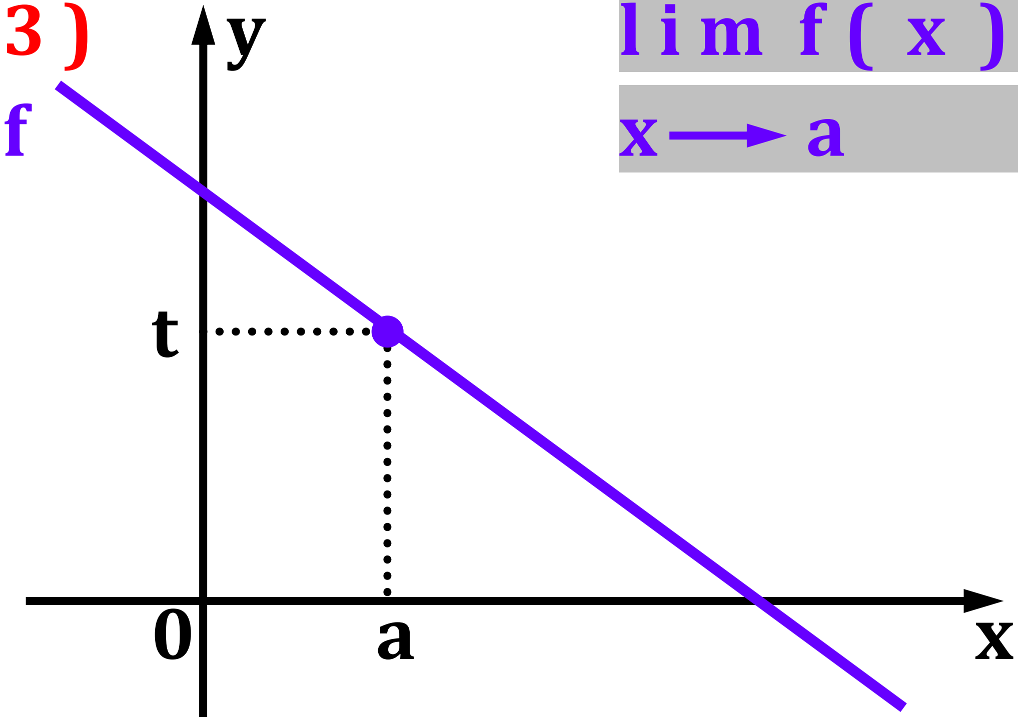


$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ama limit değeri ile fonksiyonun aldığı değer birbirine eşit değildir.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ 'dır.



3)



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ var ve limit değerinin sonucu ile fonksiyonun aldığı değer birbirine eşittir.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olur.

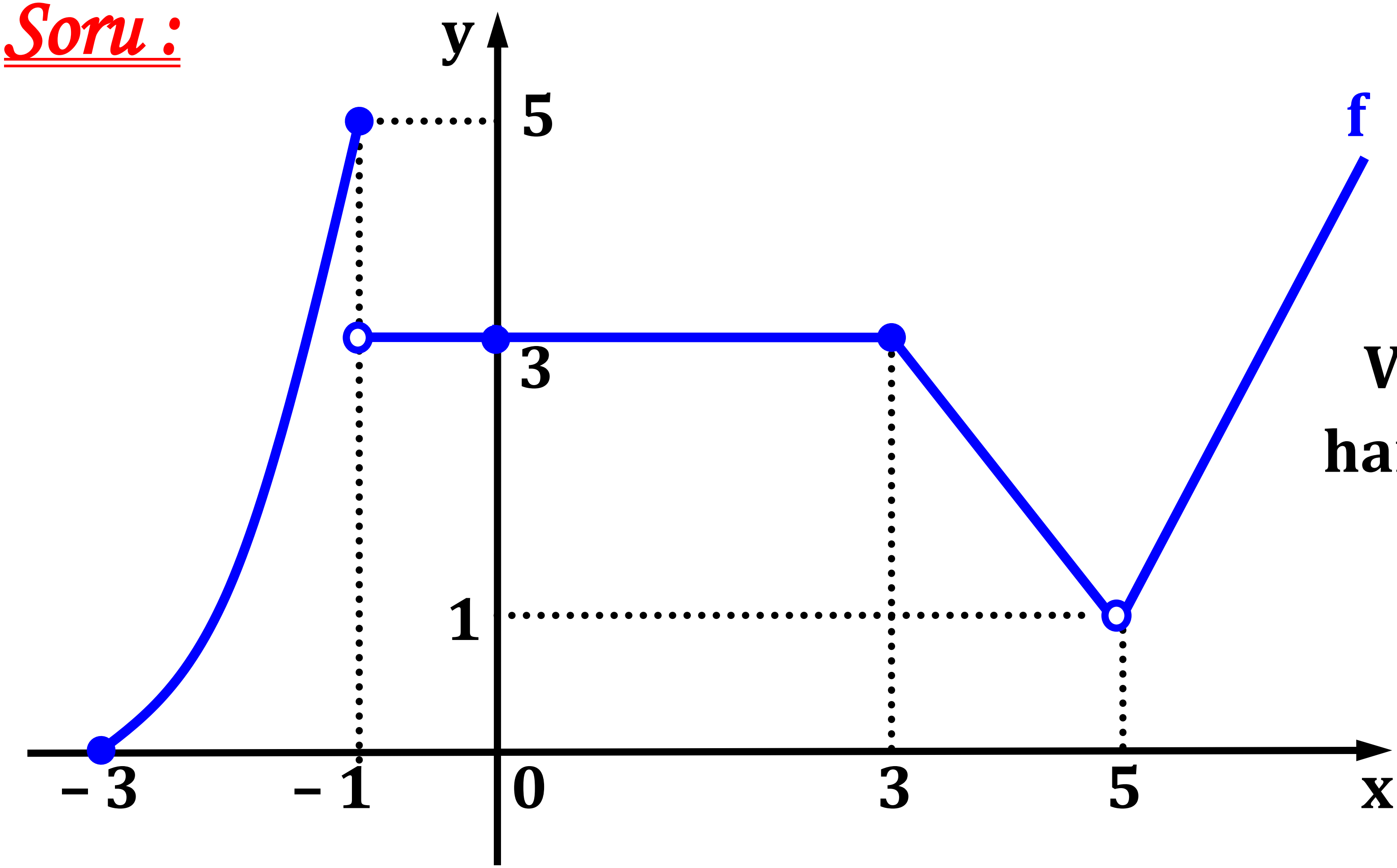
Tanım : **x = a için fonksiyonun limiti var ve limit değeri fonksiyonun bu noktada aldığı değere eşit ise bu fonksiyona "x = a noktasında süreklidir" denir.**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$ **ise fonksiyon x = a noktasında süreklidir.**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(a) = f(a)$$ **sağlanmalıdır.**

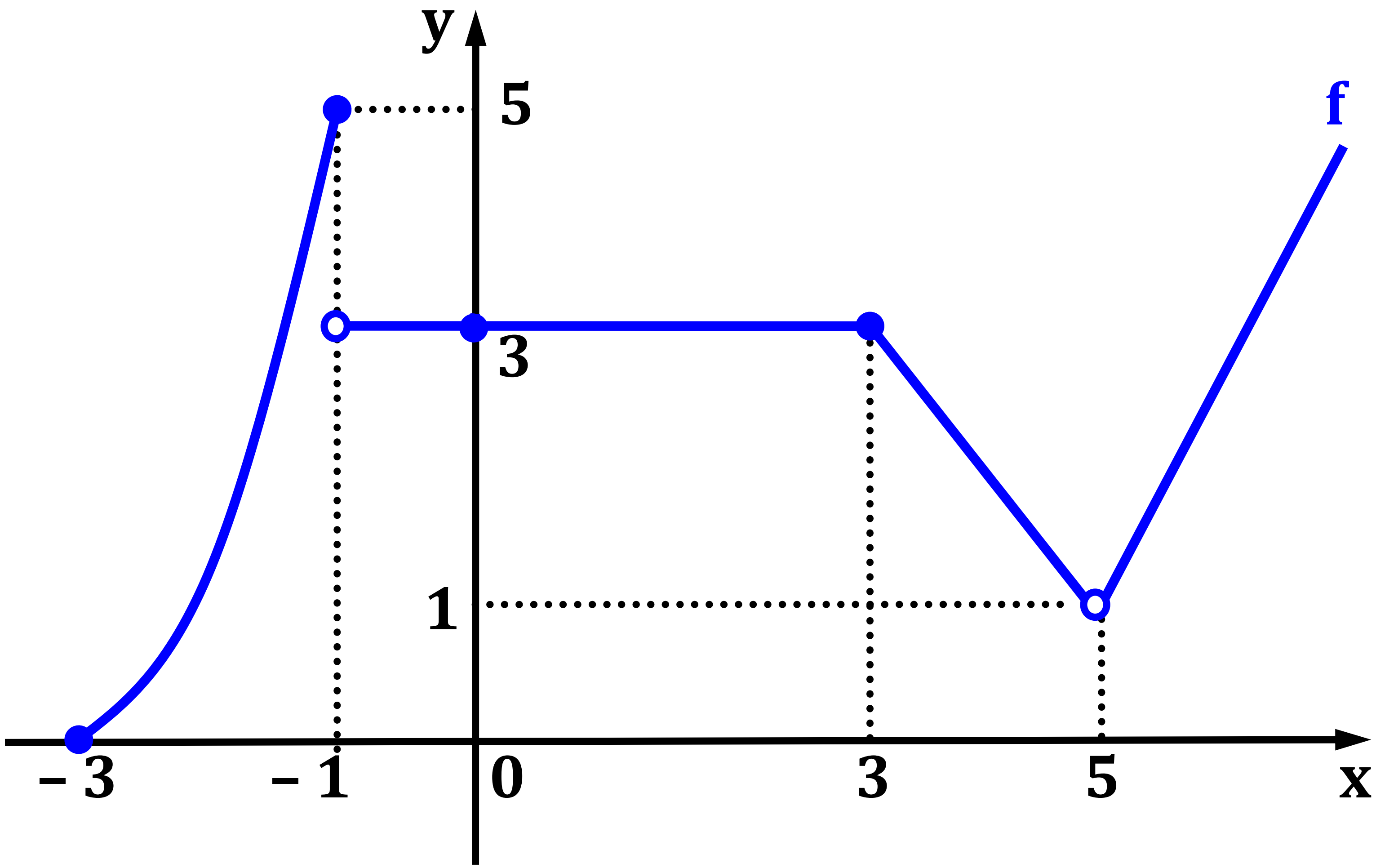
***** Grafik sorularında bir noktada süreklilik olması için grafikte kesinti olmamalıdır.**

Soru :



A) Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Verilen noktalardan hangi x değerlerinde f fonksiyonu süreklidir ?

(* Not :** Bir tarafı olmayan noktalar için nokta sisteme dahil ise bu noktada fonksiyon sürekli olarak alınır.)

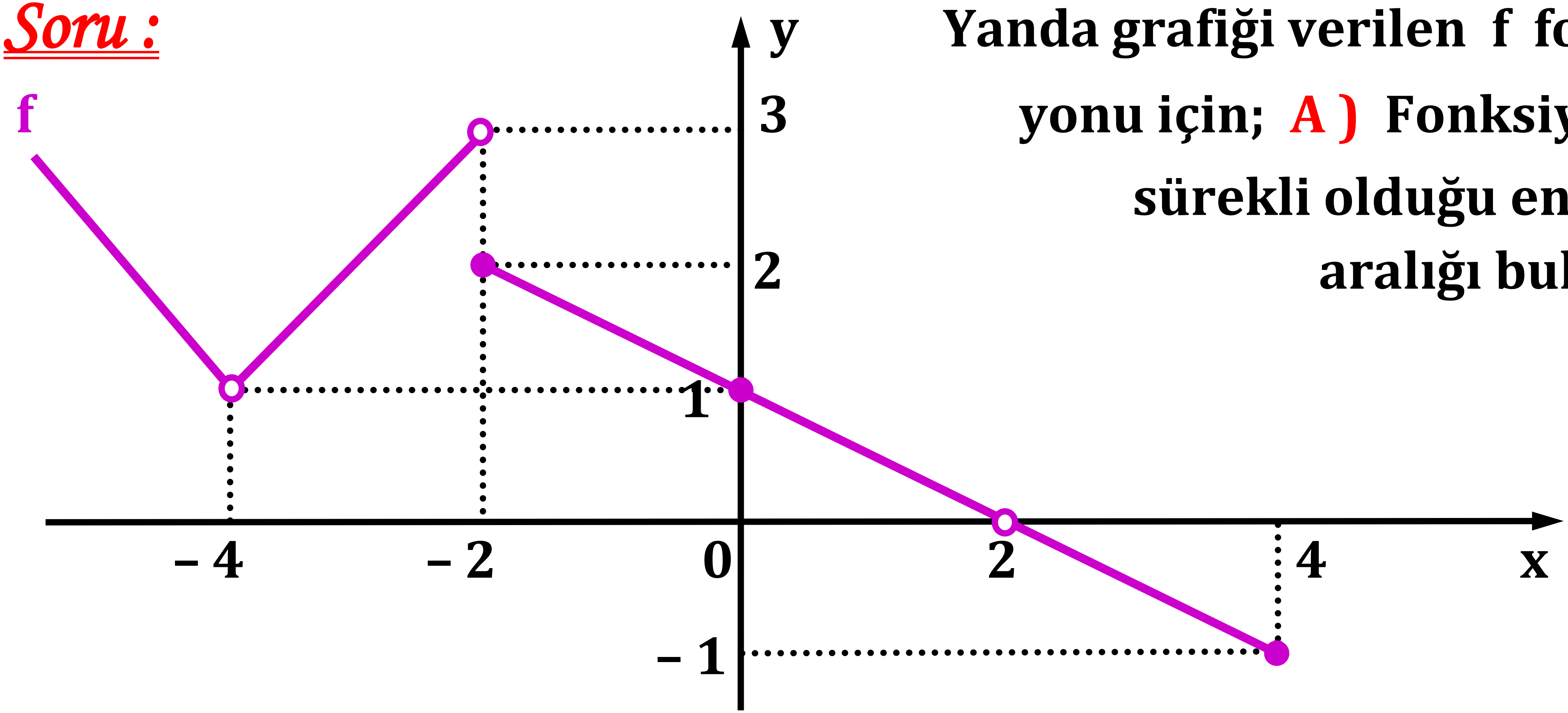


B) **Fonksiyonun sürekli olduğu en geniş tanım kümesini bulunuz.**

(Tanım kümesi : Grafiğin sol ve sağ sınırları arasındaki küme idi.

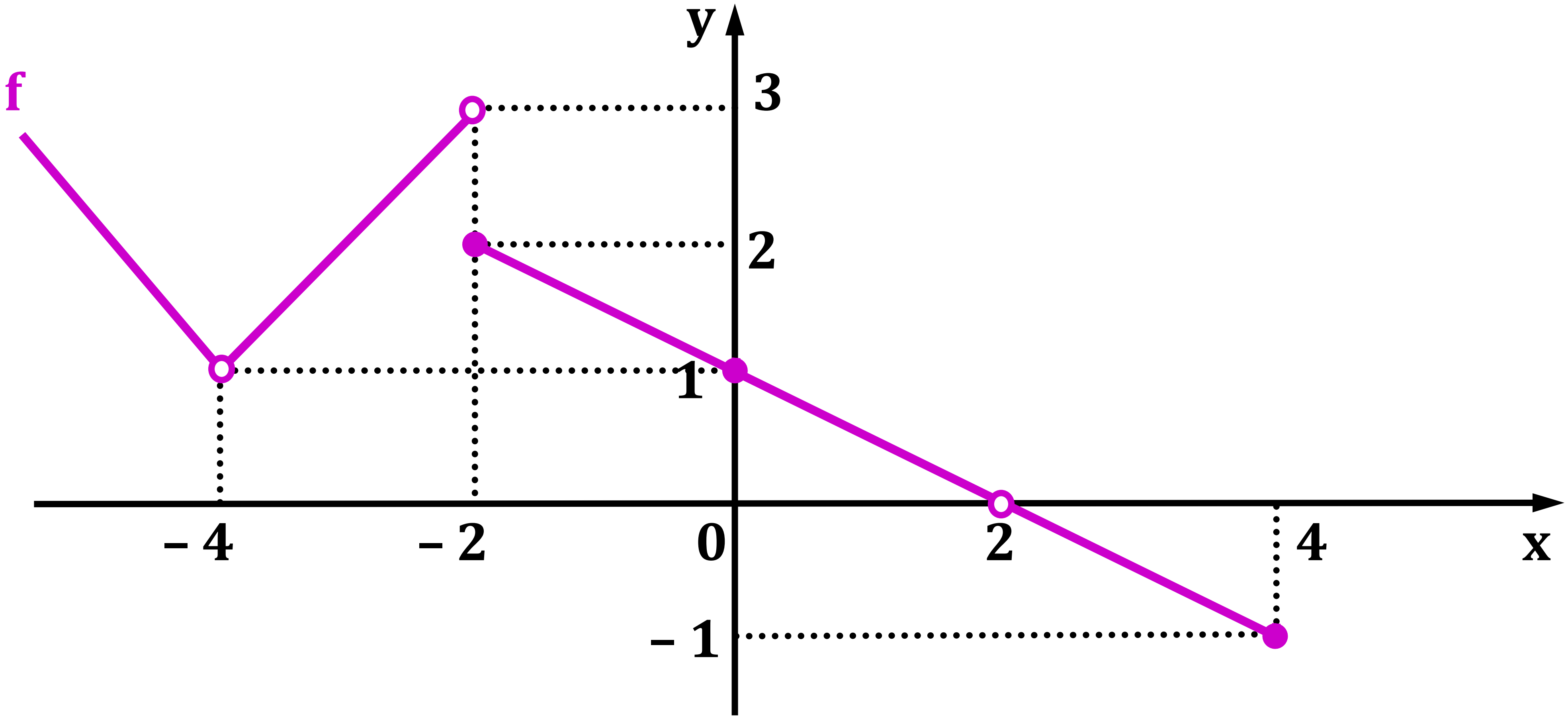
Bu kümeden fonksiyonun sürekli olmadığı x değerleri çıkartılır.)

Soru :



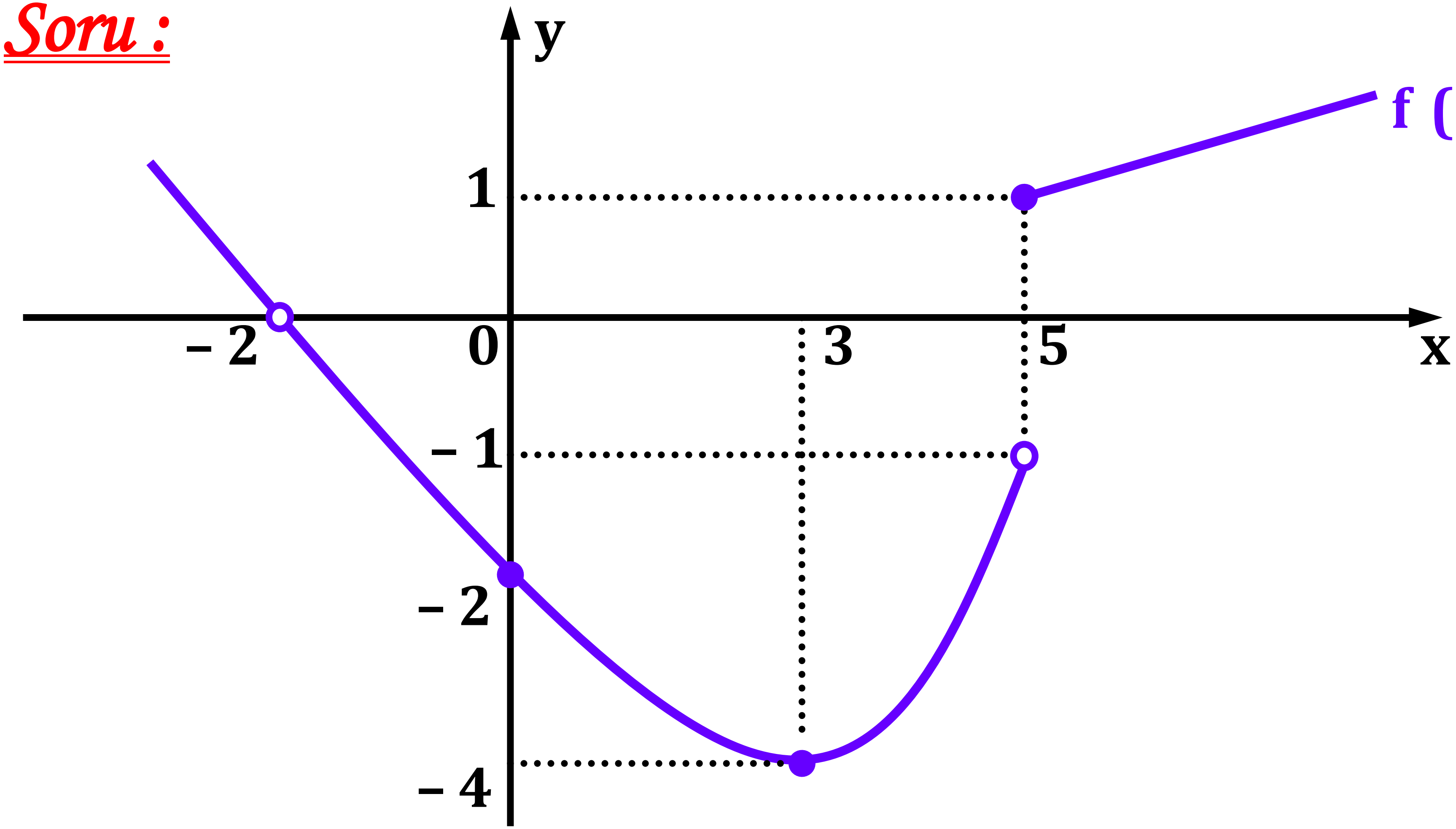
Yanda grafiği verilen f fonksiyonu için; **A)** Fonksiyonun sürekli olduğu en geniş aralığı bulunuz.

B) Verilen noktalardan kaç x değerinde f fonksiyonu süreklidir ?



C) **Verilen noktaların hangi x değerlerinde limit <u>var</u> olmasına rağmen süreklilik sağlanmaz ?**

Soru :



Üstte f (x + 2) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

A) **f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralığı bulunuz.**

B) **f fonksiyonunun grafiğinde kullanılan hangi x değerleri için fonksiyon süreklidir ?**

$f(x)$'in grafiği çizilir ve istenilenler bulunur.

Soru : $f(x) = |3x - 6| + 5$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli midir ?

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & , \quad x < -1 \quad \text{ise} \\ 2 + x & , \quad x = -1 \quad \text{ise} \\ 2x^2 - 3x - 4 & , \quad x > -1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyon $x = -1$ noktasında sürekli midir ?

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{8x - x^2 + 1} & , \quad x < 5 \quad \text{ise} \\ \log_x (x + 620) & , \quad x = 5 \quad \text{ise} \\ (4x - 8) : (2 - x) & , \quad x > 5 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyon $x = 5$ noktasında sürekli midir ?

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} a^3 - 2x & , \quad x < 2 \quad \text{ise} \\ x^2 + 2 - x & , \quad x = 2 \quad \text{ise} \\ a^2 - b^2 + 8x & , \quad x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyon $x = 2$ noktasında sürekli ise $a . b = ?$ $(a, b \in \mathbb{Z}^+)$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 2kx + t & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ 4 + x & , \quad x = 1 \quad \text{ise} \\ k - 2tx & , \quad x > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli ise $k + t = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} a - \sin(2x) & , \quad x < \pi/4 \quad \text{ise} \\ a \cdot b + 1 & , \quad x = \pi/4 \quad \text{ise} \\ \sin^2 x + 5 & , \quad x > \pi/4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre fonksiyon $x = \pi/4$ noktasında sürekli ise a ve b sayılarını bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x \leq 1 \quad \text{ise} \\ n + mx & , \quad 1 < x < 2 \quad \text{ise} \\ -x + 4 & , \quad x \geq 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. Fonksiyon her x sayısı için sürekli ise $m \cdot n = ?$

Kural : Bir fonksiyonun sürekli olması için f fonksiyonunu tanımsız yapan x değeri olmamalıdır. Yani fonksiyonlar tanımlı oldukları en geniş kümede süreklidirler.

Sürekliliği sağlayan = $\mathbb{R} - \{ ? \}$

En Geniş Küme

Tüm sayıların kümesi

(Reel sayılar kümesi)

Fonksiyonu tanımsız sayıları çıkartırız.

Soru : $f(x) = \dfrac{2x - 8}{x^2 - 4x - 12}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{-x^2 + 5x + 14}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ fonksiyonunu <u>süreksiz</u> yapan x değerlerinin çarpımını bulunuz.

Soru : $f(x) = \dfrac{6x}{\sin x - 2}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos(2x) - 1}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

Soru : **$f(x) = \tan x + \cot x$ fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

Soru : $f(x) = \sqrt[2022]{x^4 - 3x^3 - 18x^2}$ **fonksiyonunun <u>sürekli</u> olduğu aralığı bulunuz.** **($\sqrt[n]{a}$ köklü ifadesinde <u>n çift</u> sayı ise $a \geq 0$ olmalıydı. Eşitsizlik tablo sisteminden istenilen bulunur.)**

Soru : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}{x^2 - 9}$ fonksiyonunu **süreksiz** yapan x tam sayı değerlerinin adedini bulunuz.

Soru : $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + tx + 9}$ **fonksiyonunun süreksiz yapan x değeri yoksa (yani fonksiyon tüm reel sayılar için tanımlı) t 'nin çözüm aralığını bulunuz.** **(Paydanın sıfır olmaması demek denklemin kökleri yok demektir. O halde $\Delta < 0$ olmalıdır.)**

Soru : $f(x) = \dfrac{5 - x}{px^2 - 3px + 5 + p}$ **fonksiyonu tüm reel sayılar için <u>tanımlı</u> ise p 'nin çözüm aralığında kaç tam sayı vardır ?**

Soru : $f(x) = \dfrac{8}{2x^2 - 4x + k + 5}$ fonksiyonunun süreksiz yapan farklı iki x değeri varsa k 'nın çözüm aralığını bulunuz.

(Paydanın farklı iki kökü var ise $\Delta > 0$ olmalıdır.)

Soru : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{ax^2 - 8x + 2}$ **fonksiyonunun süreksiz yapan <u>tek</u> x değeri varsa bu x değerini bulunuz. (Paydanın tek kökü var ise $\Delta = 0$ olmalıdır.)**

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x+2} & , \quad x \le 1 \quad \text{ise} \\ 4x - 2 & , \quad 1 < x < 4 \quad \text{ise} \\ \dfrac{5x}{3x-6} & , \quad x \ge 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kaç x değeri için süreksizdir ? (1) Fonksiyonun sınır değerleri için limit kontrolü yapılır. 2) Fonksiyonu tanımsız yapan x değerlerine bakılır. Yalnız bulunan değer x 'in şartını sağlamalıdır.)

Soru :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-9}, & x\le -2 \text{ ise}\\[2mm] \dfrac{-2}{x+12}, & -2<x\le 3 \text{ ise}\\[2mm] \dfrac{2x}{5-x}, & x>3 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kaç noktada süreksizdir ?

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{-1+x} + \dfrac{x^2}{x+1} & , \quad x \leq 2 \quad \text{ise} \\[2ex] \dfrac{x+10}{4+x} + \dfrac{x+2}{-x+5} & , \quad x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kaç noktada süreksizdir ?

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 5. 2. Anlık Değişim Oranı ve Türev

Terimler ve Kavramlar: Anlık değişim oranı, teğetin eğimi, türev, sağdan türev, soldan türev

Sembol ve Gösterimler: $f'(x)$, $f''(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{d^2x}$, $f'(a^+)$, $f'(a^-)$

12. 5. 2. 1. Türev kavramını açıklayarak işlemler yapar.

A) Anlık değişim oranı fizik ve geometri modellerinden yararlanılarak açıklanır.

B) Verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetinin eğimi arasındaki ilişki üzerinde durulur.

C) $f(x) = c$, $f(x) = ax^n$ $(a, c \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, 4)$ fonksiyonlarının türevleri, türev tanımı kullanılarak hesaplatılır.

Ç) Yalnızca $f(x) = ax^n$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$) şeklindeki fonksiyonlar için türev kuralları verilir. Bunun dışındaki fonksiyonların (kapalı ve parametrik fonksiyonlar dâhil) türev kurallarına yer verilmez.

D) Rolle'nin çalışmalarına yer verilir.

12. 5. 2. 2. Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevlenebilirliğini değerlendirir.

A) Bir fonksiyonun tanım kümesinin açıkça belirtilmediği durumlarda tanım kümesi olarak, fonksiyonun kuralının geçerli olduğu en geniş küme alınır.

B) Fonksiyonun türevli olmadığı noktalarla grafiği arasında ilişki kurulur.

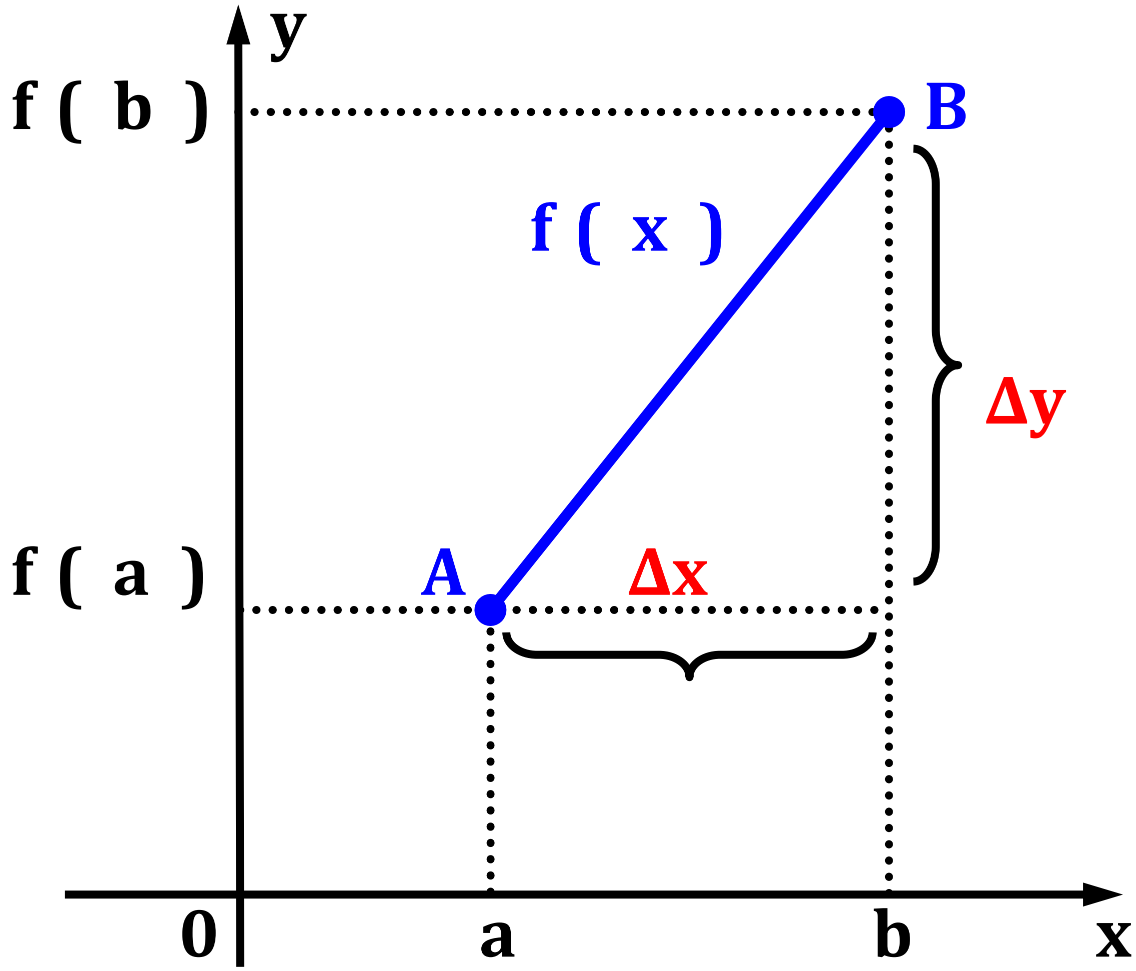
12. 5. 2. 3. Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün türevine ait kurallar yardımıyla işlemler yapar.

12. 5. 2. 4. İki fonksiyonun bileşkesinin türevine ait kuralı (zincir kuralı) oluşturularak türev hesabı yapar.

TÜREV

Ortalama Değişim Hızı (11.Sınıf Konusu İdi)

Bir nesnede birim zamanda meydana gelen değişimler (artma , azalma vb.) " ortalama değişim hızı " olarak adlandırılır.



f fonksiyonunun [a , b] aralığındaki ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ sembolü ile gösterilirdi.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olarak alınırdı.

Δx : A 'dan B 'ye x değerindeki değişim ve Δy : A 'dan B 'ye y değerindeki değişimi gösterir.

Ortalama değişim hızına " değişim oranı " da denilir. V_{ort} ile de gösterilir.

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = V_{ort}}$$ olarak ta alınır.

Şimdiki sorularda ise;

Δx : Konumdaki değişimi (Veya ΔS olarak ta veriliyor.)

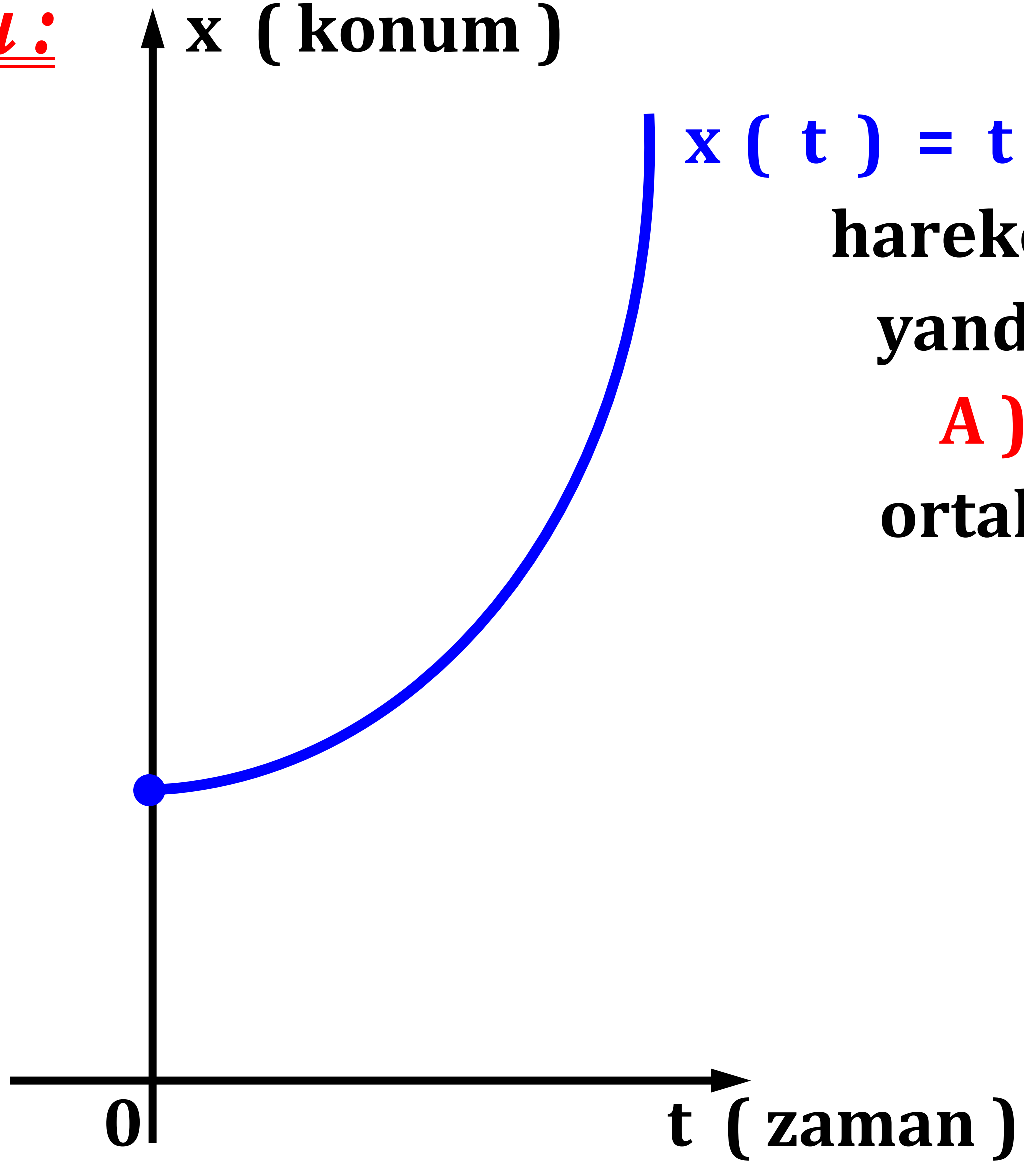
Δt : Zamandaki değişimi gösterir.

t_1 (başlangıç) ile t_2 zamanları arasındaki değişim hızı

$$\boxed{V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$ olarak alınır.

Soru : **Bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (m)**
$x(t) = 3t^2 - 4t + 1$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin ilk 5 saniyedeki değişim hızını (m / sn) bulunuz.

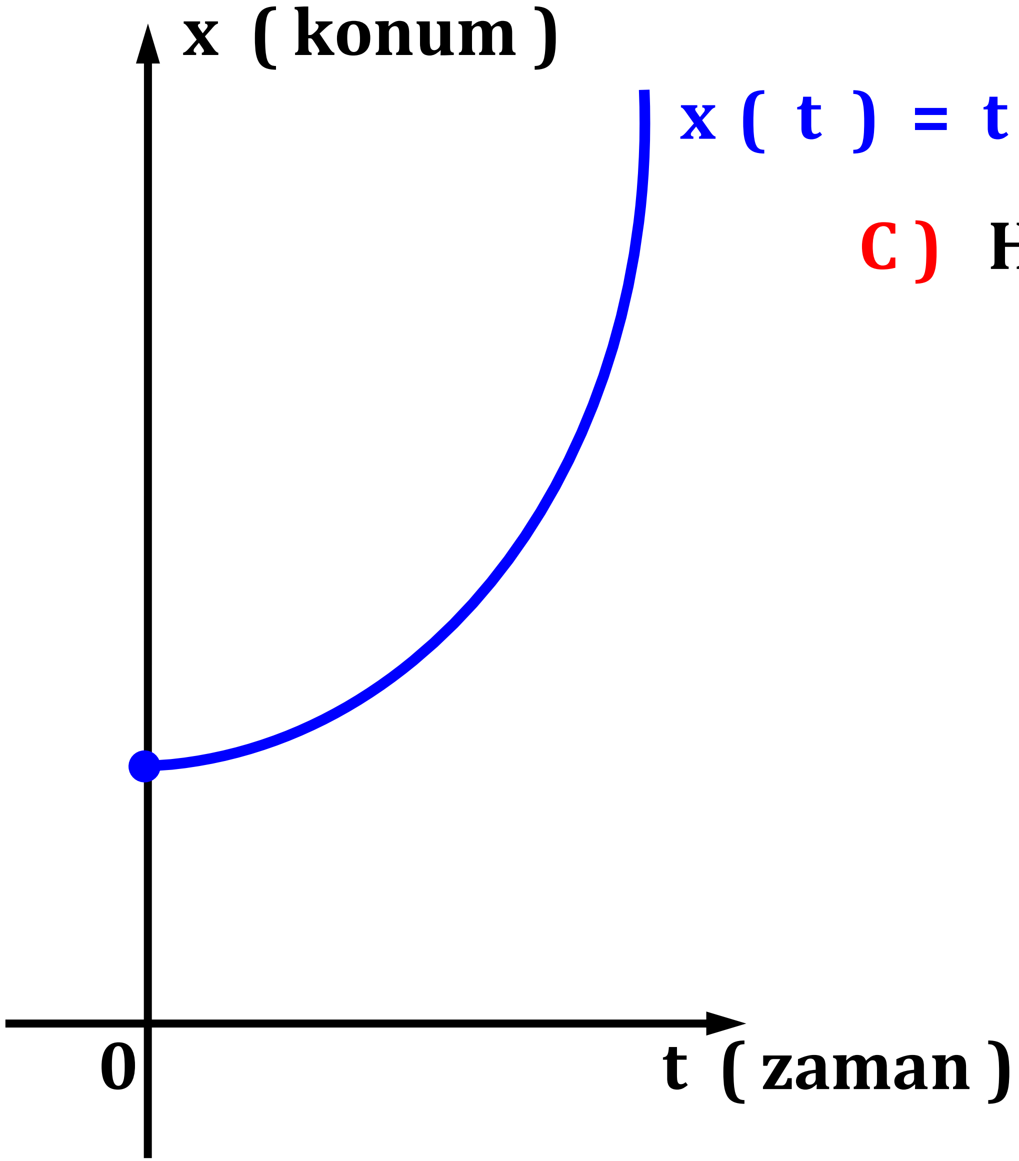
Soru :



Belli bir yükseklikten itibaren $x(t) = t^2 + 4t + 6$ hareket eden bir hareketliye ait konum - zaman grafiği yanda verilmiştir. Buna göre;

A) Hareketlinin ilk 4 saniyedeki ortalama değişim hızının kaç m / sn olduğunu bulunuz.

B) **Hareketlinin 2. ve 7. saniyeler arasındaki ortalama değişim hızını bulunuz.**



C) **Hareketlinin başlangıçta yerden yüksekliği kaç m ’dir ?**

Soru : **Bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (m) $x(t) = 2t^2 + 8t$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin ilk kaçıncı saniyeye kadar ki değişim hızı 20 m / sn olur ?**

Tanım : Bir hareketlinin t_1 ile t_2 saniyeleri arasındaki ortalama hızı $V_{ort} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ olarak bulunurdu.

$$\lim_{t \to t_o} \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o}$$ limit değerine hareketlinin t_o anındaki " anlık değişim oranı " adı verilir. Bir fonksiyonun anlık değişim oranına fonksiyonun t_o noktasındaki " türevi " adı verilir. Türev değeri $x'(t_o)$ ile gösterilir.

$$x'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o}$$ olarak alınır.

Soru : **Bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (m) $x(t) = t^2 - 9$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin 5. saniyedeki anlık değişim hızı kaç m / sn olur ?**

2. yol : **L'Hospital kuralında x 'e bağlı türev alımını göstermiştik. Anlık değişim hızında da türev alacağımız değişkenin t olduğuna dikkat etmeliyiz.**

$x(t) = t^2 - 9$ **hareketlinin 5. saniyedeki anlık değişim hızı ?**

Soru : **Bir hareketlinin zamana (sn) bağlı konumu (m) $x(t) = t^2 + 2t + 5$ fonksiyonu ile verildiğine göre, hareketlinin 3. saniyedeki anlık değişim hızı kaç m / sn olur ?**

Soru : **İki hareketlinin konum – zaman fonksiyonları**

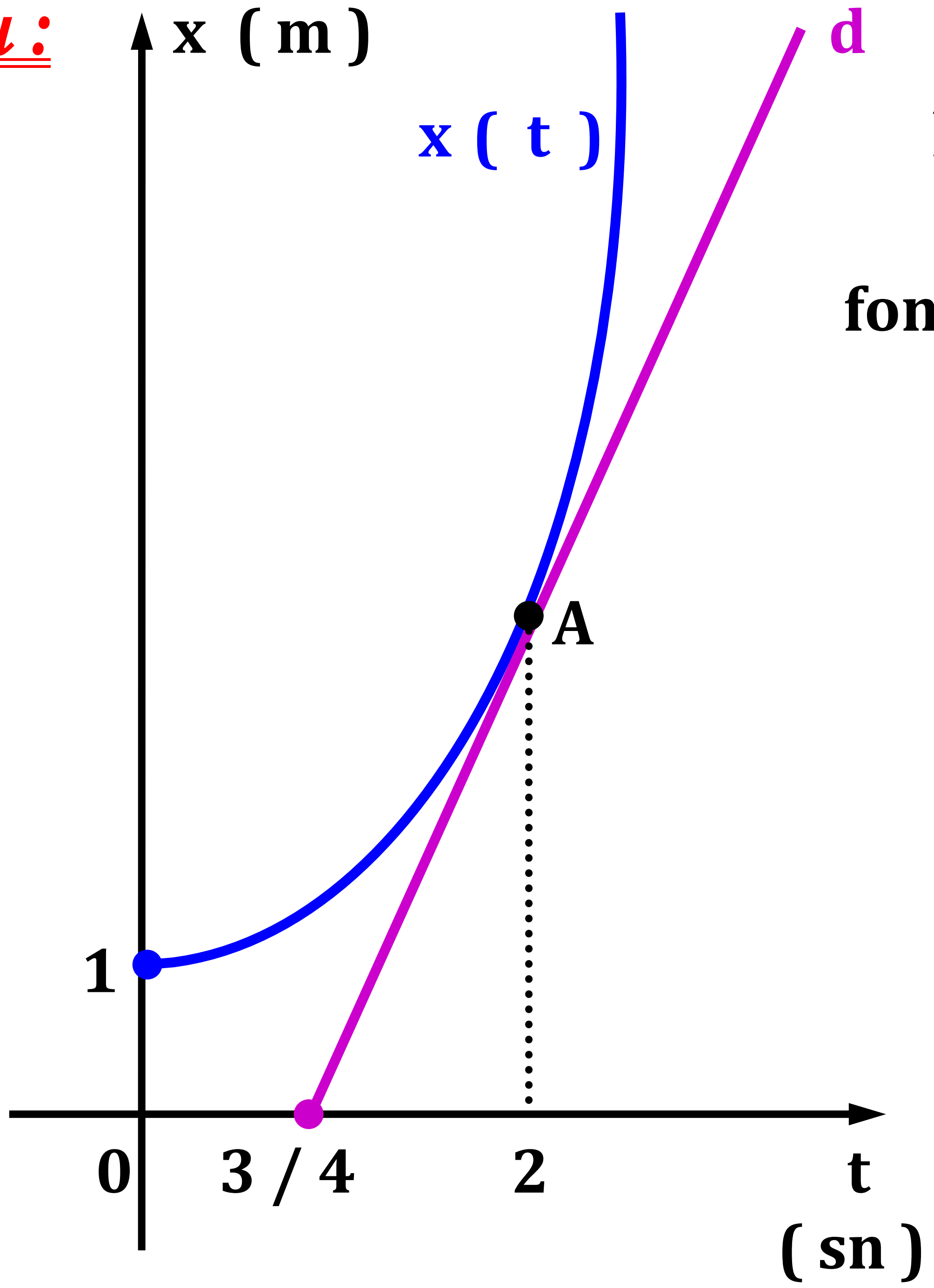
$$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t \quad \text{ve} \quad S(t) = 2t^2 - 4t + 5$$ **olarak veriliyor.**

Bunu göre hareketlilerin; A) 3. saniyedeki anlık hızlarını bulunuz.

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t \quad \text{ve} \quad S(t) = 2t^2 - 4t + 5$$

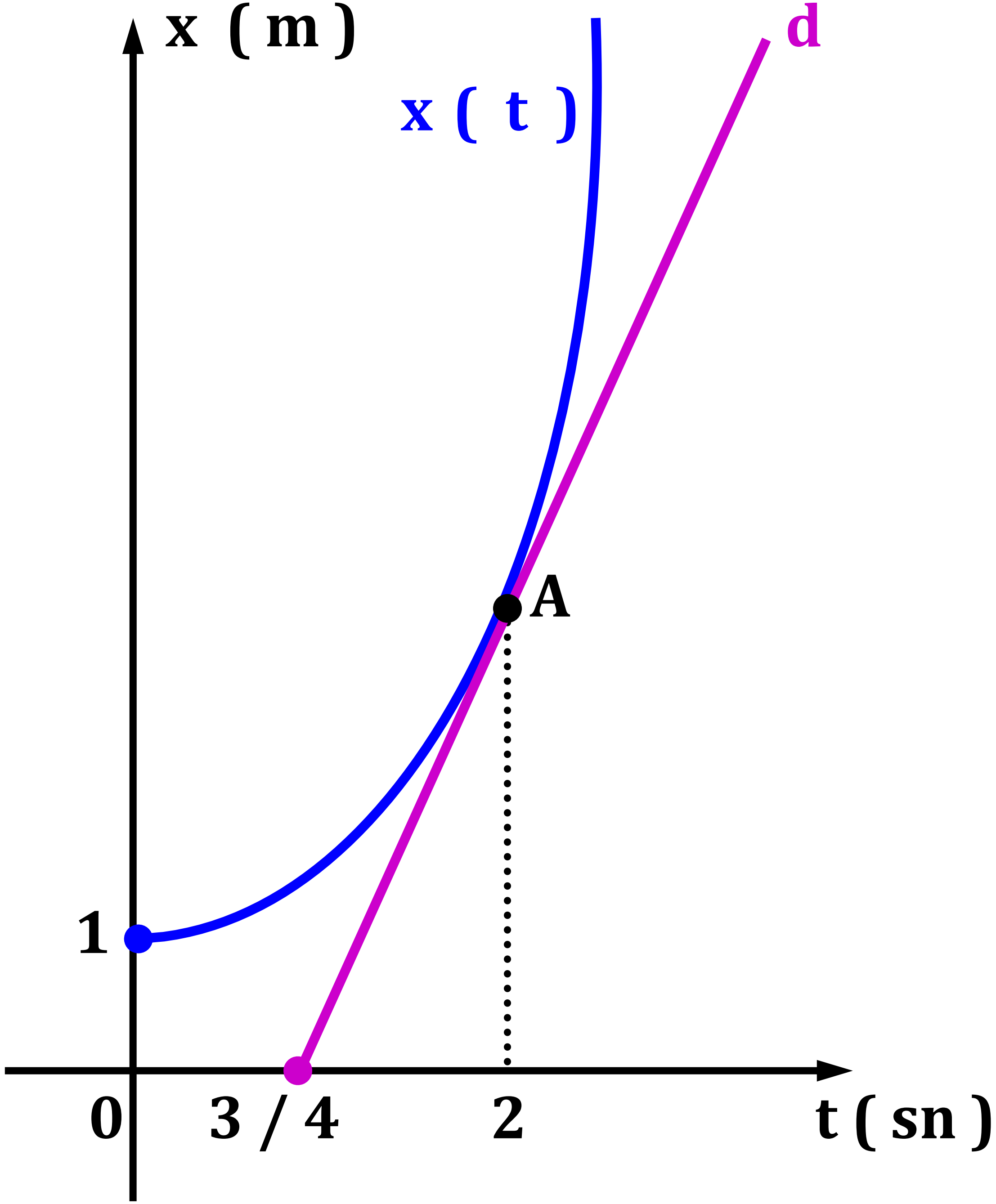
B) **Anlık hızları kaçıncı saniyelerde birbirine <u>eşit</u> olur ?**

Soru :



Bir hareketlinin zamana bağlı konumu $x(t) = t^2 + 1$ fonksiyonu ile veriliyor. A noktası fonksiyon ile d doğrusunun kesim noktasıdır. Buna göre;

A) Hareketlinin 2. saniyedeki <u>anlık</u> değişim hızını bulunuz.



B) d doğrusunun <u>eğimini</u> bulunuz.

Kural: Zamana bağlı konun fonksiyonu $x(t)$ için; fonksiyona $A(t_o, x(t_o))$ noktasında teğet olan bir d doğrusu için, fonksiyonun bu noktadaki türevi d doğrusunun eğimine eşittir.

$$m_d = x'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o}$$ olarak alınır.

Bu işleme uygun olarak, $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ olarak alınır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$ veya $\frac{df(x)}{dx}$ olarak gösterilebilir.

$\dfrac{d}{dx}$ ifadesine " türev operatörü " adı verilir. x 'e göre türev alınacağını belirtir.

Soru : $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5} = ?$

Soru : $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \to -7} \frac{f(x) - f(-7)}{x + 7} = ?$$

Soru : $f'(x) = -5x + 20$ için $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{f(x) - f(6)}{x - 6} = ?$

Soru : $f'(x) = x^2 - 3x + k$ için $\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 9$ ise $k = ?$

Not : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ işleminde $x - a = h$ dönüşümü yapılırsa;

- $x \to a$ olurken $h \to 0$ olur.
- $x - a = h$ ise $x = a + h$ olur.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olarak bulunur.

Soru çözümlerinde iki limit kuralından da çözüm yapılabilir.

Soru : $f(x) = 5x - 8$ için $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = ?$

Soru : $f(x) = 4x^2$ için $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + mx - 5$ için $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$ ise $m = ?$

Türev Alma Kuralları

Fonksiyonların türevini limit kuralından faydalanarak çözmek yerine çözüm için türev alma kurallarını kullanmak işimizi çok kolaylaştırır.

Kural 1: **(Sabit Fonksiyonun Türevi)**

$c \in \mathbb{R}$ (c sabit) için $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ olarak alınır. Yani sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

Kural 2: **(Üslü Fonksiyonun Türevi)**

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ için $f(x) = a.x^n$ ise $f'(x) = a.n.x^{n-1}$ olarak alınır.

Üslü fonksiyonun türevinde kuvvet üslü ifadenin başına çarpım olarak indirilir ve kuvvet bir azaltılır.

Örneğin;

1) $f(x) = 5$ **ise** $f(x) = 5.1 = 5.x^{0}$ **olup**

$f'(x) = 5.0.x^{0-1} = 0$ **bulunur. Sabit sayıların türevi her zaman 0 'dır.**

2) $f(x) = 8x$ **ise** $f(x) = 8x^{1}$ **olup**

$f'(x) = 8.1.x^{1-1} = 8.x^{0} = 8.1 = 8$ **bulunur.**

3) $f(x) = 3x^{5}$ **ise** $f'(x) = 3.5.x^{4} = 15.x^{4}$ **olarak bulunur.**

Soru : $f(x) = 4x^3$ ise $f'(-2) + f(-2) = ?$

Soru : $f(x) = 7x^{-4}$ ve $h(x) = -12$ ise

$f'(1) + h'(9) = ?$

Soru : $f(x) = 6x^2$ ve $h(x) = \dfrac{2}{x^4}$ ise

$f'(3) + h'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt{x}$ ise $f'(16) = ?$

Soru : $f(x) = -\dfrac{1}{x^5}$ ve $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ise

$f'(1) + h'(8) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot x$ ise $f'(x) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{2x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$ ise $f'(x) = ?$

Kural 3: (Toplamın Türevi)

- $f(x) = a.x^{n} + b.x^{m} + ...$ şeklindeki fonksiyonun türevinde **her bir terimin türevi alınır.**
- $(f + h)'(x) = f'(x) + h'(x)$
- $(f - h)'(x) = f'(x) - h'(x)$ olarak alınır.

Soru : $f(x) = 2x^{3} - 3x^{2} + 4x + 1$ ise $f'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = -\frac{1}{3}.x^3 + x^4 + \frac{x^2}{4} - 6$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = 8\sqrt{x} + 2x^2 - x^3$ ise $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = ?$

Soru : $f(x) = x^3 + 5x^2 - mx + 1$ ve $f'(-2) = 6$ ise $m = ?$

Soru : $f(x) = 2x^3 + k - 4x + 6$ ve $f'(2) = f(-1)$ ise

$k = ?$

Soru : $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ve $h(x) = -x^3 + x + 3$ fonksiyonları veriliyor. Bunu göre; **A)** $(f + h)'(5) = ?$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ ve $h(x) = -x^3 + x + 3$

B) $(f - h)'(-1) + (f.h)(1) = ?$

Soru : P (x) polinom fonksiyon olmak üzere

$P(x) + 5 . P'(x) = 3x - 5$ ise P (x) polinomunun denklemini bulunuz. (Hem polinom hem de türevinin bir arada olduğu denklemlerde; polinom fonksiyonunun derecesi, verilen denklemdeki fonksiyonun derecesi ile aynı alınır. Bu soru için $P(x) = ax + b$ olarak alınır.)

Soru : **$P(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere**

$P'(x) - 4.P(x) = 17 - 12x$ ise $P(x)$ polinomunun denklemini bulunuz.

Soru : **$P(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere**

$P(x) + P'(x) = 4x^2 + 5x - 6$ ise $P(3) = ?$

Kural 4: (İkinci Mertebeden Türev)

$f(x)$ fonksiyonun türevi $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ veya $\dfrac{df(x)}{dx}$ olarak gösterilirdi.

Türev fonksiyonunun bir daha türevi alınırsa bu fonksiyona "ikinci mertebeden türev" adı verilir. $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ veya $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ile gösterilir.

$f''(x) = [f'(x)]'$ olur.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ olarak alınır.

Soru : $f(x) = \dfrac{5}{x^4}$ ise $f''(x) = ?$

Soru : $f(x) = 5x^4 - x + x^3 + 6$ ise $f''(-1) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{2x^5}{5} - \dfrac{x^2}{4} + 4x^2 + 6$ ise $f''(2) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$ ise $f''(1) = ?$

Soru : $y = f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^2} \cdot x}{\sqrt{x}}$ ise $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

Soru : $f(x) = -x^4 + kx^3 + 2x$ ve $f'(-2) = 46$ ise $f''(1) = ?$

Kural 5: **(Çarpımın Türevi)**

$$(f.h)'(x) = f'(x).h(x) + f(x).h'(x)$$

olarak alınır.

$$(f.g.h)'(x) = f'(x).g(x).h(x) +$$
$$f(x).g'(x)\ h(x) + f(x).g(x).h'(x)$$

olarak alınır.

Daha fazla çarpım verilirse yine aynı türev alma yöntemi kullanılır.

Soru : $f(x) = x^2 + 1$ ve $h(x) = 5x - 2$ ise $(f.h)'(x) = ?$

2.yol : **Ya da çarpım fonksiyonunun sonucu bulunur ve ardından bulunan terimlerin türevi alınır.**

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ ve } h(x) = 5x - 2 \text{ ise } (f.h)'(x) = ?$$

Soru : $f(x) = 2x^3 - 6x$ ve $h(x) = x^4 + x$ ise

$(f.h)'(2) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = \frac{1}{x} + 3$ ise

$(f.h)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = (x^2 - 6x).(\sqrt{x} - 7)$ ise $f'(4) = ?$

Soru : $f(x) = 5 - x^2 + 3kx$ ve $h(x) = x^3 + 2x$ ve $(f.h)'(1) = 10$ ise $k = ?$

Soru : $f(x) = (2x - 4).(x^2 + 1).(8x - x^3)$ ise

$f'(1) = ?$

Soru : $P(x) = (4 - x^2).(3x + 1).(x - 1).(5x + 3)$ ise $P'(2) = ?$ **(Bir çarpanı 0 yapan gruba f (x) diğer çarpanlara h (x) denirse kolay yoldan türev alınır. Ya da türev sadece sıfır yapan çarpana uygulanır.)**

Soru : $P(x) = (x+1).(3-x).(x+2).(x-1).2x$ ise $P'(-2) = ?$

Soru : $P(x) = (x+20).(x+19).(x+18)...(x+1).x$ ise $P'(0) = ?$

Kural 6: (Bölümün Türevi)

$$\left(\frac{k}{h}\right)'(x) = \frac{k'(x) \,.\, h(x) - k(x) \,.\, h'(x)}{h^2(x)}$$ olarak

alınır.

Soru : $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{x^2 + 1}$ ise $f'(3) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{3x + 1}$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 - x$ ve $h(x) = 3x^2$ ise $\left(\dfrac{f}{h}\right)'(2) = ?$

Soru : $f(x) = 2x^2 + 3x$ ve $h(x) = 4x - 3x^2$ ise

$$\left(\frac{h}{f}\right)'(-1) = ?$$

Soru : $f(x) = \dfrac{(2x^2+1).(x-1)}{3x+2}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = 4 - 3x$ ve $h(x) = x - 2$ fonksiyonları

veriliyor. $k(x) = \dfrac{(f \,.\, h)(x)}{(f + h)(x)}$ ise $k'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{5x - x^2 - 6}{2x - a}$ ve $f'(1) = 0$ ise $a = ?$

Soru : $y = f(x)$ ve $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1$ ise; **A)** $f(x) = ?$

B) $f'(x) = ?$

Soru : $y = f(x)$ ve $x = \dfrac{y-1}{y+1}$ ise $f'(-5) = ?$

Soru : f tek fonksiyondur. $2 + f(-x) = 3x - x \cdot f(x)$ ise $f'(x) = ?$ (**Hatırlatma :** f çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$, f tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ olarak alınırdı.)

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 \quad , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2 - 4x \quad , \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

ve

$$h(x) = \begin{cases} x^{-2} + x \quad , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ x - 1 \quad , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre;

A) $(f + h)'(9) = ?$ **(Sayının bulunduğu şarta göre fonksiyon seçilir ve türev alınır.)**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2 - 4x & , \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^{-2} + x & , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ x - 1 & , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

B) $(f.h)'(-1) = ?$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2 - 4x & , \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^{-2} + x & , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ x - 1 & , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

C) $\left(\dfrac{f}{h}\right)'(4) = ?$

Kural 7: (Bileşke Fonksiyonun Türevi)

f ve h iki türevlenebilen fonksiyon olsun.

$(f \circ h)(x) = f(h(x))$ **olarak bulunurdu.**

$(f \circ h)'(x)$ **bileşke fonksiyonun türevi için;**

1.yol : $(f \circ h)'(x) = h'(x) \cdot f'(h(x))$ **olarak alınır.**

$$(f \circ h)'(x) = [f(h(x))]' = h'(x) \cdot f'(h(x))$$

Önce iç kısmın türevi alınır. **Sonra fonksiyonun türevi alınır.**

Soru : $f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = 6x - 10$ ise

$(f \circ h)'(x) = ?$

2. yol : **Önce bileşke fonksiyon yani $(f \circ h)(x)$ bulunur ve elde edilen fonksiyonun türevi alınır.**

$f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = 6x - 10$ ise $(f \circ h)'(x) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ve $h(x) = x^2 + 3x$ ise

$(f o h)'(3) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + 4$ ve $h(x) = \dfrac{2}{x^2} + 1$ ise

$(f o h)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = 27 - 8x$ ve $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ise

$(h \circ f)'(3) = ?$

Soru :

x	f (x)	h (x)	f '(x)	h '(x)
1	– 5	2	1	5
2	1	2	3	4

Tabloda verilen değerlere göre;

A) $(f \circ h)'(1) = ?$

x	$f(x)$	$h(x)$	$f'(x)$	$h'(x)$
1	-5	2	1	5
2	1	2	3	4

B) $(h \circ f)'(2) + (f \circ f \circ h)(2) = ?$

Soru : $f(x) = 3x - 4$, $h(x) = x^2 + x + 1$ ve $k(x) = 2x$ ise $(f \circ h \circ k)'(3/8) = ?$ **(Üçlü bileşke fonksiyonda bileşke fonksiyon bulunur ve ardından türev alınır.)**

Soru : $f(2x-4)=4x^2-6x+1$ ise $f'(2)=?$ (Verilen,

$f(h(x))$ bileşke fonksiyon gibi görülür ve eşitliğin türevi alınır.

İç kısmı sağlayan x değeri için sonuç bulunur.)

Soru : $f(4+5x) = 3x - x^2 + x^3$ ise $f'(-6) = ?$

Soru : $f(x^2 - 5) = 8\sqrt{x} - 2x$ ise $x \in \mathbb{Z}^+$ için $f'(11) = ?$

Soru : $f(2x^2 - 3x) = 12x^3 - 5x$ ise $x \notin \mathbb{Z}$ için $f'(-1) = ?$

Soru : $f(3x+7) = h(x^2 - 4x)$, $h'(12) = 21$ ise $f'(25) = ?$

Soru : $f(8-2x) = k(4x) \, . \, h(3x-1)$ eşitliği veriliyor.
$k(0) = 6$, $h(-1) = 4$, $k'(0) = 5$ ve $h'(-1) = -1$ ise
$f'(8) = ?$

Kural 8: (Parantez Kuvveti Olan Fonksiyonun Türevi)

f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $y = a\,.\,[\,f(x)\,]^{n}$ ise (veya $y = a\,.\,f^{n}(x)$)

$y' = a\,.\,n\,.\,[\,f(x)\,]^{n-1}\,.\,f'(x)$ olarak alınır.

Soru : $f(x) = 5\,.\,(x^{4} + 3x)^{2}$ ise $f'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = (x^3 - 3x + 2)^3$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = (x^5 - 4x^2)^2 + \dfrac{1}{x^3}$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = \dfrac{5x}{(2x-1)^4}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \left(\dfrac{2x+8}{3x-2}\right)^3$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = [2x + (x - 5)^2]^2$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = [x^2 + (3x - 2)^3]^4$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[4]{(5x+1)^3}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = 3x.\sqrt{x^2 + 1}$ ise $f'(\sqrt{8}) = ?$

Soru : $f^3(x) = 2x + x^3 + 15$ ise $f'(2) = ?$

Soru : **$f^2(x) = x^4 + 4x - 1$ ise $f'(1)$ ifadesinin <u>pozitif</u> değeri kaçtır ?**

Soru : $f^2(x+5) = 3x^2 + x^4$ ise $f'(4)$ ifadesinin **negatif** değeri kaçtır ?

Kural 9: (Zincir Kuralı)

$y = h(t)$ ve $t = k(x)$ olsun. Yani fonksiyonlar x yerine başka bir değişkene bağlılar. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

olarak alınır. Bu yönteme " zincir kuralı " adı verilir. Yani her fonksiyonun kendi değişkenine bağlı olarak türevi alınır. Bu değişkenler x gibi düşünülür.

$y = h(t)$, $t = k(z)$ ve $z = g(x)$ olsun. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

olarak alınır.

Soru : $y = 5t - 11$ ve $t = x^3 + 1$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 2$ için sonucunu bulunuz.

Soru : $y = m^2 - 11m$ ve $m = 4x + 5$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = -1$ için sonucunu bulunuz.

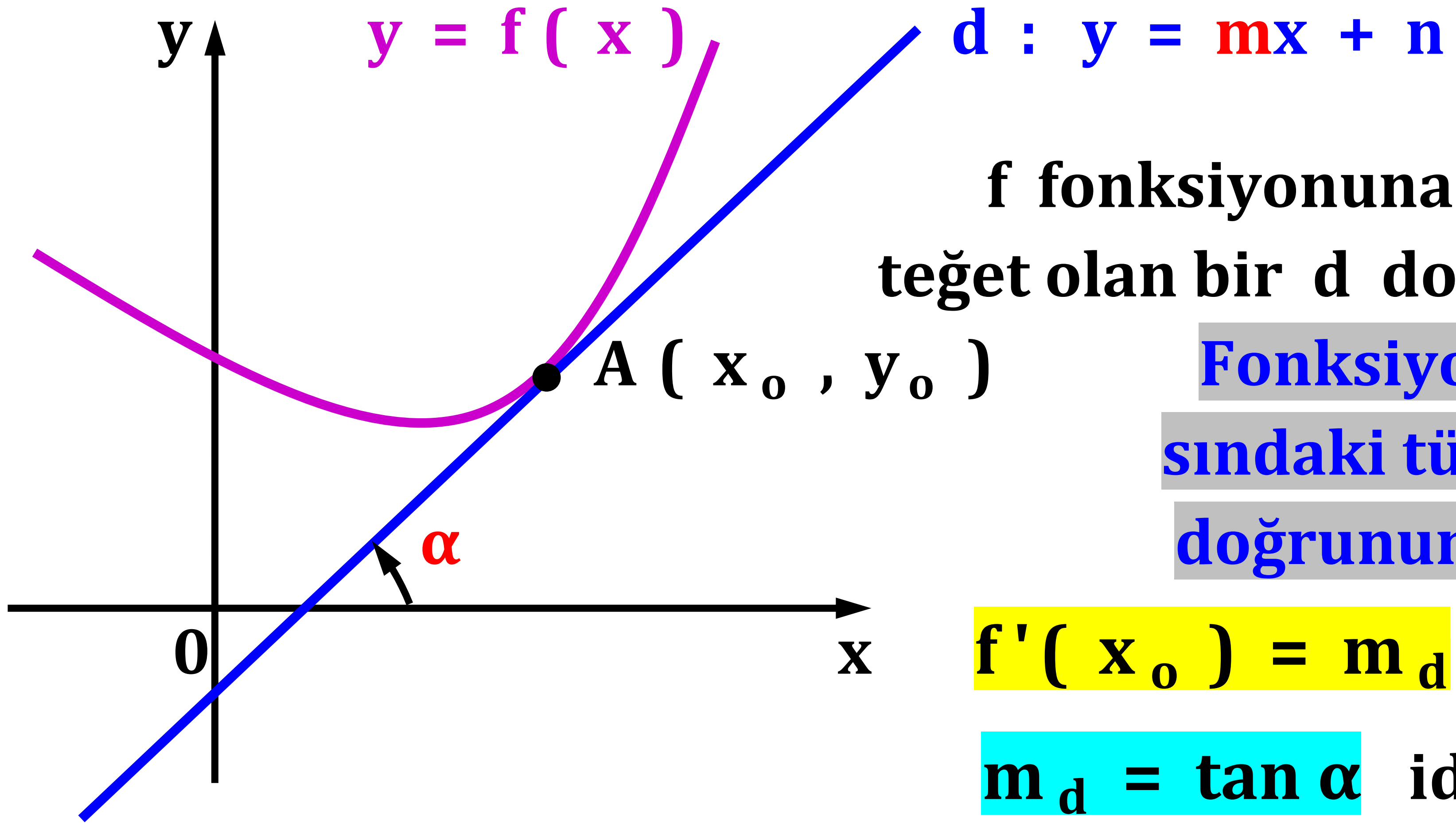
Soru : $y = 3t^2 + 2$, $t = 2u + 1$ ve $u = x^3 + x$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ için sonucunu bulunuz.

Soru : $t = x^2 - 2x$, $y = 2 + 3u$ ve $u = t^2 - 1$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ ve x'in tam sayı değerini sağlayan t için sonucunu bulunuz.

Soru : $p = 2v^2 - 1$, $k = \sqrt{q} + 3$ ve $v = k^2 + k$ ise $\dfrac{dp}{dq}$ ifadesinin $q = 4$ için sonucunu bulunuz.

Kural 10: (Türev – Eğim İlişkisi)

Zamana bağlı konun fonksiyonu $x(t)$ için; fonksiyona $A(t_o, x(t_o))$ noktasında teğet olan bir d doğrusu için, fonksiyonun bu noktadaki türevi d doğrusunun eğimine eşit olduğunu türevin başında işlemiştik.



f fonksiyonuna A noktasında teğet olan bir d doğrusu verilsin. **Fonksiyonun A noktasındaki türevinin değeri doğrunun eğimini verir.**

$f'(x_o) = m_d$ olarak alınır.

$m_d = \tan\alpha$ idi.

Doğru denklemi $y - y_o = m.(x - x_o)$ olarak bulunurdu.

Soru : **$y = f(x) = 2x - x^2 + 3$ eğrisine $x = 3$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = (3x - 2).(5 - x)$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$ **fonksiyonunun A (x , – 2) noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.**

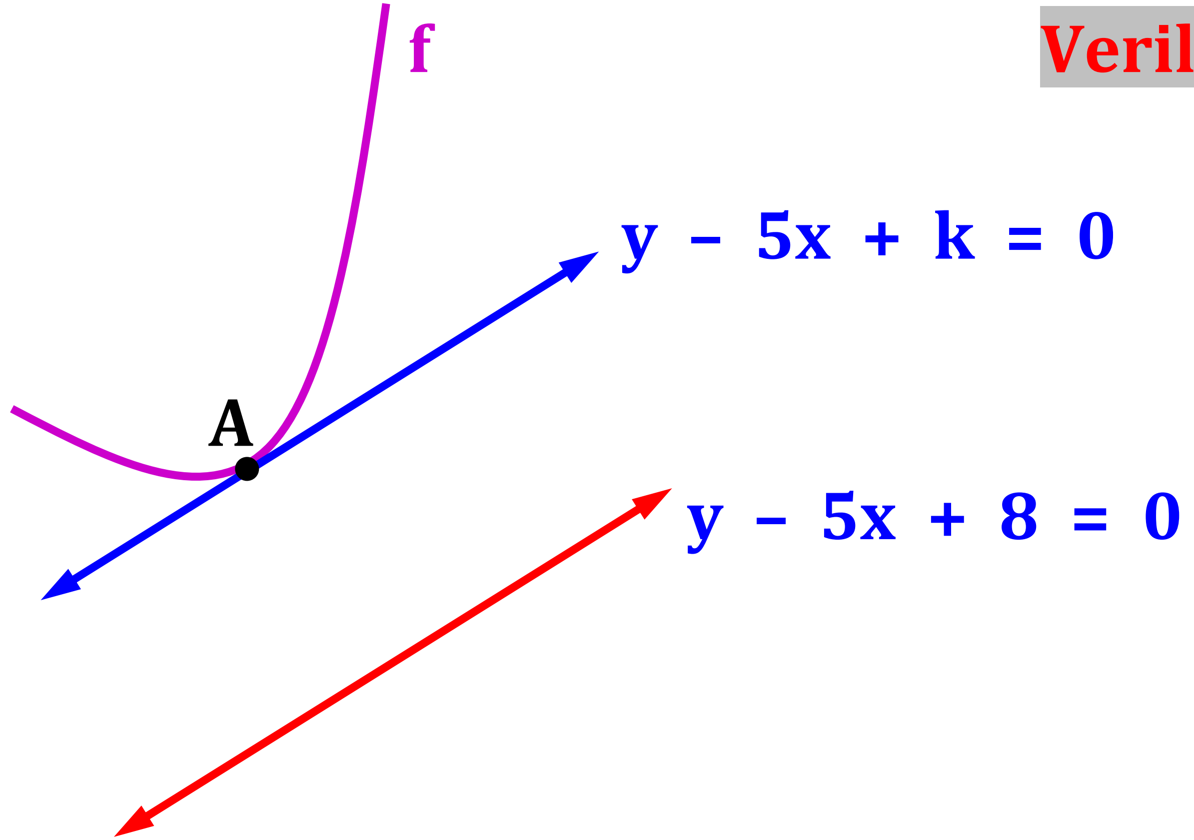
Soru : $y = f(x) = \sqrt{16 - 2x}$ **fonksiyonunun** $x = \dfrac{15}{2}$ **apsisli noktasındaki teğetinin x ekseniyle yaptığı pozitif yönlü geniş açının ölçüsü kaç derecedir ?**

Soru : $y = f(x) = x^3 + kx^2 + x$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemi $2y - 2x + 1 = 0$ ise $k = ?$

Soru : $y = f(x) = x^2 - 4x + k$ **eğrisine teğet olan doğrunun denklemi** $2x - y + 5 = 0$ **ise teğet noktasını ve** k **değerini bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x + x^2$ fonksiyonun grafiği üzerinde olan ve denklemi $y - 5x + 8 = 0$ olan doğruya <u>en yakın</u> noktasının;

A) **Koordinatlarını bulunuz.**



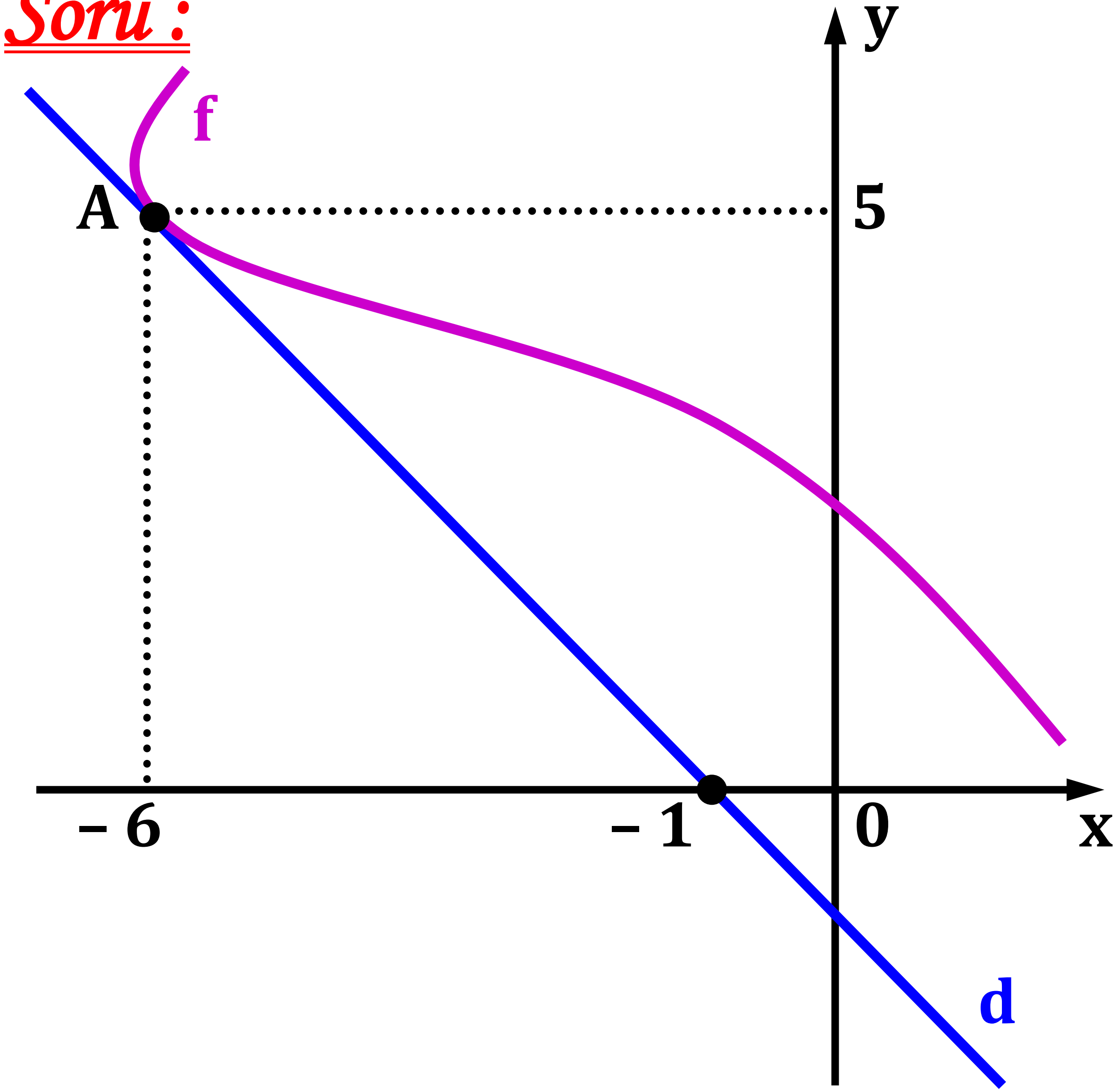
Verilen doğruya paralel olan ve f ’e teğet olan doğru çizilir ve eğim – türev ilişkisinden nokta bulunur.

B) **Bu doğruya olan uzaklığını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = (4x - 2).(3 - x)$ **fonksiyonun grafiği üzerinde olan ve denklemi** $2x + y - 9 = 0$ **olan doğruya <u>en yakın</u> noktayı bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^2 + kx + p$ ve $y = h(x) = -x^2 + nx$ fonksiyonları $(1, 0)$ noktalarında birbirine teğettir. Buna göre k, p ve n sayılarını bulunuz. **(Nokta denklemleri sağlar. Teğet doğrularının eğimleri de birbirine eşitlenir.)**

Soru :

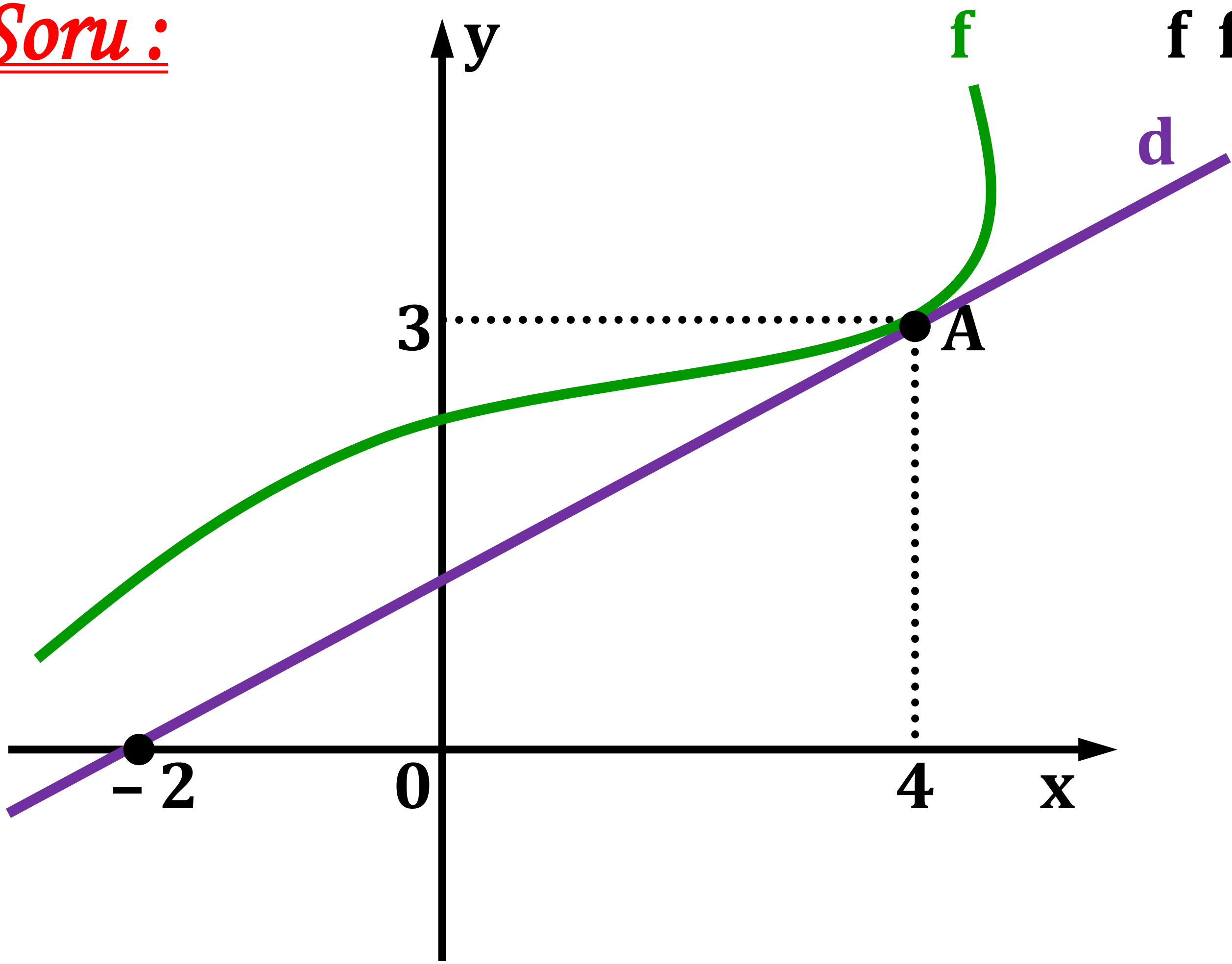


f fonksiyonu A noktasında d doğrusuna teğettir.

$k(x) = x \cdot f(x)$ ise

$k'(-6) = ?$

Soru :

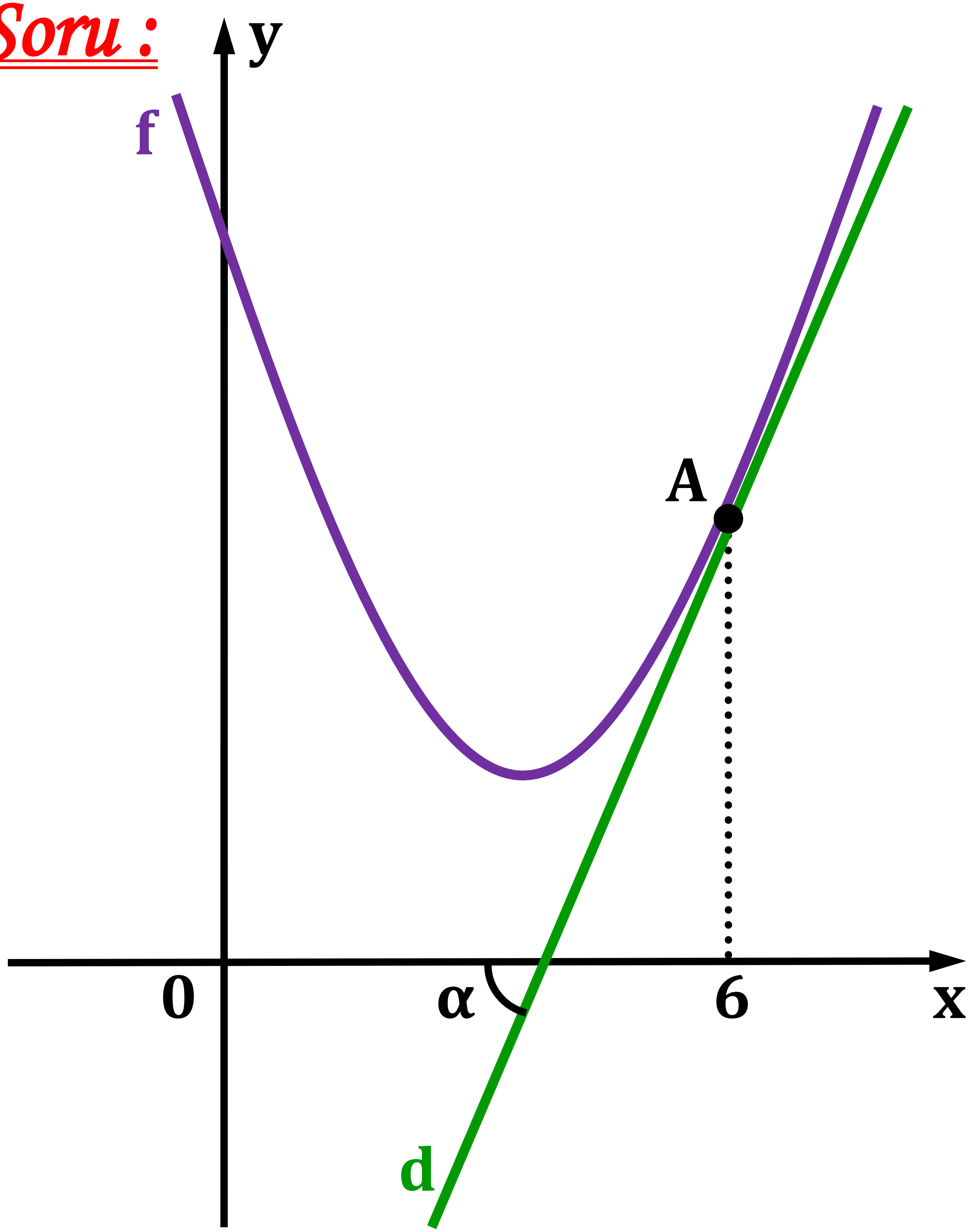


f fonksiyonu A noktasında d doğrusuna teğettir.

$$k(x) = x^2 \cdot f(x) + 1$$

$$k'(4) = ?$$

Soru :



$f(x) = x^2 + tx + 18$ parabolü ile d doğrusu A noktasında birbirlerine teğettir. $\tan\alpha = 4$ olup $k(x) = f^2(2x - 4)$ ise; A) $k'(5) = ?$

B) d doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Kural 11: (Türev – Süreklilik İlişkisi)

Bir f fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için sürekli olmak üzere, fonksiyonun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise bu fonksiyon $x = a$ için türevlenebilirdir.

f fonksiyonu $x = a$ için sürekli ve

$f'(a^{+}) = f'(a^{-}) = k$ ise $f'(a) = k$ olarak alınır.

***** Bir fonksiyonun $x = a$ noktası için sürekliliği belirtilmemişse işleme öncelikle süreklilik kontrolü ile başlanır. Süreklilik sağlanırsa ardından sağdan ve soldan türev kontrolü yapılır. Süreklilik sağlanmazsa türev kontrolüne gerek yoktur.**

Not : **1) f fonksiyonu bir noktada türevli ise bu noktada aynı zamanda da süreklidir.**

2) f fonksiyonu bir noktada sürekli ise bu noktada türevi vardır diyemeyiz.

3) f fonksiyonu bir noktada sürekli değil ise bu noktada türevi de yoktur.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & , \quad x < 1 \text{ ise} \\ 2 & , \quad x = 1 \text{ ise} \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = 1$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & , \quad x < -1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x} + 4 & , \quad x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = -1$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & , \quad x < 8 \text{ ise} \\ x - 4 & , \quad x = 8 \text{ ise} \\ \dfrac{5x + 20}{x - 23} & , \quad x > 8 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = 8$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b & , \quad x < -2 \quad \text{ise} \\ 12x + 2b & , \quad x \geq -2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun $x = -2$ değeri için türevi varsa $a . b = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 4 & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \\ 2x^2 + mx & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

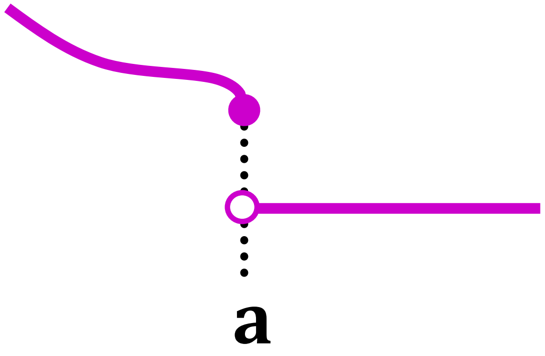
parçalı fonksiyonunun $x = 1$ değeri için türevi varsa $k \cdot m = ?$

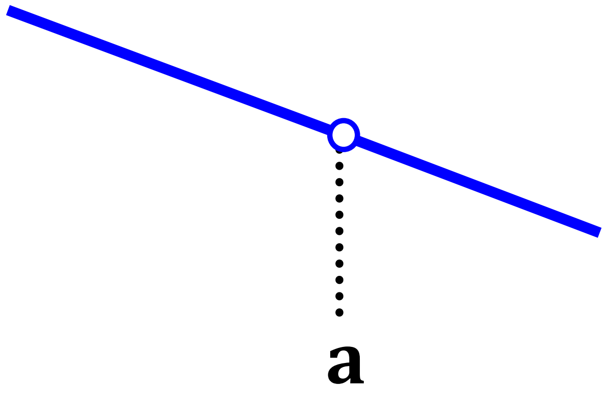
Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 6 & , \quad x \leq 0 \text{ ise} \\ 3bx + 5 + b & , \quad 0 < x < 3 \text{ ise} \\ -x^3 + cx - 9 & , \quad x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

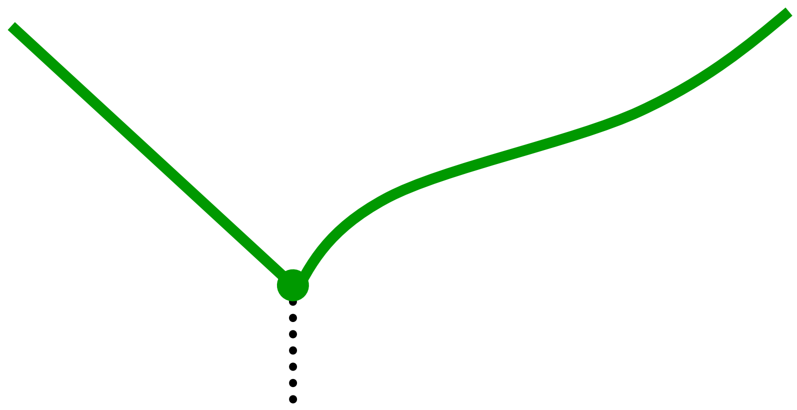
parçalı fonksiyonunun $x = 0$ değeri için **türevi var** ama $x = 3$ için **sürekli değil** ise c sayısı kaç olamaz ?

Not : **1) Kritik noktalar yani grafikte kesintinin olduğu noktalarda fonksiyon sürekli değildir. Dolayısıyla bu kritik noktalarda fonksiyon türevsizdir.**





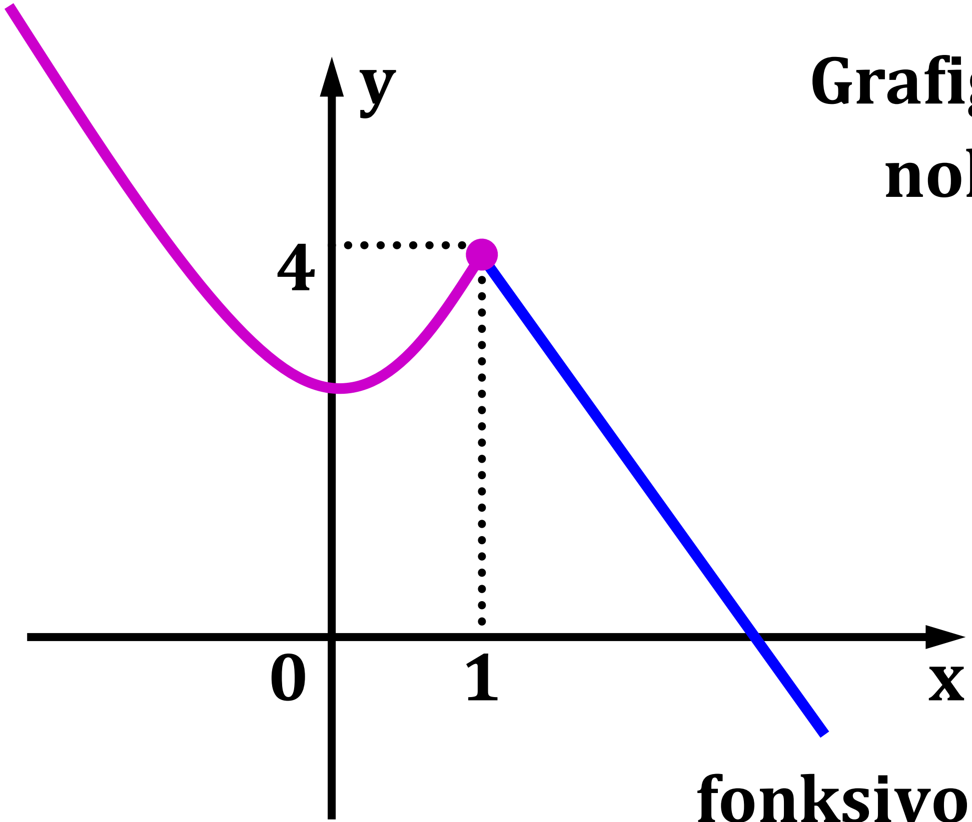
Fonksiyon x = a noktasında sürekli olmadığı için bu noktada türevli de değildir.



2) Fonksiyon kırılma (grafiğin sol ve sağ kısımları farklı) noktalarında sürekli olmasına rağmen bu noktalarda türevli değildirler.

a Çünkü türev sonuçları (fonksiyona teğet olan doğruların eğimi) farklıdır.

Örneğin $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \\ -2x + 6 & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun alalım.

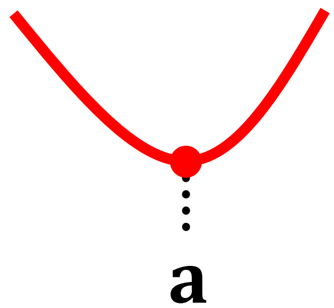


Grafiğe baktığımızda f fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir. Ama bu noktada türevi inceleyelim.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2x + 0 = 2.1 = 2 \\ f'(1^+) &= -2 + 0 = -2 \end{aligned} \right\}$$

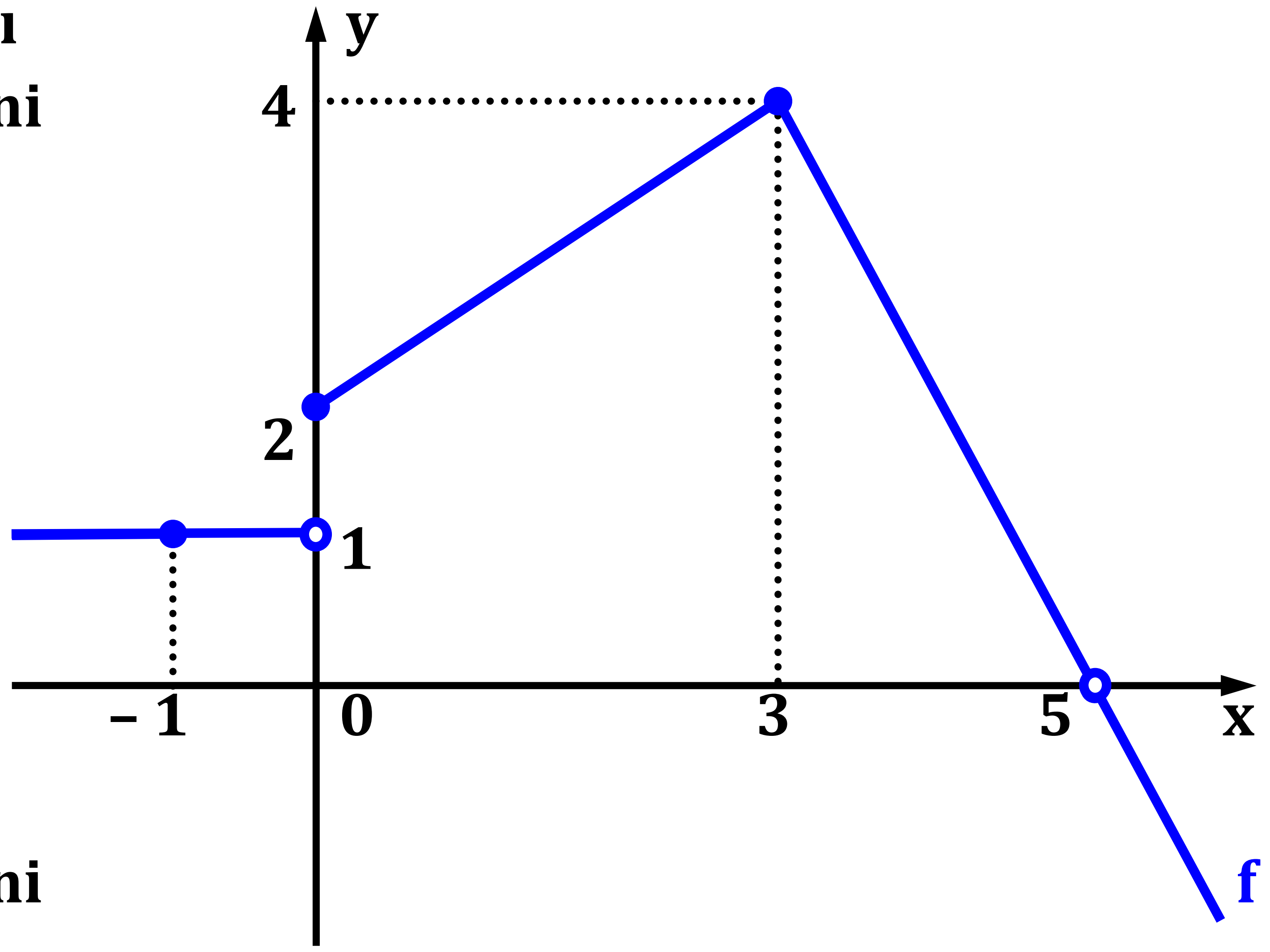
$f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında türevli değildir.

3) **Fonksiyonun $x = a$ noktasının sağında ve ve solunda aynı grafik devam ediyorsa fonksiyon bu noktada hem sürekli hem de türevlidir.**



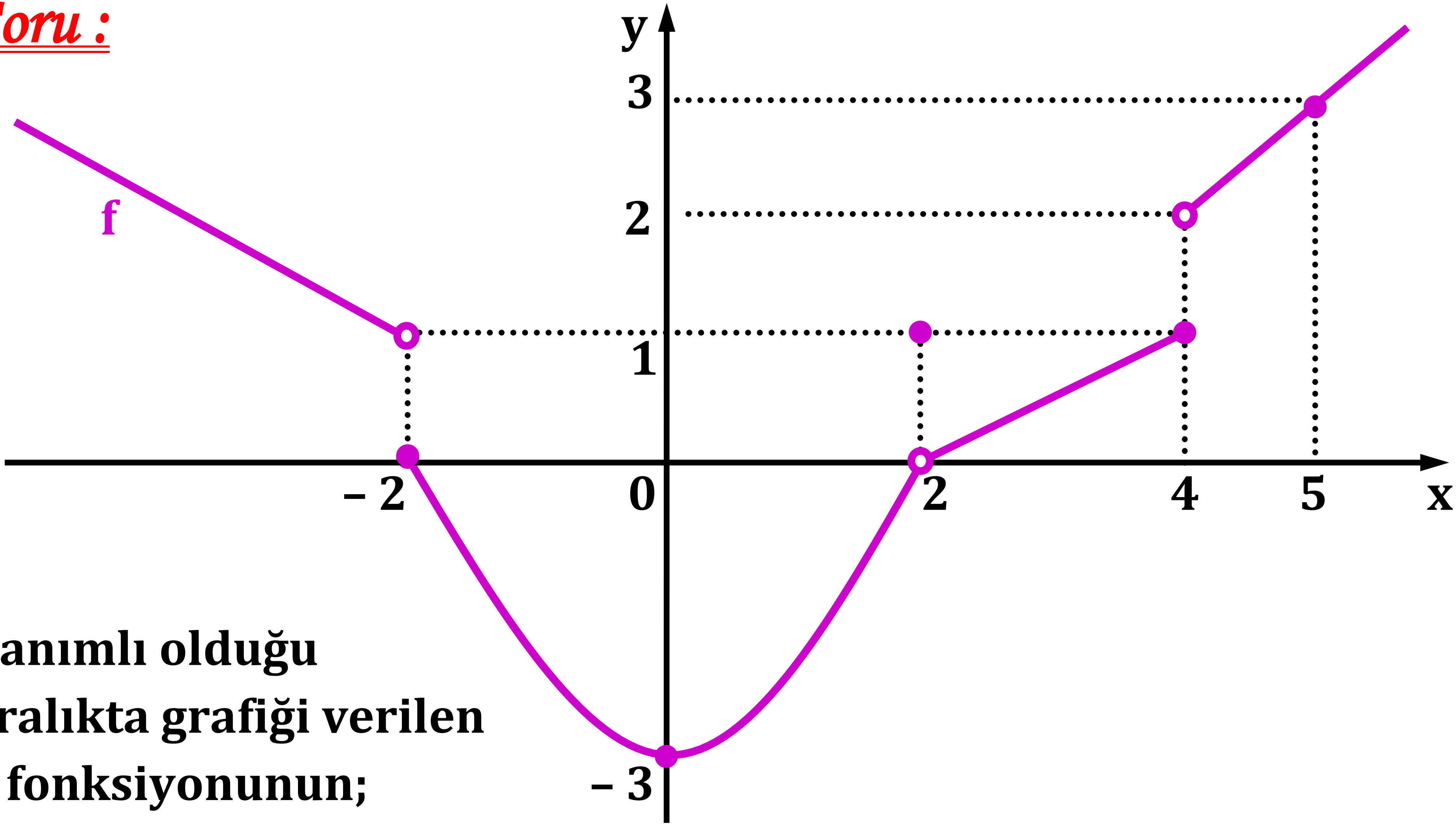
Soru : Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonunun;

A) Türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.



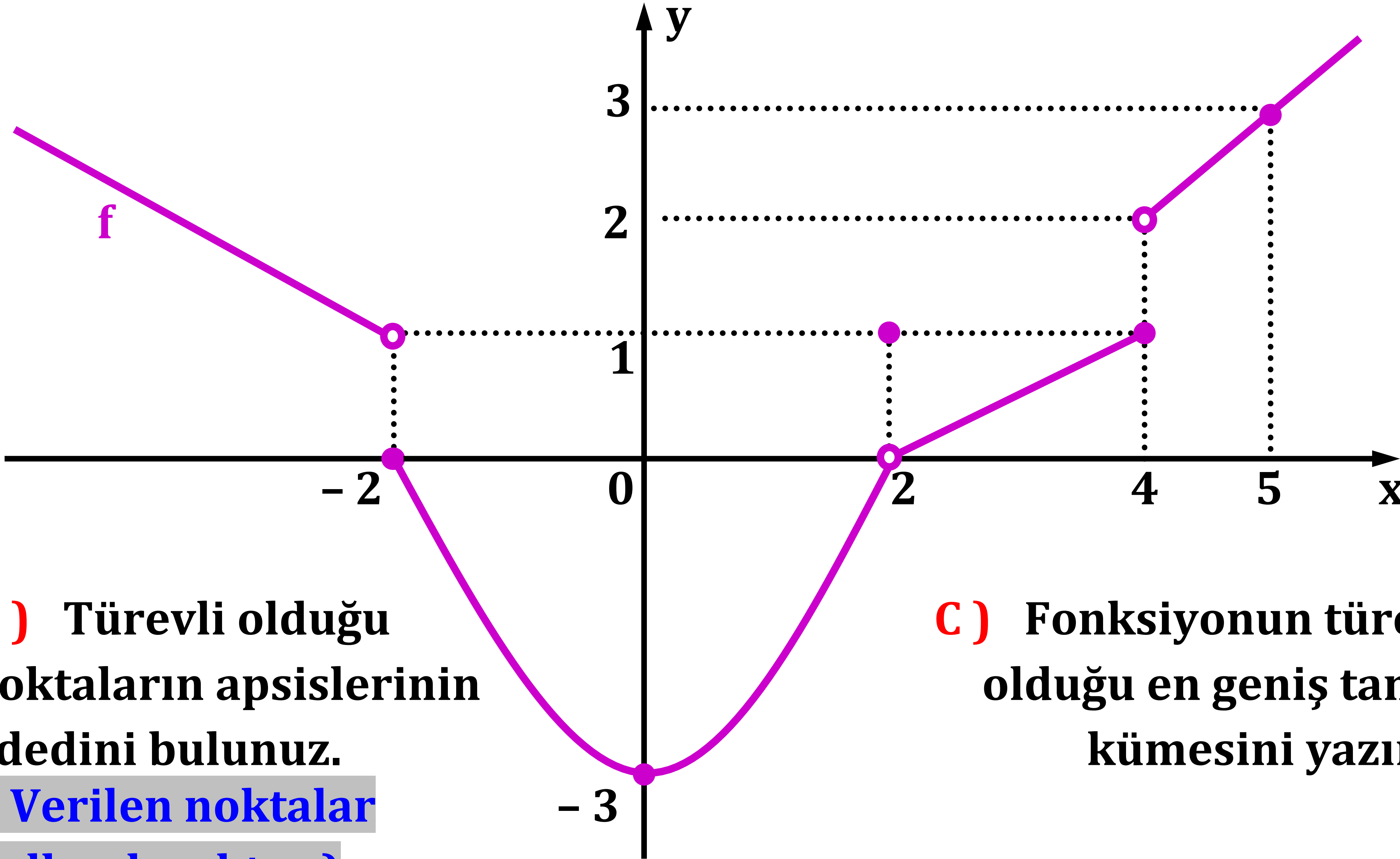
B) Sürekli olduğu halde türevinin olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonunun;

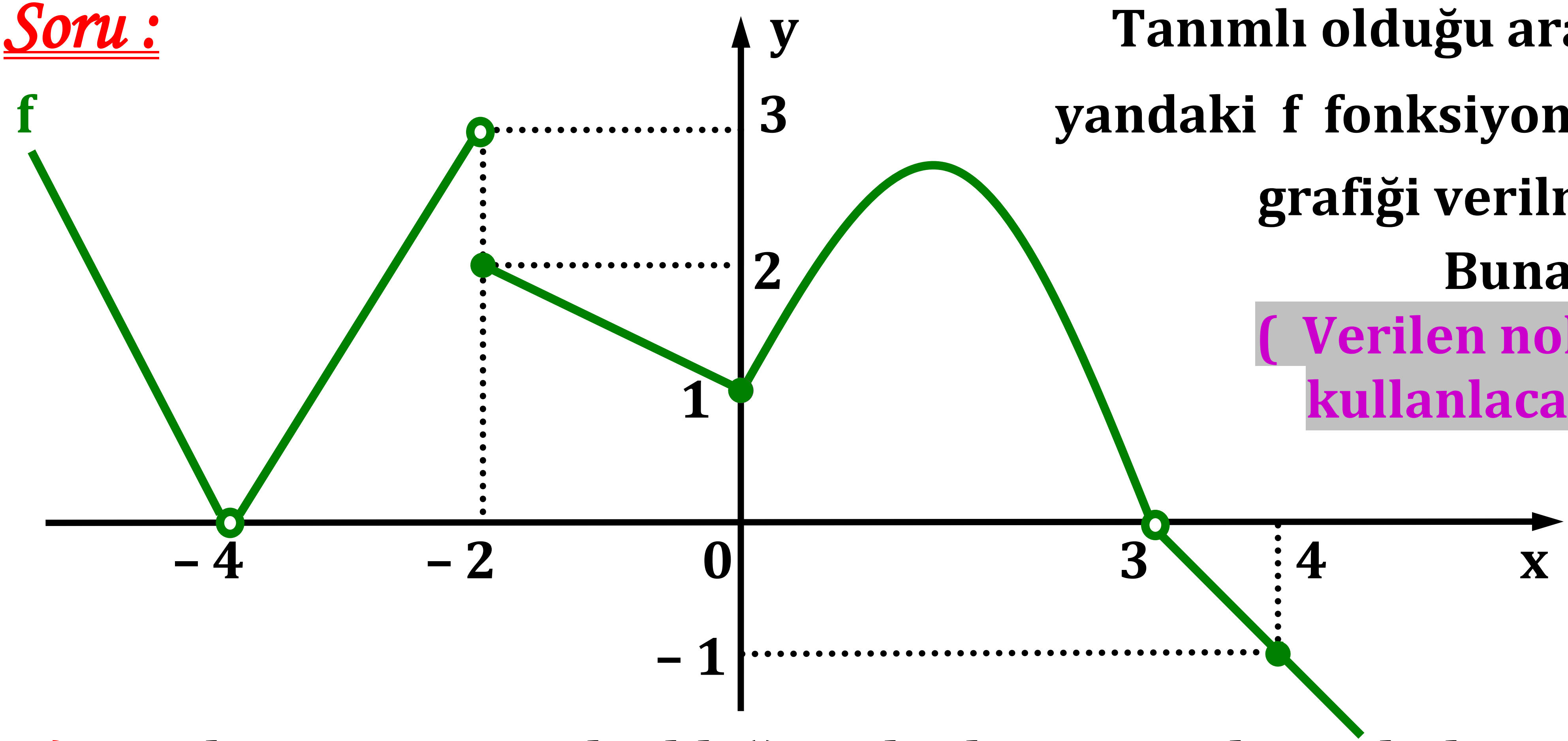
A) **Türevli olmadığı noktaların apsisleri toplamı kaçtır ?**



B) Türevli olduğu noktaların apsislerinin adedini bulunuz.
(Verilen noktalar kullanılacaktır.)

C) Fonksiyonun türevli olduğu en geniş tanım kümesini yazınız.

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta yandaki f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

(Verilen noktalar kullanlacaktır.)

A) Fonksiyonun türevli olduğu noktaların apsislerini bulunuz.

B) Fonksiyonun türevli olduğu en geniş tanım kümesini yazınız.

12. 5. 3. Türevin Uygulamaları

Terimler ve Kavramlar: **Kritik nokta, ekstremum nokta, mutlak maksimum, mutlak minimum, yerel maksimum, yerel minimum**

12. 5. 3. 1. Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları türev yardımıyla belirler.

12. 5. 3. 2. Bir fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum, yerel maksimum, yerel minimum noktalarını belirler.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak grafik çizimine yer verilir ve yorumlanır.

12. 5. 3. 3. Türevi yardımıyla bir fonksiyonun grafiğini çizer.

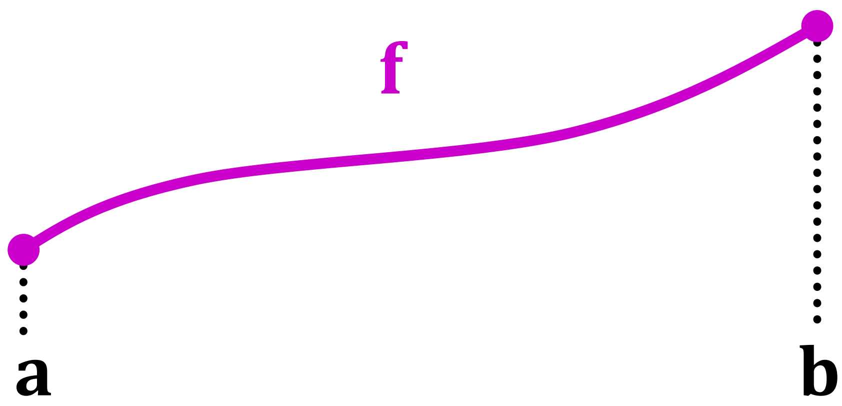
A) Grafik çizimleri polinom fonksiyonlarla sınırlandırılır.

B) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

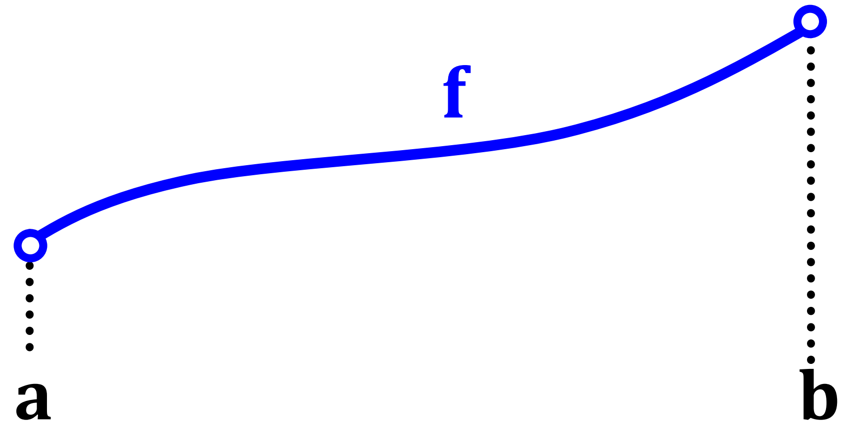
12. 5. 3. 4. Maksimum ve minimum problemlerini türev yardımıyla çözer. Gerçek hayat problemlerine yer verilir.

TÜREVİN UYGULAMALARI

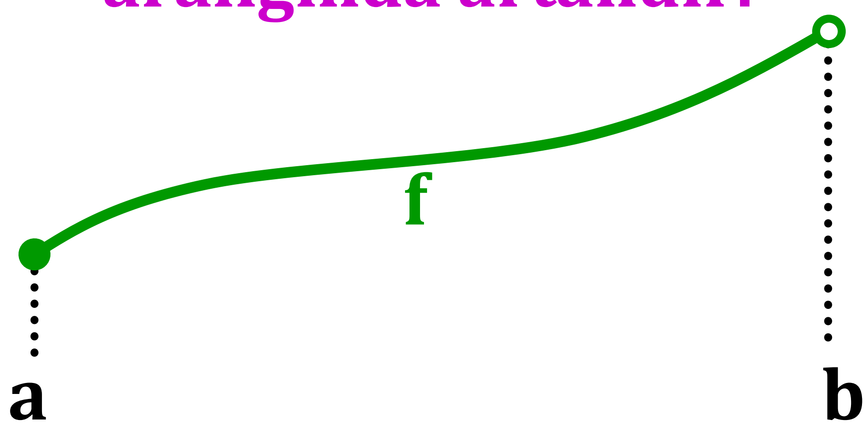
Artan ve Azalan Fonksiyonlar (11. Sınıf Konusuydu)



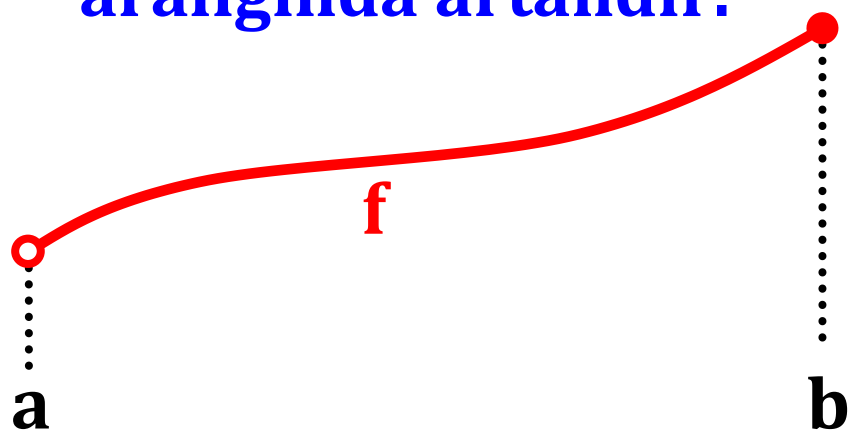
f fonksiyonu [a , b]
aralığında artandır.



f fonksiyonu (a , b)
aralığında artandır.

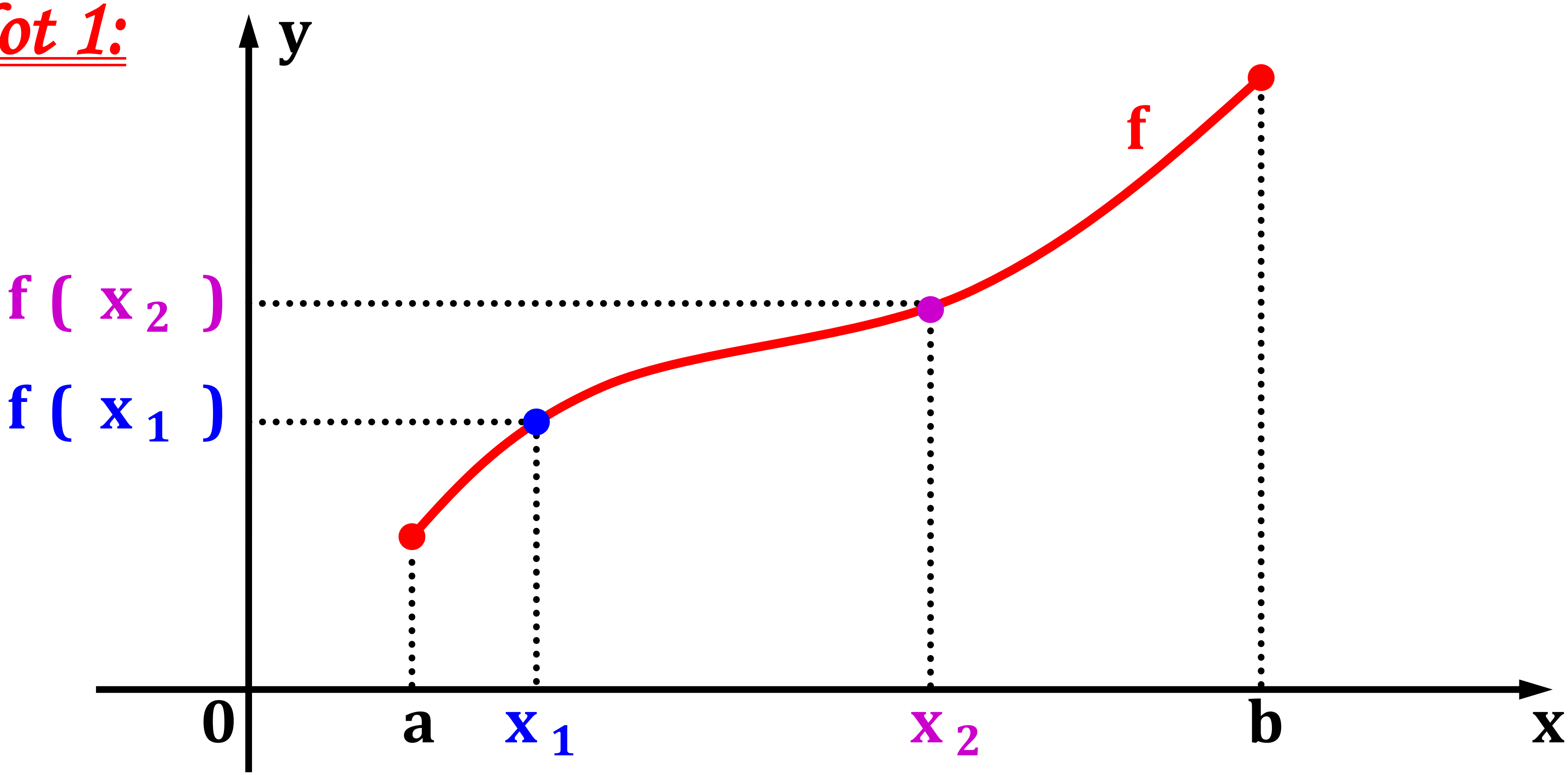


f fonksiyonu [a , b)
aralığında artandır.



f fonksiyonu (a , b]
aralığında artandır.

Not 1:

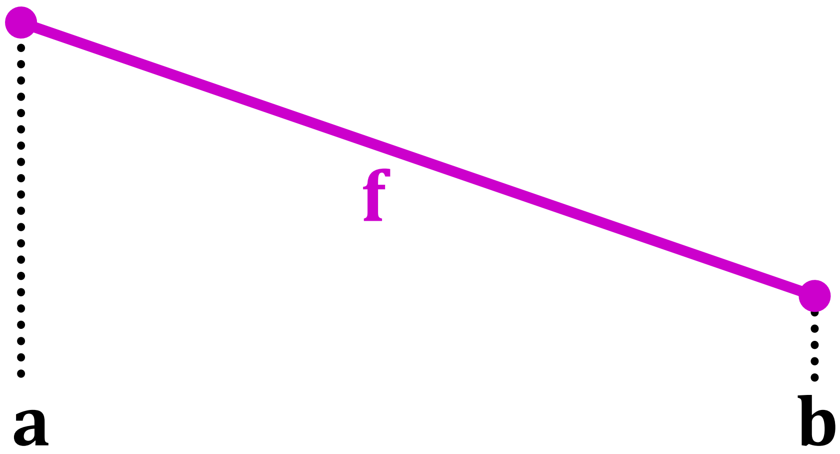


Her x_1 , x_2 $\in$ [a , b] (diğer aralıklar içinde geçerli)

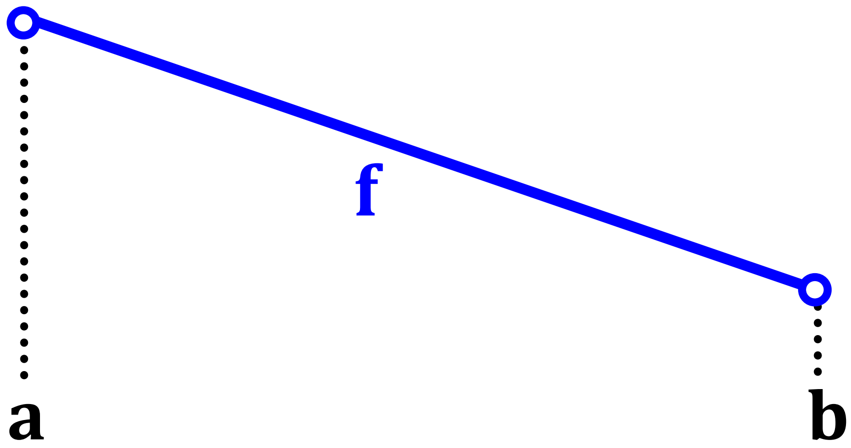
için f artan fonksiyon ise, $x_1 < x_2$ olduğunda

$f(x_1) < f(x_2)$ olmalıdır.

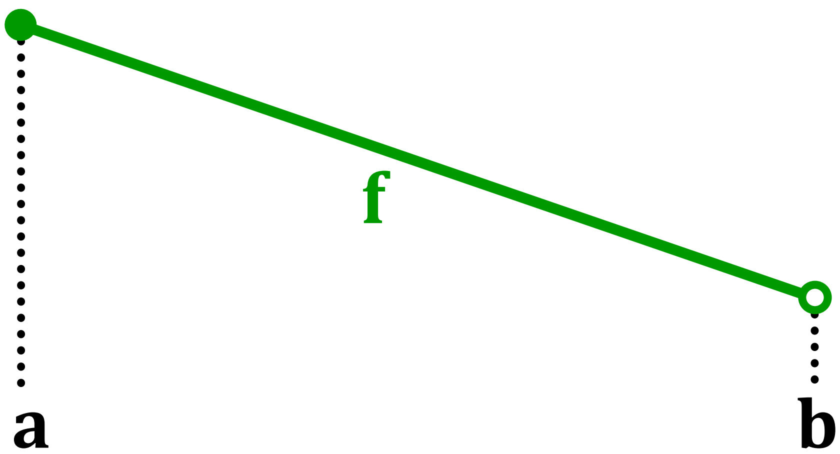
***** Yani x değerleri artarken fonksiyon değerleri de artar.**



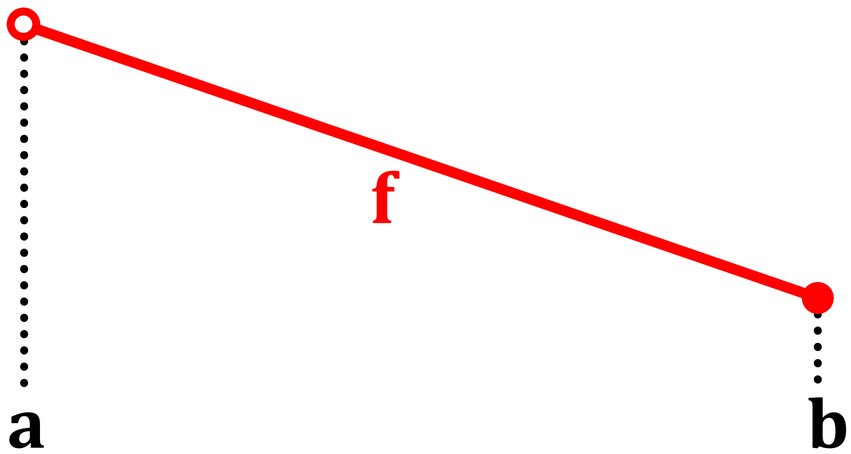
f fonksiyonu [a , b] aralığında azalandır.



f fonksiyonu (a , b) aralığında azalandır.

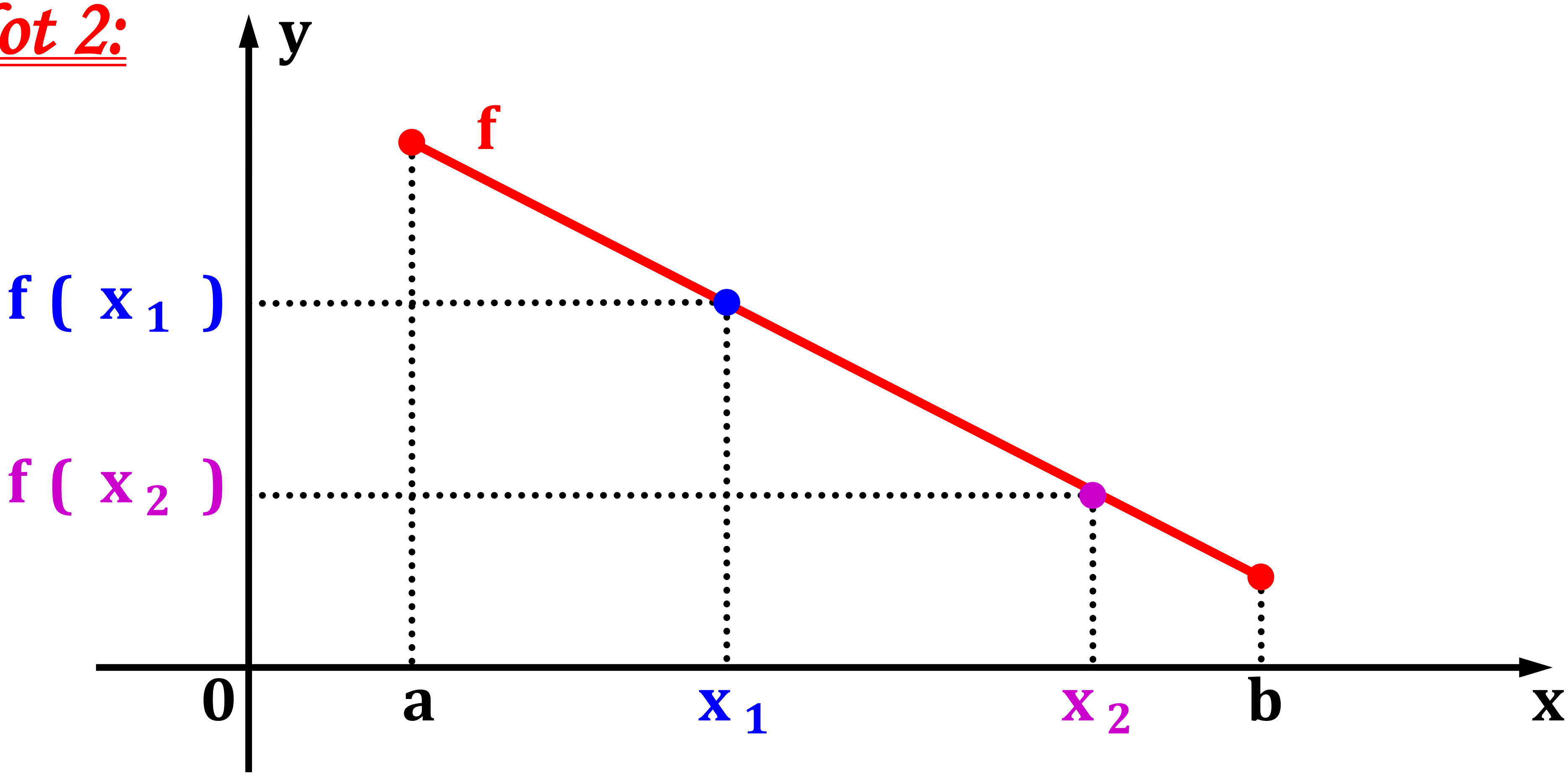


f fonksiyonu [a , b) aralığında azalandır.



f fonksiyonu (a , b] aralığında azalandır.

Not 2:



Her x_1 , x_2 ∈ [a , b] (diğer aralıklar içinde geçerli) için f azalan fonksiyon ise, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ olmalıdır.

***** Yani x değerleri artarken fonksiyon değerleri azalır.**

Soru : f **artan** bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadelerden hangisi **kesinlikle** doğrudur ?

A) $f(5) < f(1)$

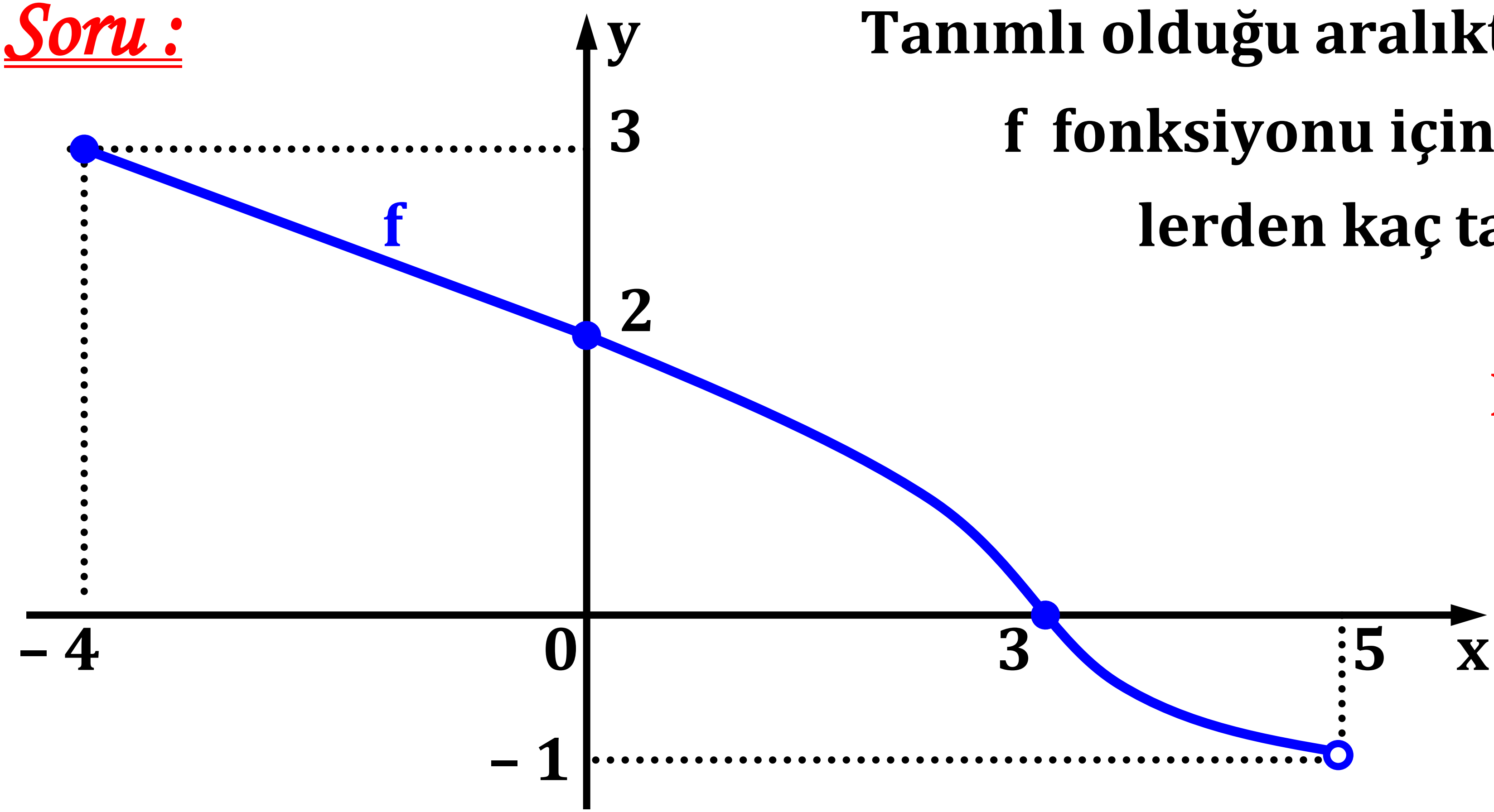
B) $f(-4) > f(-2)$

C) $f(-1) < f(8)$

D) $f(2) - f(0) < 0$

E) $f(10) . f(-5) > 0$

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur ?

I. f fonksiyonu $[-4, 5)$ aralığında azalandır.

II. $f(4) > f(0)$

III. $f(1) < f(-2)$

IV. $f(-3) \cdot f(1) < 0$

V. f fonksiyonunun azalan olduğu aralıklardan birisi $[0, 3]$ aralığıdır.

Kural: $f : [\, a\, ,\, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\, a\, ,\, b\,)$ aralığında türevli olsun. (Sınırların dışı yani, sol sınırın solu ve sağ sınırın sağı belli olmadığından bunlar türev fonksiyonunda dahil edilmez.)

- Her $x \in (\, a\, ,\, b\,)$ için $f\,'(\, x\,) > 0 \iff$ f **artan** fonksiyondur.

- Her $x \in (\, a\, ,\, b\,)$ için $f\,'(\, x\,) < 0 \iff$ f **azalan** fonksiyondur.

- Her $x \in (\, a\, ,\, b\,)$ için $f\,'(\, x\,) = 0 \iff$ f **sabit** fonksiyondur.

*** Çözüm için **türev fonksiyonu** sıfıra eşitlenir ve kökler tabloya yerleştirilerek işaret kontrolü yapılır. Ardından fonksiyonun artan – azalan olduğu aralıklar bulunur.

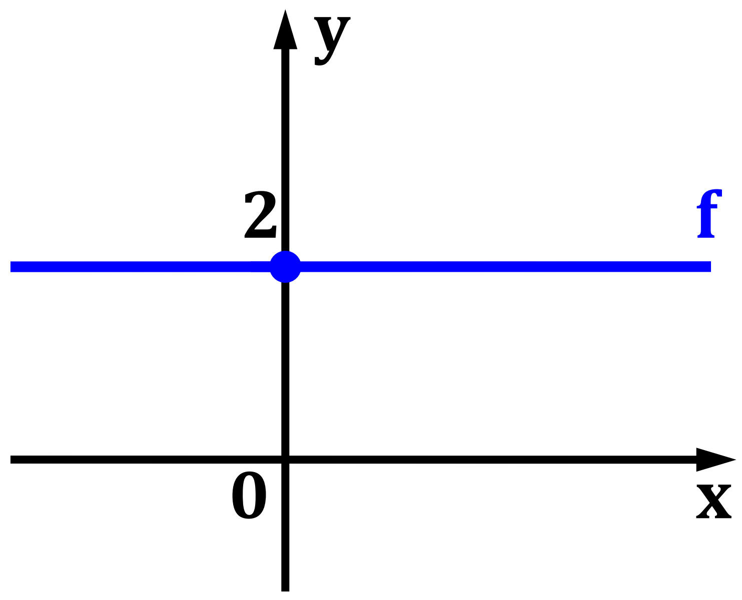
Örnek bir tablo verelim.

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	○	$+$	
$f(x)$		↘ Azalan		↗ Artan	

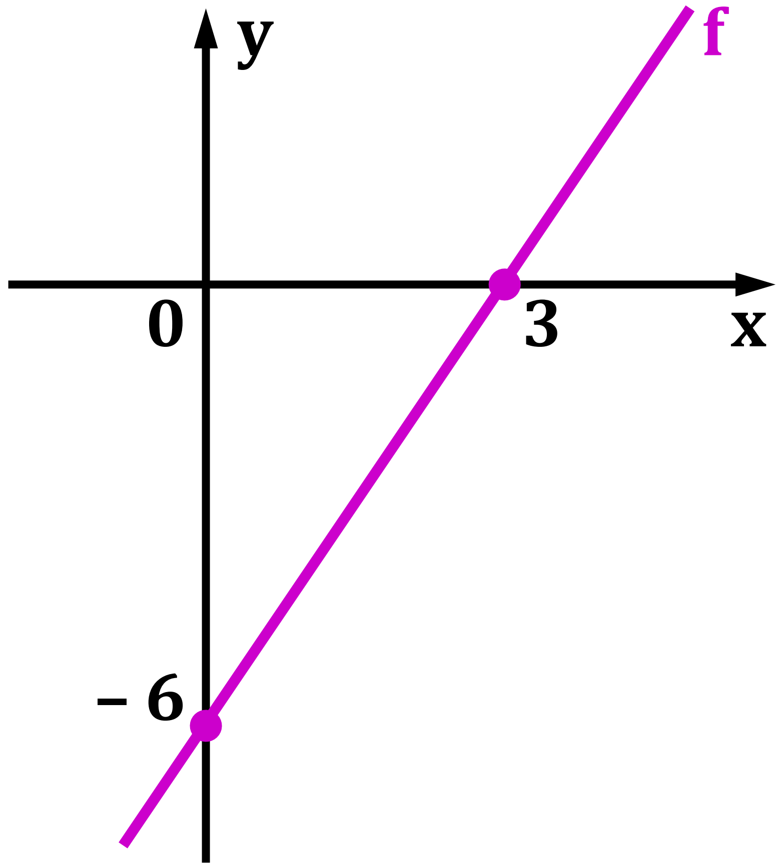
f fonksiyonu; $(-\infty , x_o]$ aralığında azalan, $[x_o , \infty)$ aralığında ise artandır.

*** Tabloda ○ işareti; sayının, türev fonksiyonunun kökü olduğunu gösterir. İçi dolu – boş kavramları kullanılmaz. Sayı çözüm kümelerine dahil olarak alınır.

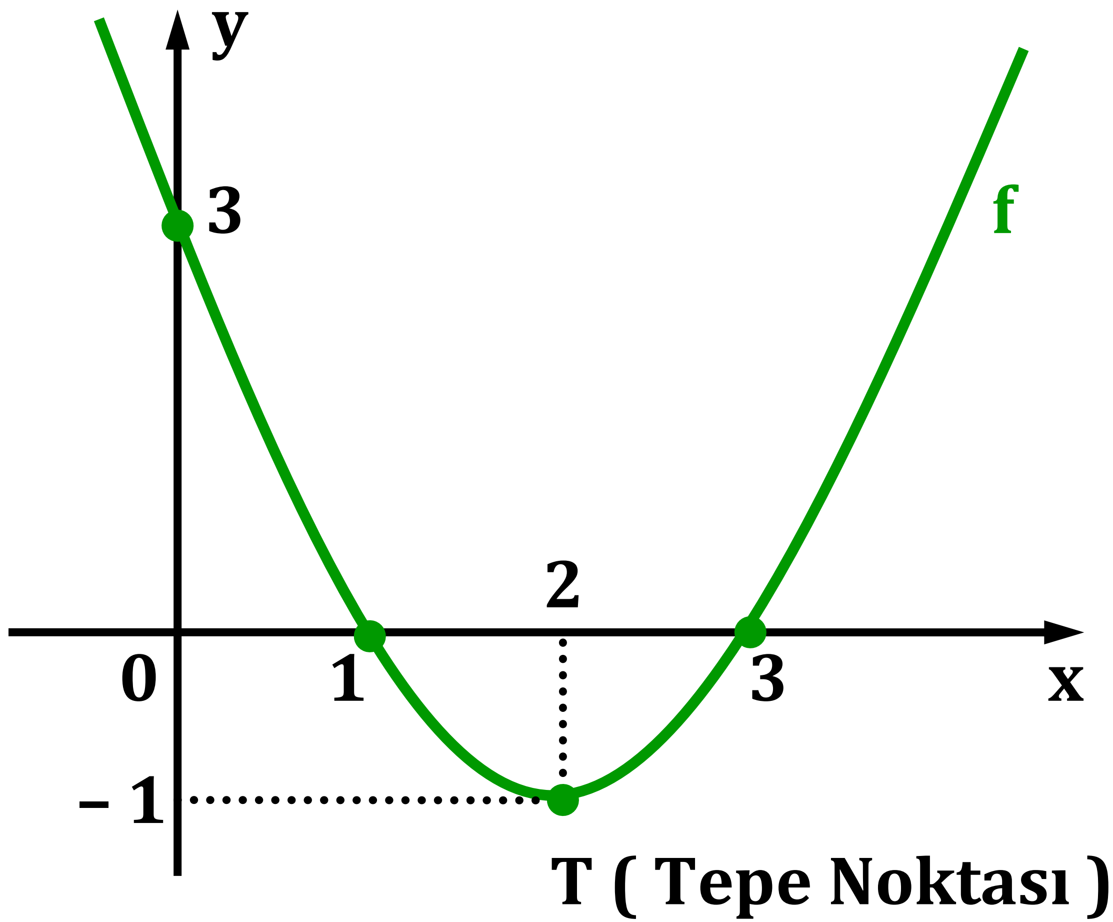
Soru : $y = f(x) = 2$ fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz. **(Doğru grafiğinin çiziminden de istenen bulunabilir.)**



Soru : $y = f(x) = 3x - 6$ fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz. **(Doğru grafiğinin çiziminden de istenen bulunabilir.)**



Soru : $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz. **(Parabol grafiğinin çiziminden de istenen bulunabilir.)**



Soru : **$f(x) = -3x^2 + 24x$ fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

Soru : **$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$ fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{2x^3}{6} - \dfrac{5x^2}{2} - 11$ **fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6x^2 + 36x + 2$ **fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

Soru : $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$ fonksiyonunun **artan olmadığı** aralığı bulunuz.

Soru : $f(x) = \dfrac{4 - x}{2x - 5}$ **fonksiyonunun varsa artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{kx - 9}{x - k}$ **fonksiyonunun daima artan olması için k 'nın çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{kx - k + 15}{x + 2}$ fonksiyonunun daima azalan olması için k'nın çözüm aralığındaki en büyük tam sayıyı bulunuz.

Hatırlatma : (11.Sınıf)

Her $x \in \mathbb{R}$ için;

1) $ax^2 + bx + c > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$

2) $ax^2 + bx + c < 0$ ise $a < 0$ ve $\Delta < 0$

şartlarının ortak çözüm kümesi bulunur. Çözümlerde tablo sisteminden yararlanılır.

a sayısından çözüm gelmiyorsa sadece Δ şartı kontrol edilir. $\Delta = b^2 - 4ac$ idi.

Soru : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+mx^2+(m+6)x+1$ **fonksiyonu daima <u>arta</u>n ise m ’nin çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : $f(x) = \dfrac{(2k+3)x^3}{3} + \dfrac{kx^2}{2} - x + 4$ **fonksiyonu daima azalan ise k 'nın çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : **$f(x) = (2m - 1)x^3 + 3mx^2 + 3x - 1$ fonksiyonu daima artan ise m 'nin çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : $x \in (-\infty, 0)$ olsun. $f(x)$ bu aralıkta artan ve negatif değerli bir fonksiyon olmak üzere altta verilen fonksiyonların artan ve azalan durumunu inceleyiniz. **(Verilen fonksiyonların türevi alınır. Sonucun pozitif veya negatif olma durumuna göre fonksiyonun artan – azalanlık durumuna karar verilir.)**

A) $h(x) = f(x) + 10x - 1$

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ <u>artan</u> ve <u>negatif değerli</u>

B) $k(x) = x \cdot f(x)$

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ <u>artan</u> ve <u>negatif değerli</u>

C) $g(x) = f^3(x)$

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ <u>artan</u> ve <u>negatif değerli</u>

D) $t(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

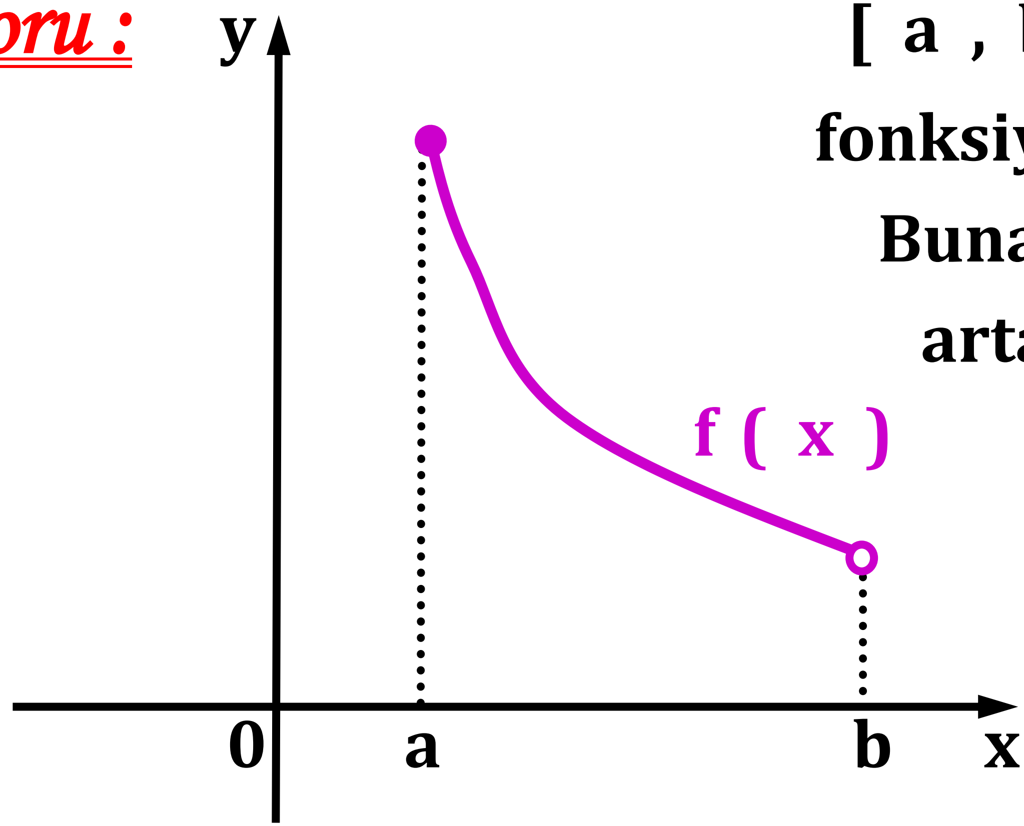
$x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ <u>artan</u> ve <u>negatif değerli</u>

E) $p(x) = -f^2(x^3)$

$x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ <u>artan</u> ve <u>negatif değerli</u>

F) $q(x) = f[f(x)] - 5x$

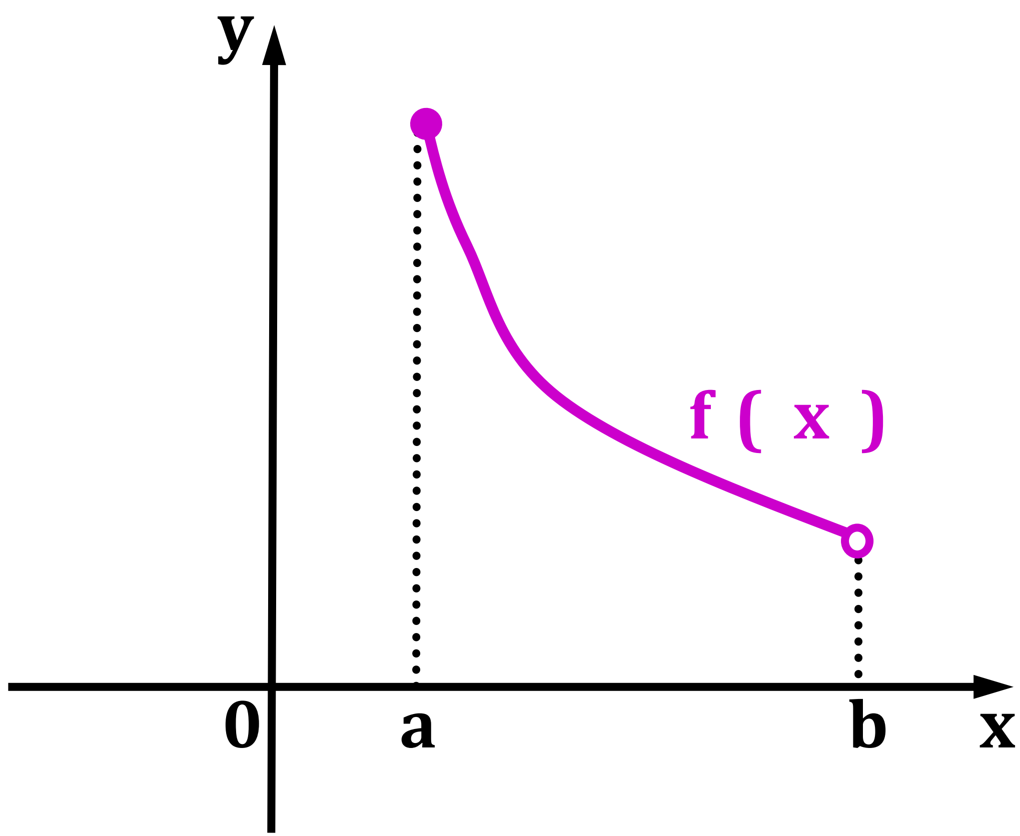
Soru :



[a , b) aralığında tanımlı olan f (x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre altta verilen fonksiyonların artan – azalan durumunu inceleyiniz.

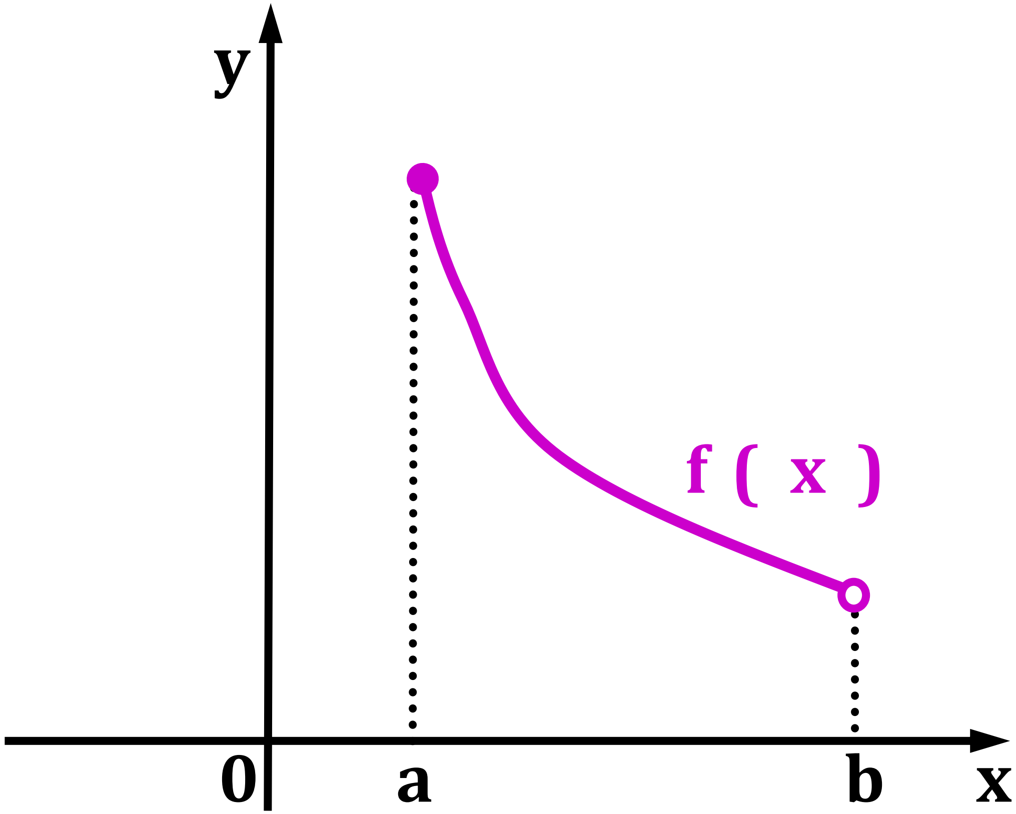
A) $h(x) = x^2 - f(x)$

B) $k(x) = 5f(x) - 4x + 6$



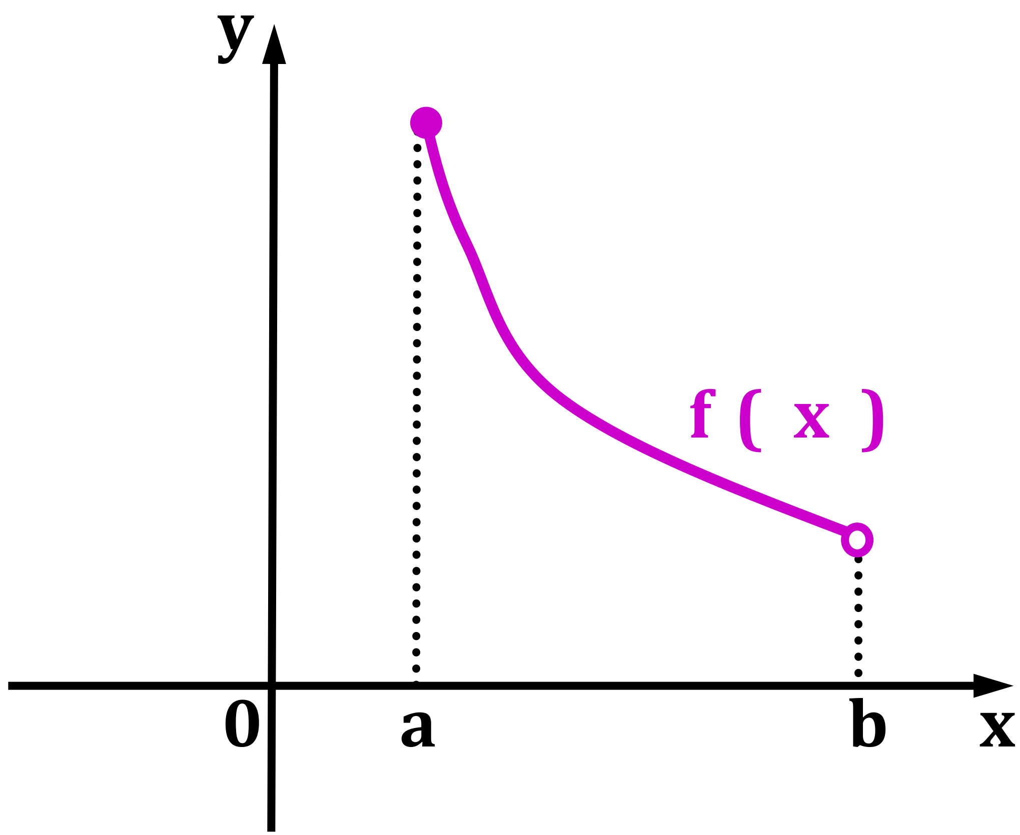
C) $g(x) = f \circ f(x)$

D) $t(x) = f^2(x) + f(x)$

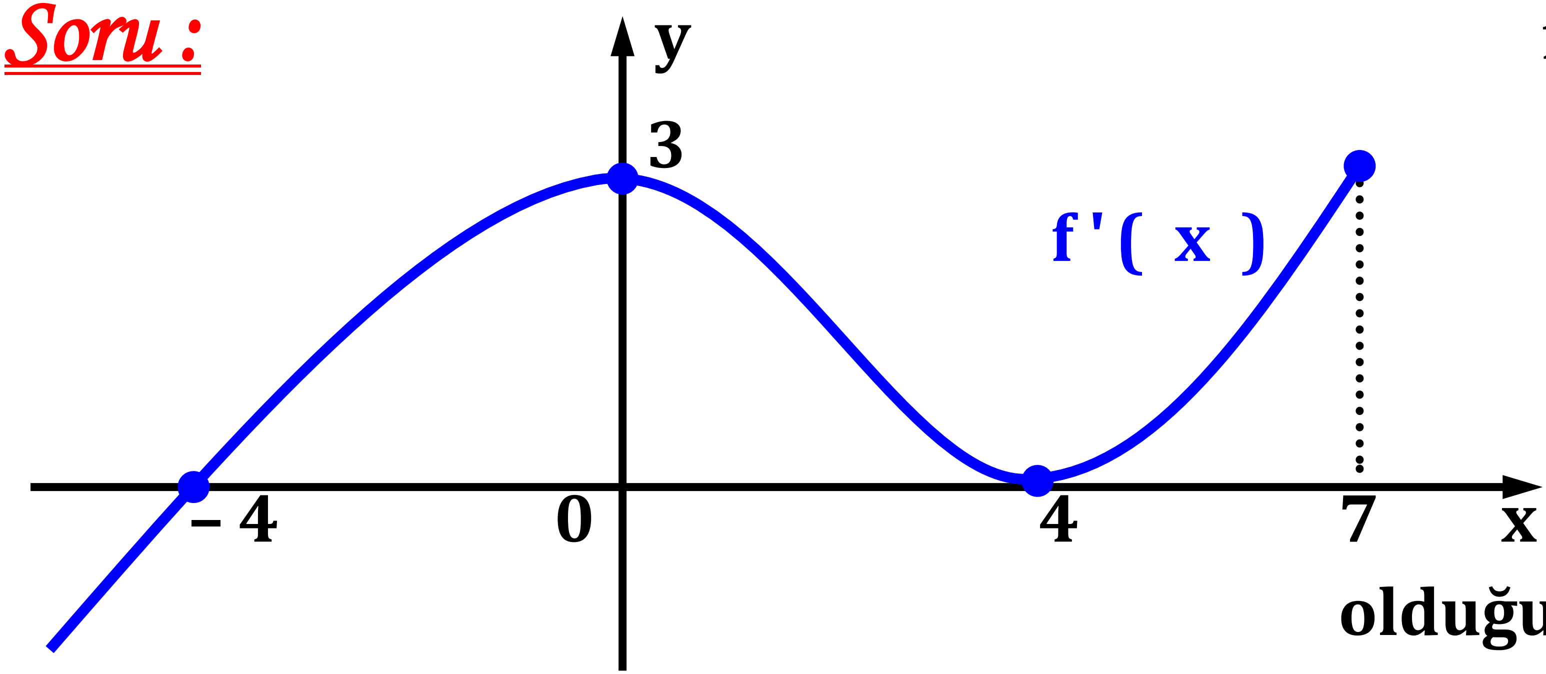


E) $q(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

F) $p(x) = x^2 . f(x) - f(x) - 4x + 2$



Soru :

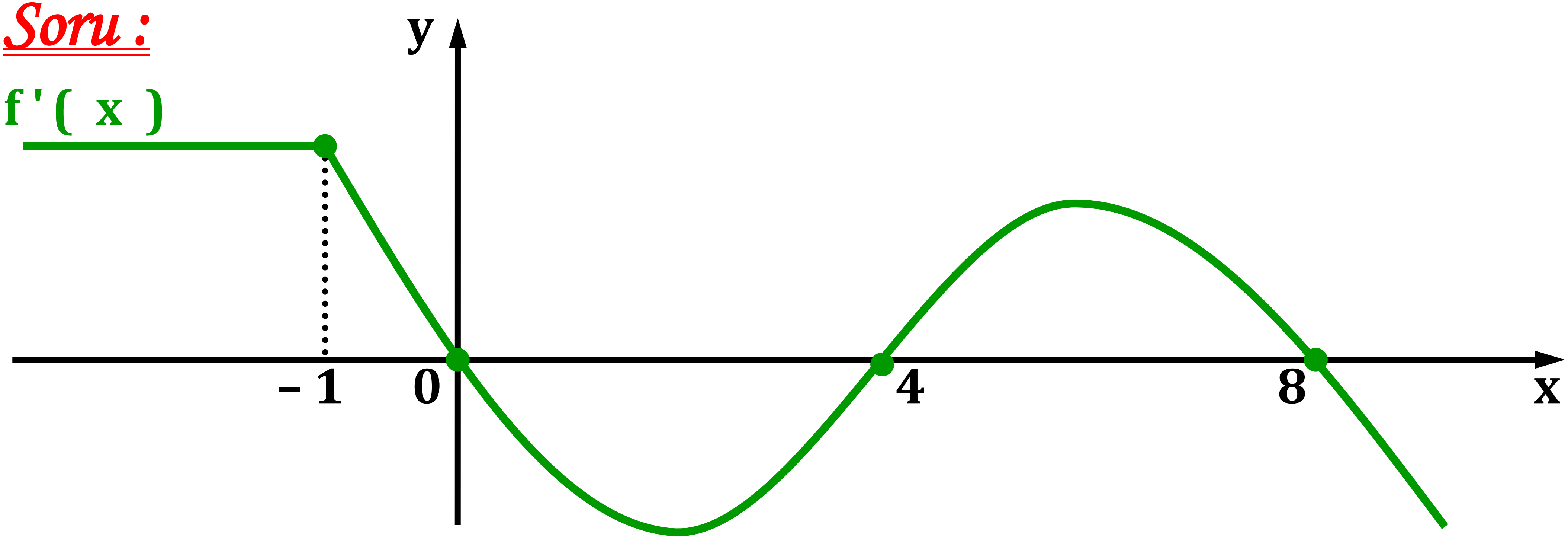


f '(x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre f (x) fonksiyonunun artan – azalan olduğu aralıkları bulunuz.

(f '(x) 'in işaret tablosu yapılır ve f (x) 'in artan – azalan aralıkları bulunur.)

x	
f '(x)	
f (x)	

Soru :



f ' (x) fonksiyonunun grafiği üstte verilmiştir. Buna göre;

A) f (x) fonksiyonunun artan – azalan olduğu aralıkları bulunuz.

x	
f ' (x)	
f (x)	

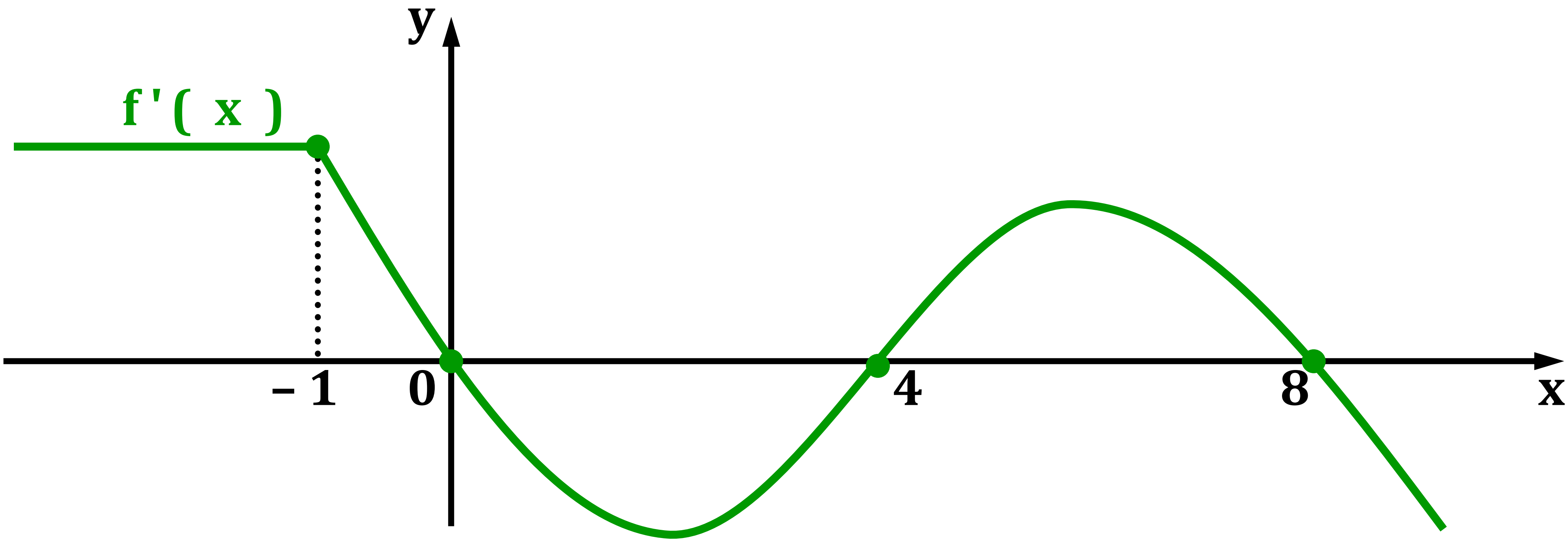
x	
f '(x)	
f (x)	

B) **Alttaki ifadelerden hangileri doğrudur ?**

I. $f(1) < f(3)$

II. $f(5) < f(7)$

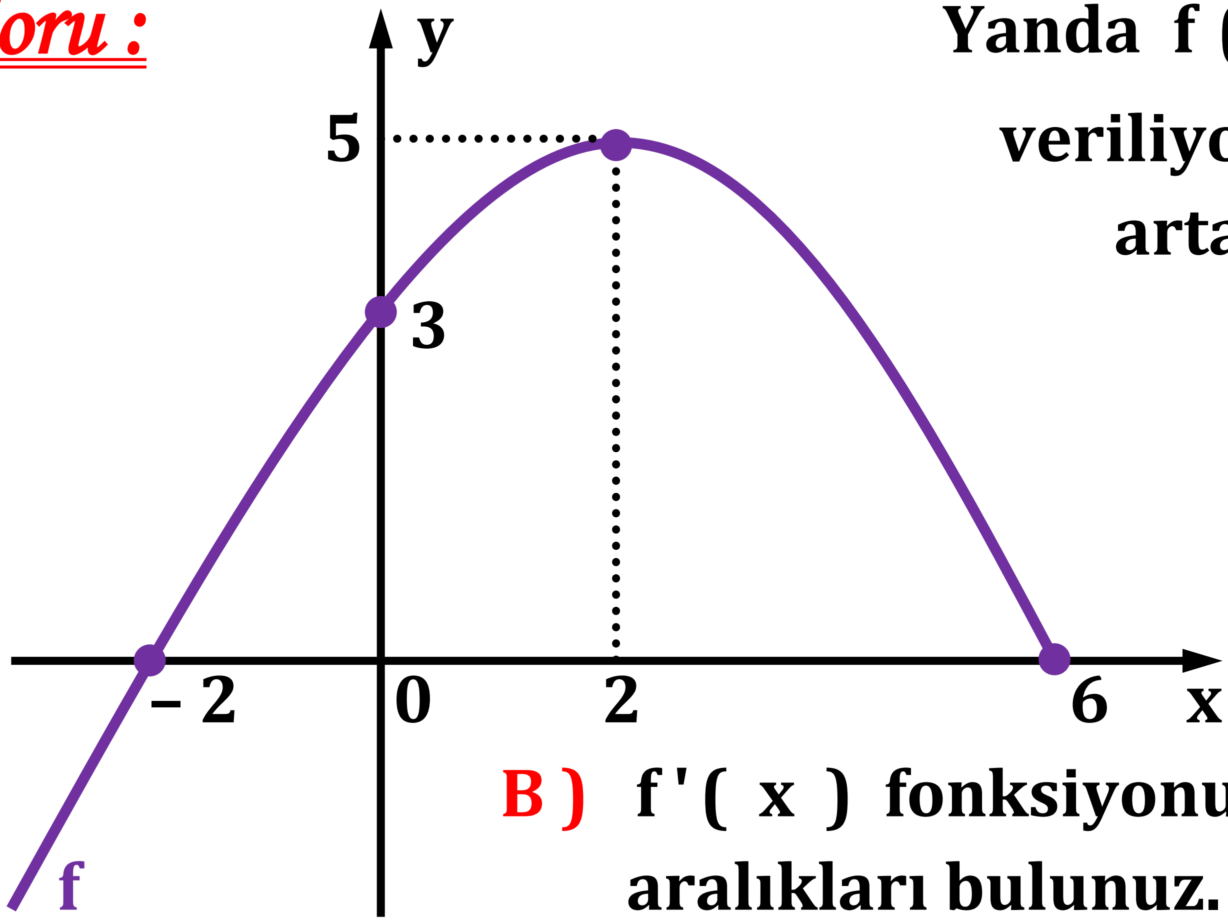
III. $f(9) - f(12) > 0$



IV. $f'(-1) + f'(-5) > 0$

V. $f'(1) \,.\, f'(6) < 0$

Soru :



Yanda f (x) fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre; **A)** f (x) ’in artan – azalan olduğu aralıkları bulunuz.

B) f ' (x) fonksiyonunun pozitif – negatif olduğu aralıkları bulunuz. (Tablodan da görülebilir.)

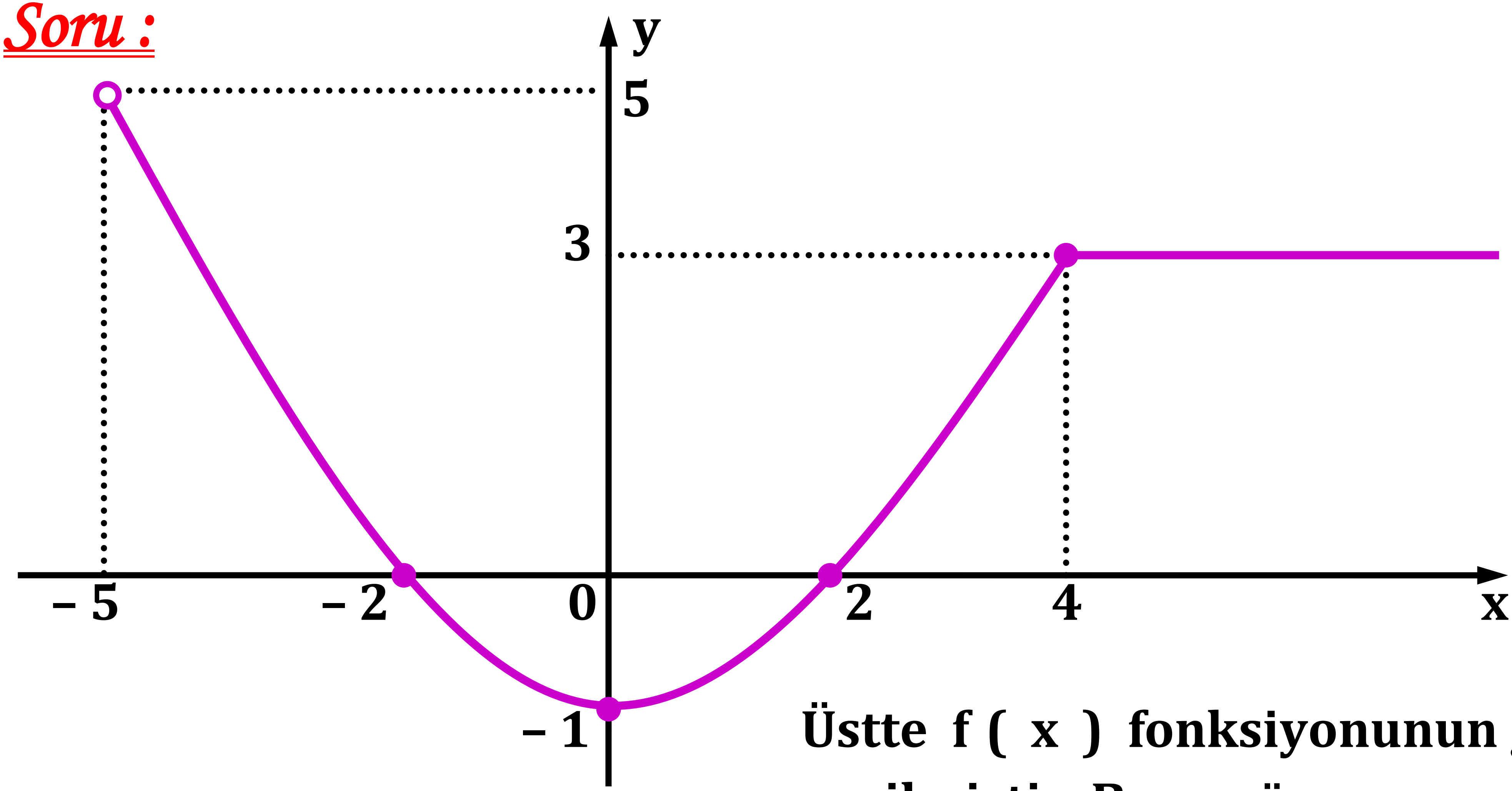
x	
f ' (x)	
f (x)	

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

C) $f'(5) \cdot f'(1)$ **işleminin sonucunun pozitif – negatif olma durumunu inceleyiniz.**

D) $f'(-2) - f'(4)$ **işleminin sonucunun pozitif - negatif olma durumunu inceleyiniz.**

Soru :



Üstte f (x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;

A) f (x) fonksiyonunun artan – azalan – sabit olduğu aralıkları bulunuz.

B) **$f'(x)$ fonksiyonunun pozitif – negatif – sıfır olduğu aralıkları bulunuz.**

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

C) **Alttaki işlemlerin sonucunun pozitif – negatif – sıfır olma durumunu inceleyiniz.**

I. $f'(-1) \,.\, f'(3)$ **II.** $f'(1) + f'(10)$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

III. $\dfrac{f'(-2)}{f'(5)}$

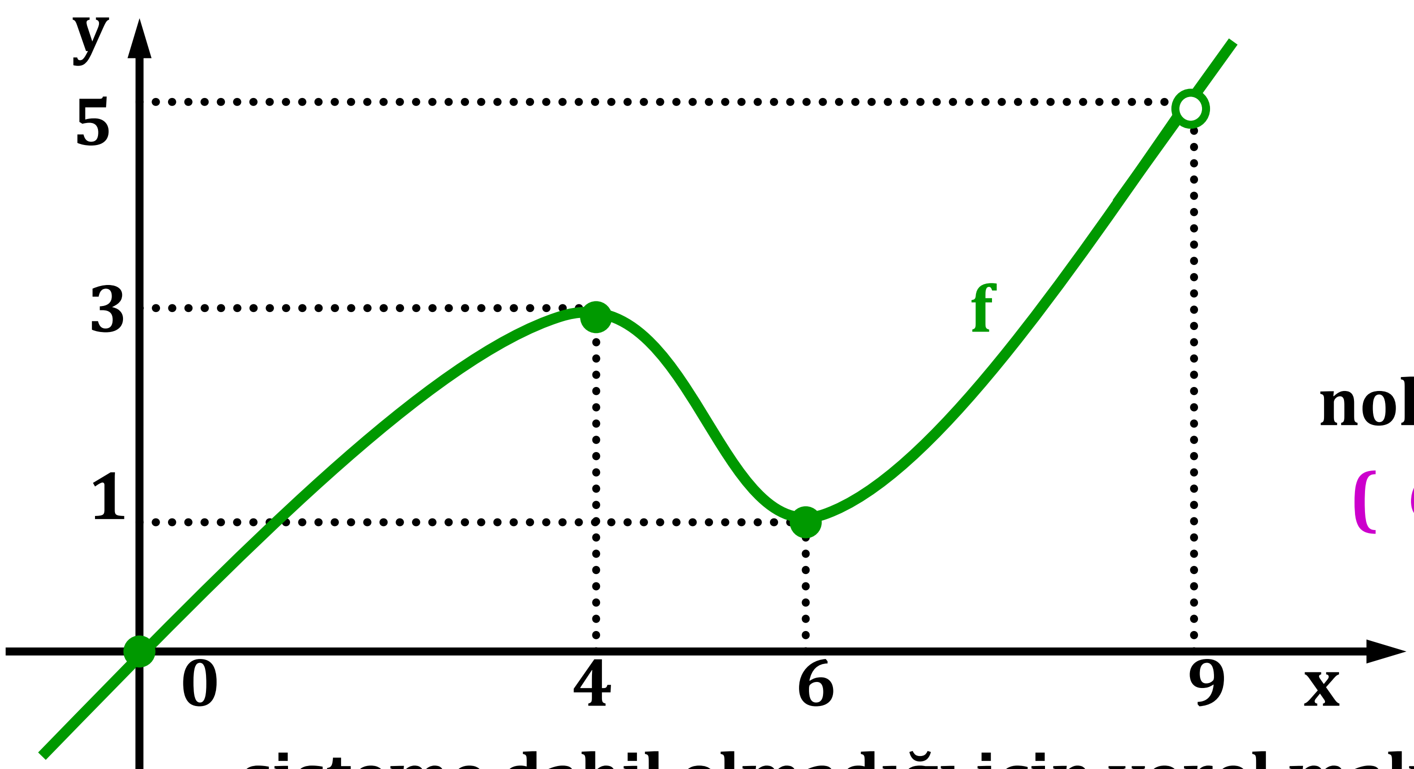
IV. $f'(6) - f'(-3)$

V. $\dfrac{f'(1/2)}{f'(-1)}$

VI. $f'(8) + f'(2) + f'(-4)$

Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum , Yerel Maksimum ve Yerel Minimum Noktaları

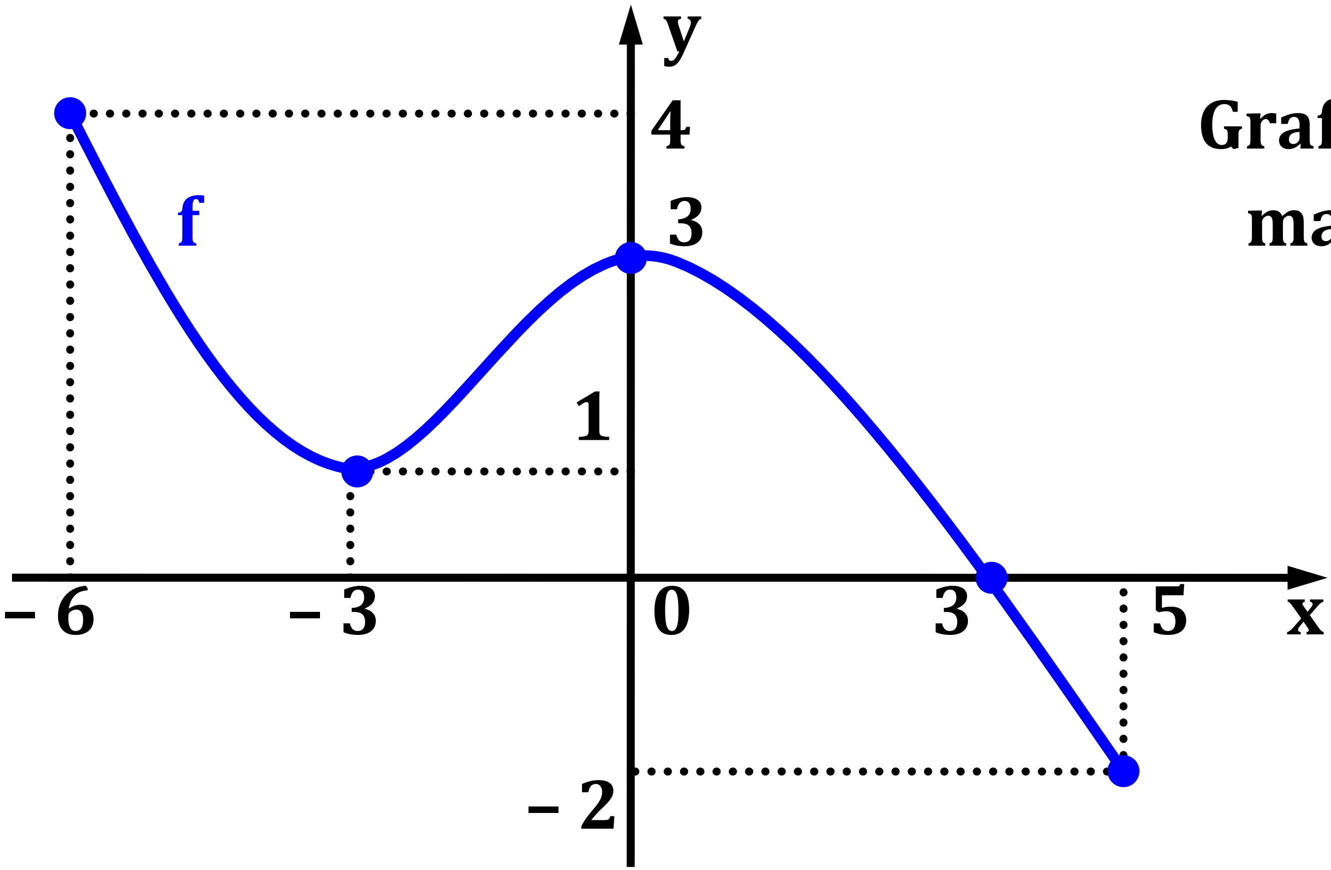
1) **Bir f fonksiyonun <u>belirli bir aralıktaki</u> x_o değeri için; $f(x_o)$ sonucu en büyük oluyorsa $(x_o, f(x_o))$ noktası " yerel maksimum noktası " , $f(x_o)$ sonucu en küçük oluyorsa $(x_o, f(x_o))$ noktası " yerel minimum noktası " olarak adlandırılır.**



Grafikte $[0, 9)$ aralığını inceleyelim. Bu aralıkta $(4, 3)$ noktası yerel maksimum, $(6, 1)$ ise yerel minimum noktasıdır. $(9, 5)$ noktası sisteme dahil olmadığı için yerel maksimum nokta değildir.

2) Bir fonksiyonun bir aralıkta değil de tanımlı olduğu aralıktaki **en büyük** değerini aldığı noktaya **" mutlak maksimum noktası "**, en büyük değerine ise **" mutlak maksimum değer "** adı verilir.

Bir fonksiyonun bir aralıkta değil de tanımlı olduğu aralıktaki **en küçük** değerini aldığı noktaya **" mutlak minimum noktası "**, en küçük değerine ise **" mutlak minimum değer "** adı verilir.



Grafikte; $(-6, 4)$ mutlak maksimum, $(0, 3)$ yerel maksimum, $(5, -2)$ mutlak minimum ve $(-3, 1)$ ise yerel minimum noktasıdır.

3) $f(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonunun kökü x_o olsun. Örnek tablo gösterimi aşağıdaki gibi olsun.

x		x_o	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	↘		↗

Yerel minimum vardır.

$(x_o, f(x_o))$ yerel minimum noktadır.

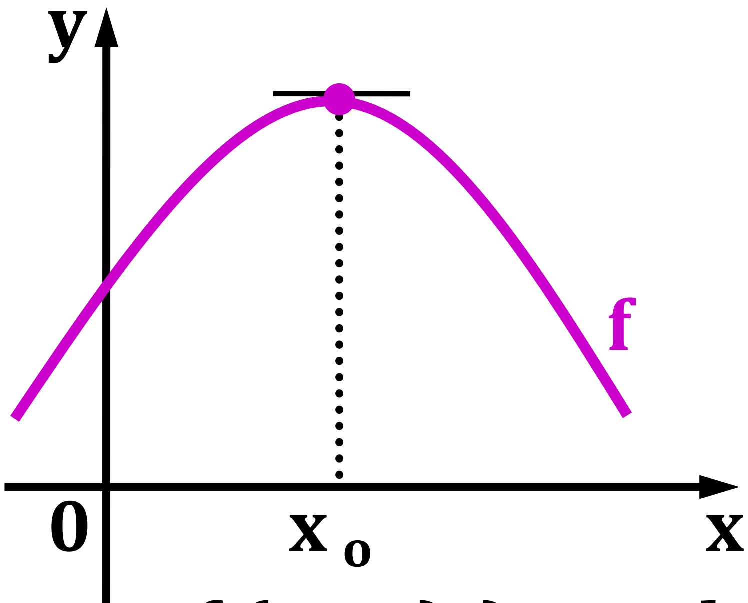
x		x_o	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	↗		↘

Yerel maksimum vardır.

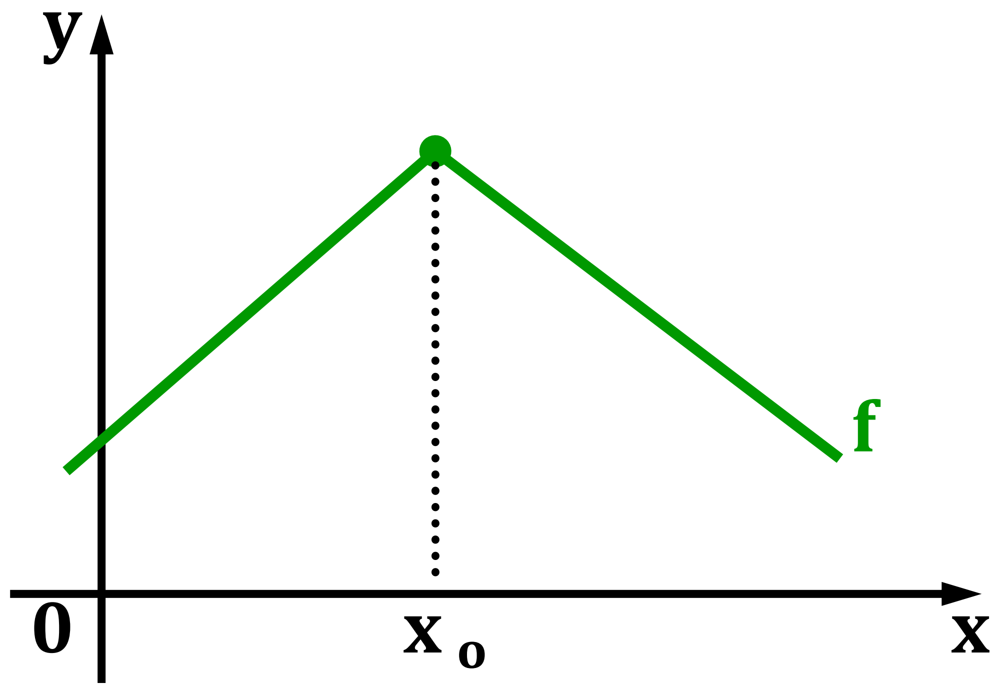
$(x_o, f(x_o))$ yerel maksimum noktadır.

Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genellikle " ekstremum noktalar " adı verilir.

Grafik sorularında, bir noktada yerel maksimum veya yerel minimum olup bu noktada türevi olan fonksiyonlar için bu nokta çizgi olarak gösterilir.

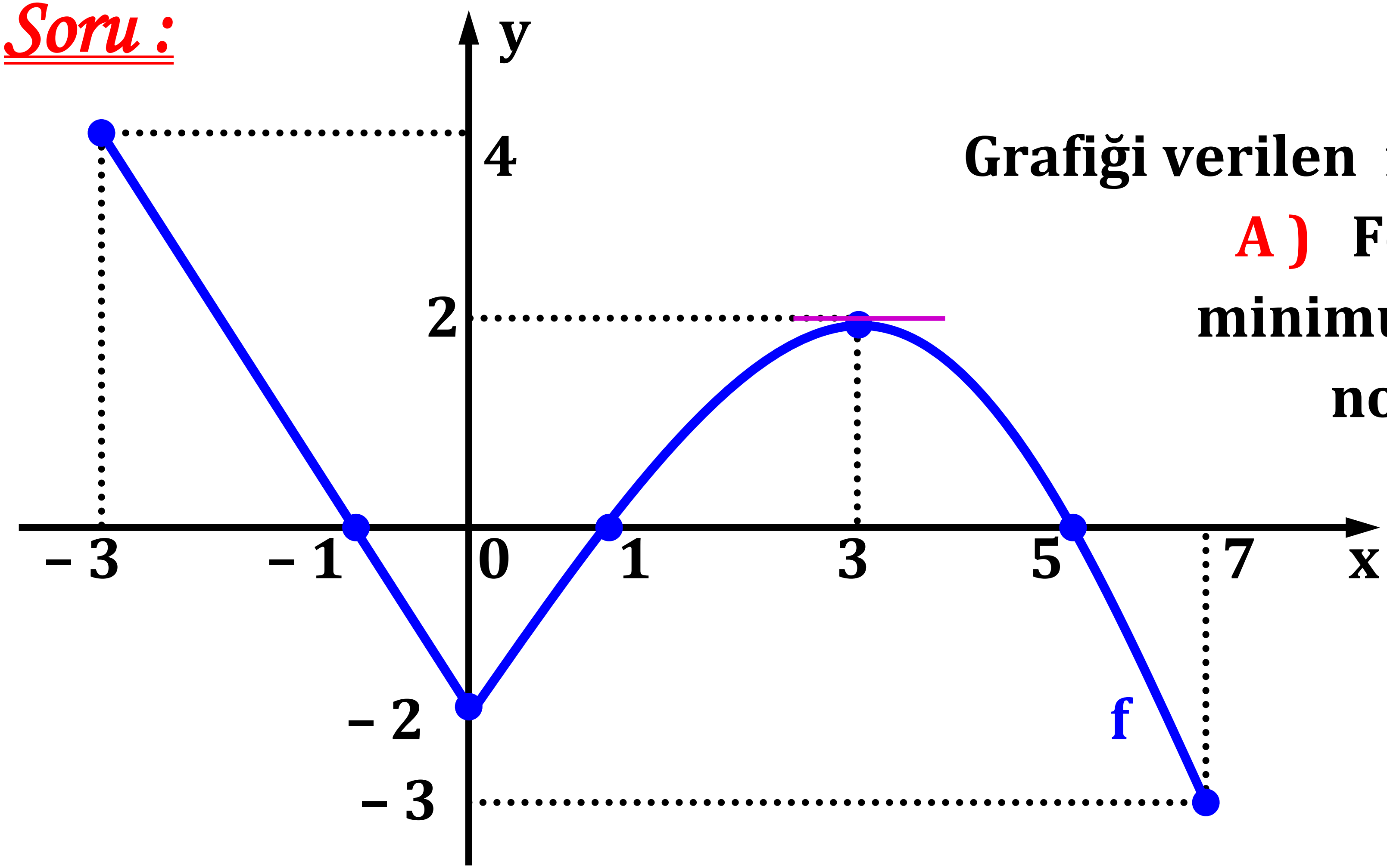


$(\ x_o\ ,\ f(\ x_o\ )\ )$ yerel maksimum noktadır. x_o türev fonksiyonun köküdür.



$(\ x_o\ ,\ f(\ x_o\ )\ )$ noktası da yerel maksimum noktasıdır. Ama fonksiyonunun x_o noktasında türevi yoktur. Çünkü burası kırılma noktasıdır.

Soru :

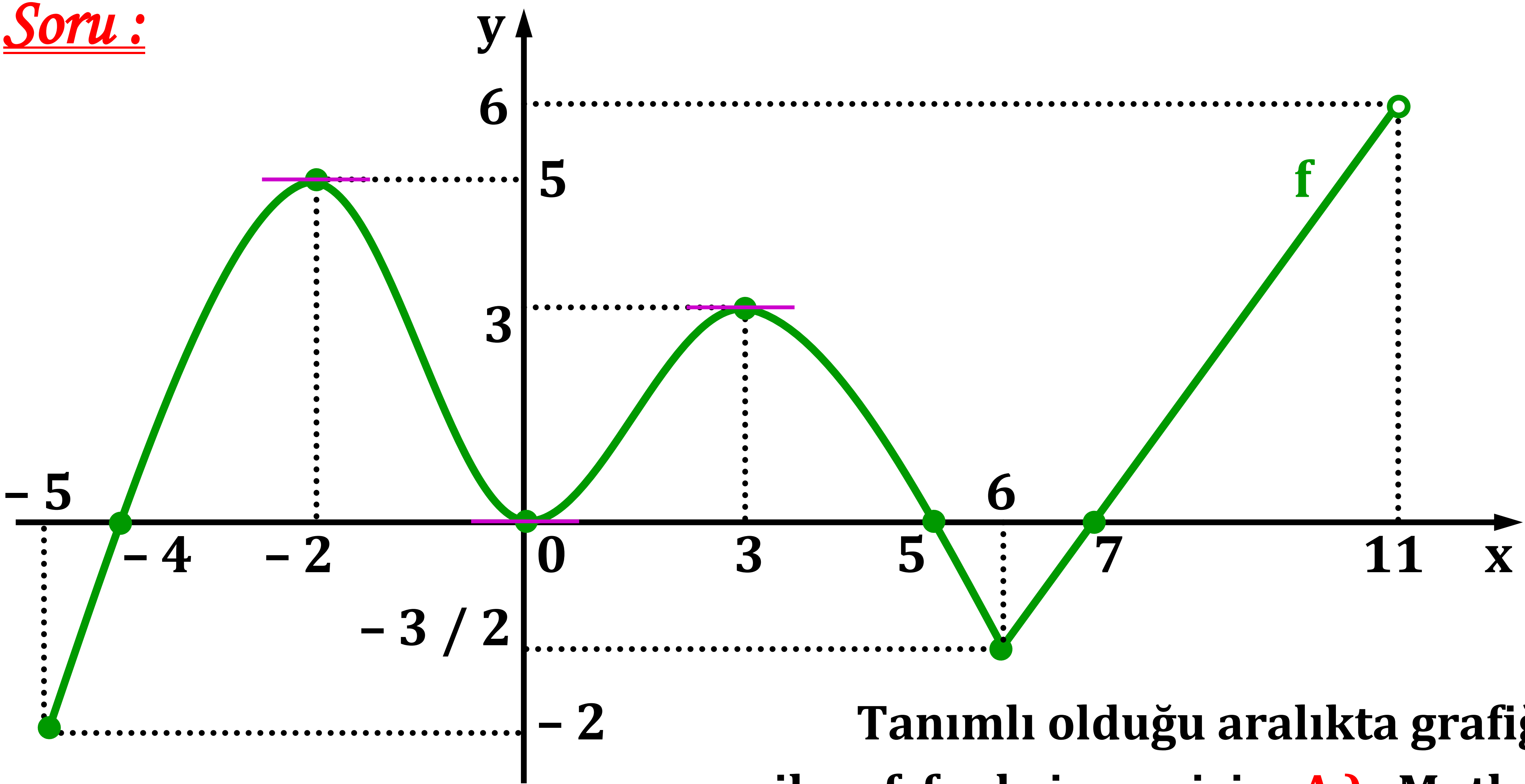


Grafiği verilen f fonksiyonu için;

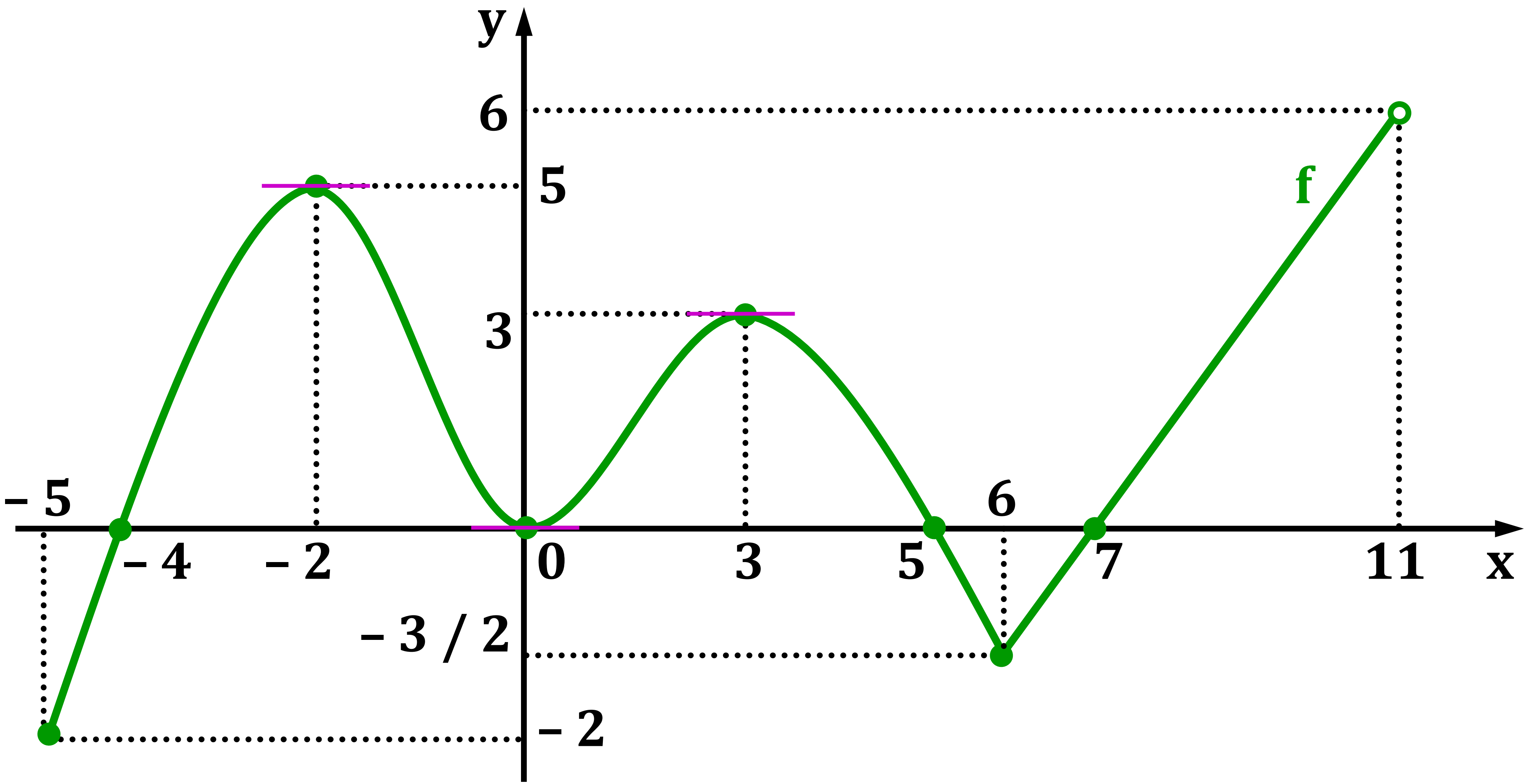
A) Fonksiyonun yerel minimum ve maksimum noktalarını yazınız.

B) Fonksiyonun mutlak maksimum ve minimum noktalarını yazınız.

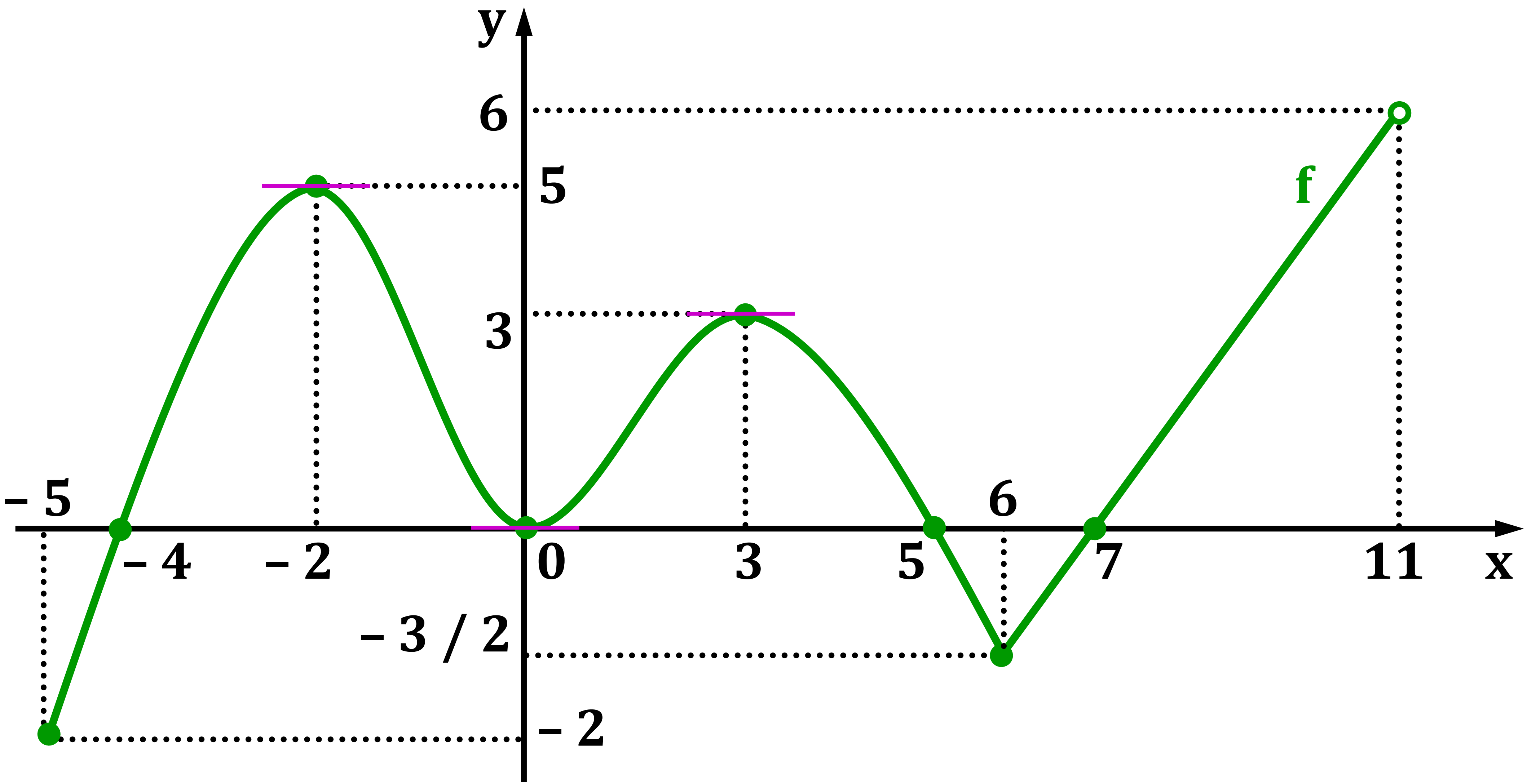
Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonu için; A) Mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerin çarpımı kaç olur ?

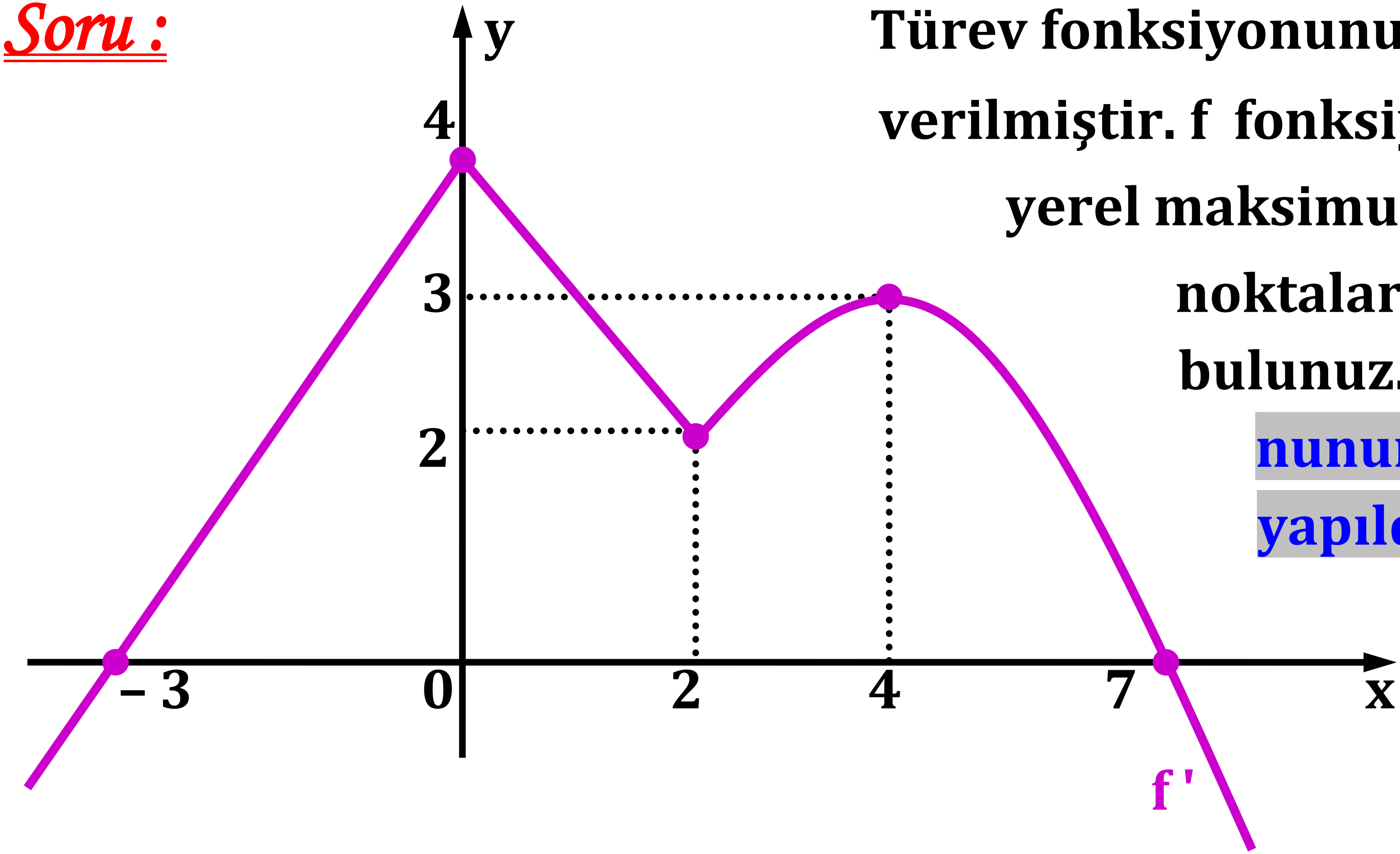


B) **Yerel minimum, mutlak minimum, yerel maksimum ve mutlak minimum noktaları yazınız.**



C) **Verilen noktalardaki hangi x değerleri için türev yoktur ?**

Soru :



Türev fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. f fonksiyonunun varsa yerel maksimum ve minimum noktalarının apsislerini bulunuz. **(f ' fonksiyonunun işaret tablosu yapıldığında istenen bulunur.)**

Soru : $y = f(x) = x^2 - 16x$ fonksiyonunun varsa yerel minimum ve maksimum noktalarını (ekstremum noktaları) bulunuz.

($f'(x)$ fonksiyonunun kökleri bulunur ve işaret tablosu yapılır. Yerel minimum ve maksimum noktaların apsisleri bulunur ve fonksiyonda bu apsis değerleri kullanılarak yerel minimum ve maksimum değerler bulunur.)

Soru : $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ **fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ **fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz.**

Soru : **$y = f(x) = -x^3 + 4x^2 + 6x + 8$ fonksiyonunun ekstremum noktalarınının apsisleri toplamını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ fonksiyonu veriliyor. f' fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz. **(f'' fonksiyonunun kökleri bulunur ve tablosu kontrol edilir.)**

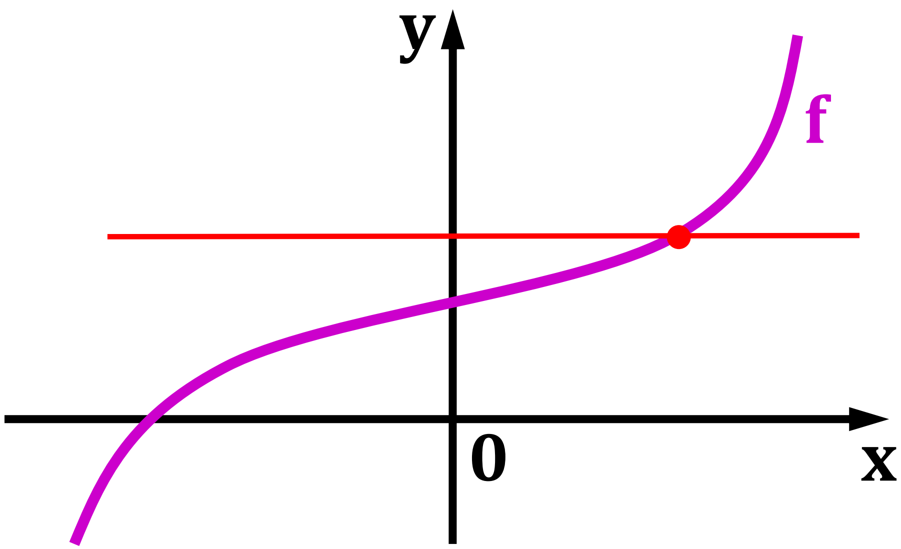
Not : **$f'(x) = 0$ denkleminin <u>kökü</u> <u>yoksa</u> ya da <u>sadece çift katlı kökü varsa</u> $f(x)$ fonksiyonu daima artan ya da daima azalandır.**

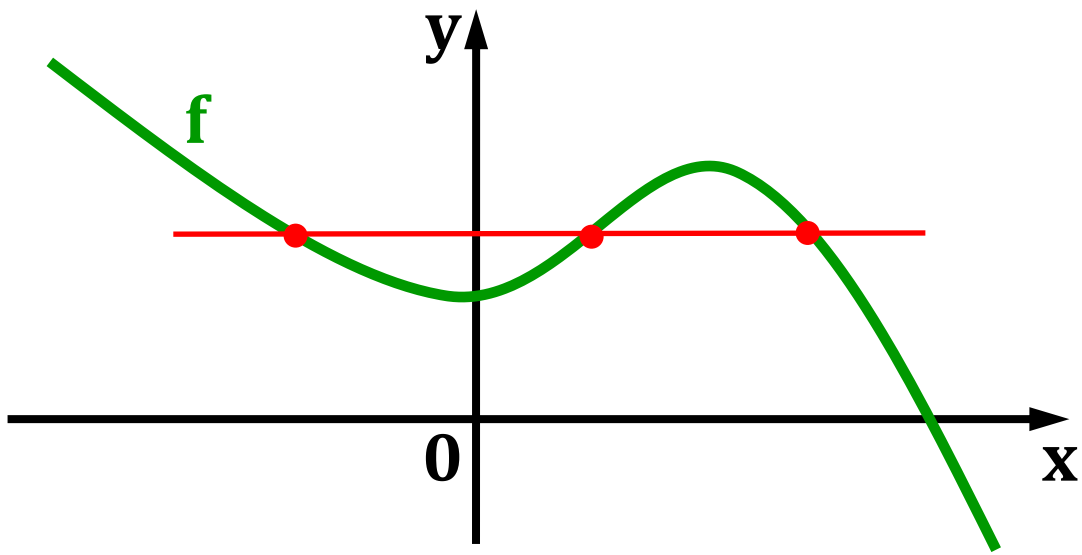
Soru : **$y = f(x) = 8x^3 - 2x^4 - 1$ fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 20x - 4$ **fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz.**

Not : Bire bir (bir yatay doğruyu bir noktada kesme) ve örten (grafiğin alt ve üst sınırlar boyunca çizimi) fonksiyonlarda yerel maksimum veya yerel minimum nokta yoktur. $f'(x) = 0$ denkleminde $\Delta \leq 0$ şartına bakılır.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olan alttaki fonksiyonları inceleyelim.





f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Grafik incelendiğinde fonksiyonun yerel minimun ve maksimum noktası yoktur.

f fonksiyonu bire bir değil ama örtendir. Grafik incelendiğinde fonksiyonun yerel minimum ve maksimum noktası vardır.

Soru : $y = f(x) = x^3 + 6x^2 - 6kx$ **fonksiyonu bire bir ve örten ise k'nın çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = -\dfrac{kx^3}{3} + 5x^2 - 4x + 2$ **fonksiyonu bire bir ve örten ise k 'nın en küçük tam sayı değeri ne olur ?**

Soru : $y = f(x) = x^5 + ax^2 - bx + 11$ fonksiyonu $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında ekstremum noktalarına sahip ise $a + b = ?$

(f fonksiyonu x_o değeri için ekstremum noktaya sahip ise, x_o türev fonksiyonunun köküdür. Yani $f'(x_o) = 0$ olur.)

Soru : $y = f(x) = x^3 + kx^2 + mx + 6$ **fonksiyonu** $x = -3$ **ve** $x = 1$ **noktalarında ekstremum noktalarına sahip ise** $k \cdot m = ?$

Soru : $y = f(x) = ax^2 + bx + 8$ fonksiyonunun bir ekstremum noktası $A(-1, 2)$ ise $a + b = ?$ (f fonksiyonu x_o değeri için ekstremum noktaya sahip ise $f'(x_o) = 0$ alınır. Ayrıca nokta da denkleme uygulanarak istenen bulunur.)

Soru : $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + 6x - 1$ **fonksiyonunun ekstremum noktalarından biri** $A(1, 4)$ **ise;** **A)** $a \cdot b = ?$

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + 6x - 1$$

B) **Diğer ekstremum noktayı bulunuz.**

Türev Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğini Çizme

$y = f(x)$ polinom fonksiyonun (x'in kuvvetlerinin doğal sayı olduğu fonksiyon) grafiğinin çizimi için;

A) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur.

$x = 0$ için y değeri bulunur.

$y = 0$ için x değeri – değerleri bulunur. Tek katlı köklerde grafik x eksenini keserken, çift katlı kökte ise grafik x ekseni-ne teğet olur.

B) Fonksiyonun ekstremum noktaları bulunur.

Fonksiyonun artan – azalan olduğu aralıklar dikkate alına-rak grafik çizilir.

Soru : $y = f(x) = x^3 - 6x^2$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

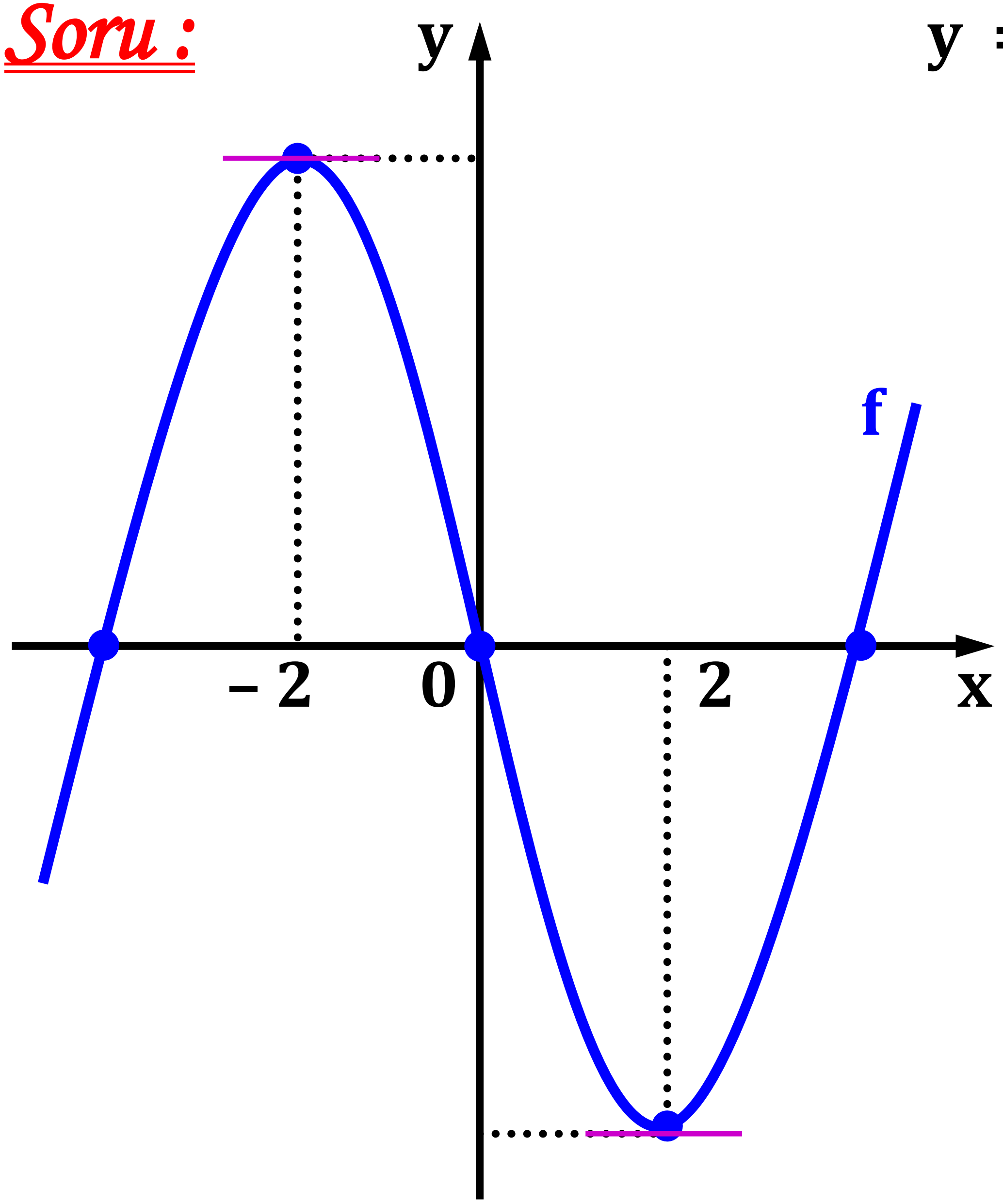
Soru : **$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

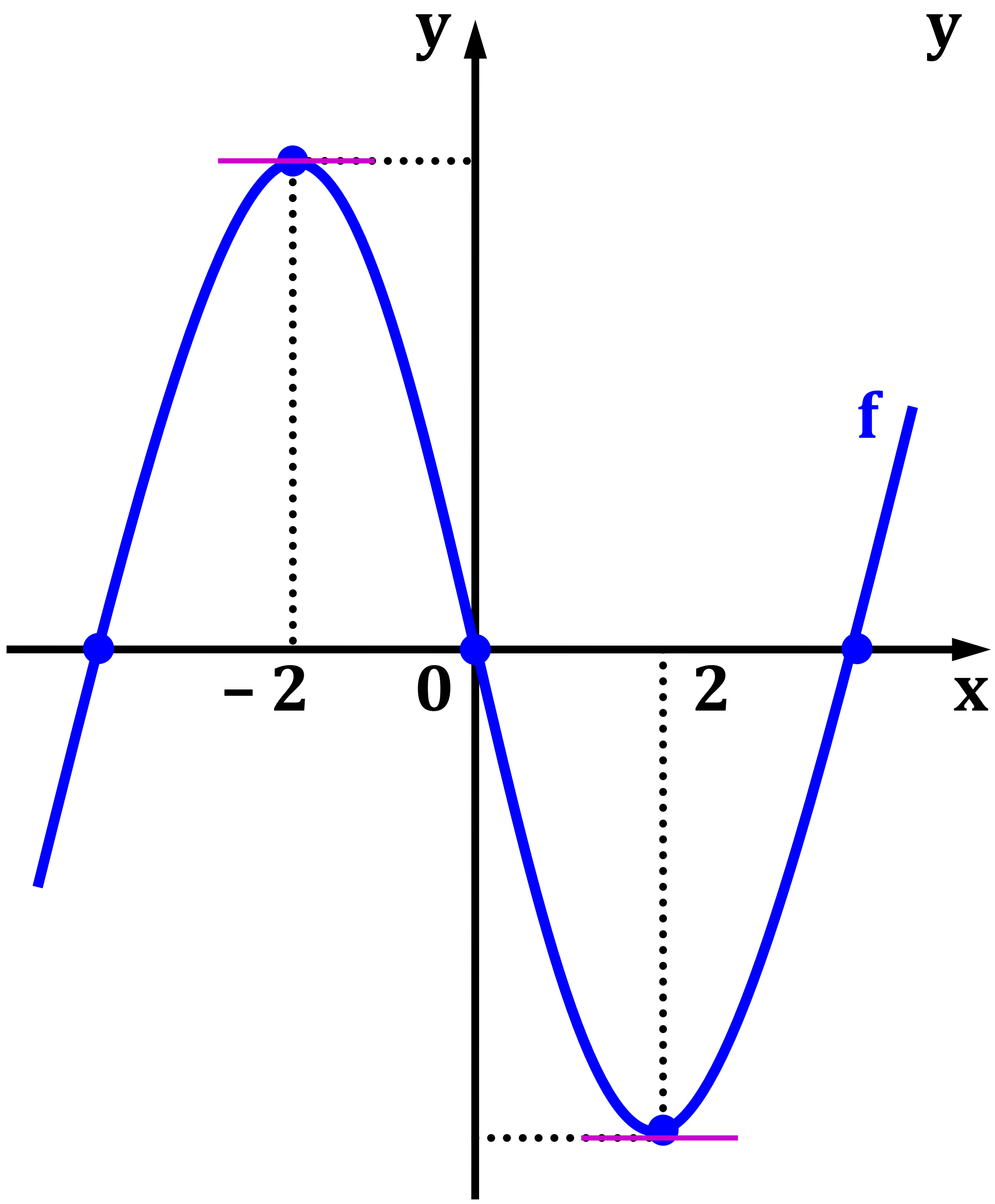
Soru : **$y = f(x) = (2 - x).(x^2 + 2x + 1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru : **$y = f(x) = (x+1).(x-3)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

Soru :

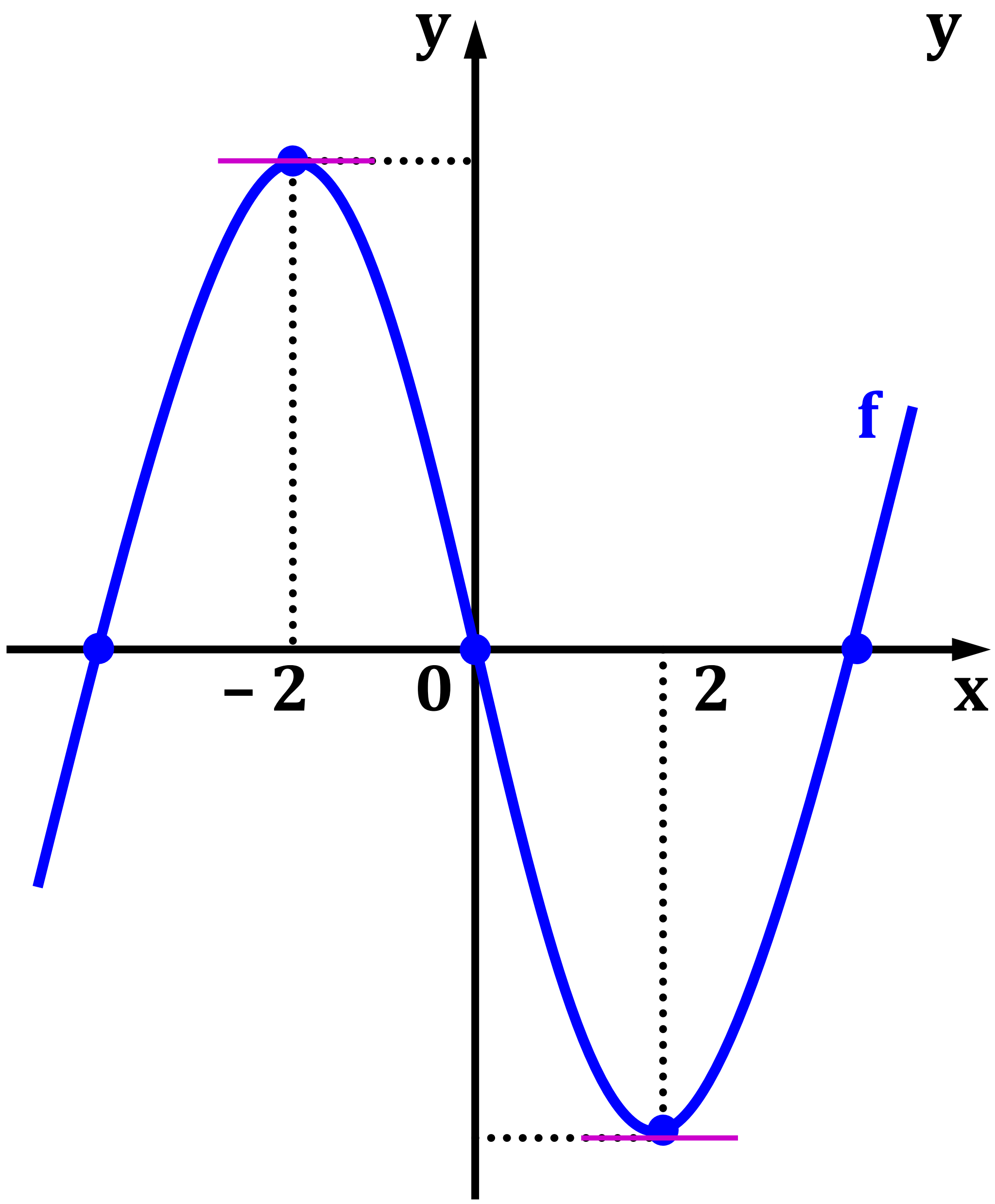


$y = f(x) = x^3 + kx^2 + mx$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre; A) k ve m sayılarını bulunuz.



$$y = f(x) = x^3 + kx^2 + mx$$

B) **Fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz.**



$y = f(x) = x^3 + kx^2 + mx$

C) **Fonksiyonun x ekseninin kestiği noktaların apsislerini bulunuz.**

Maksimum ve Minimum Problemleri

f fonksiyonun maksimum ya da minimum değerini bulmak için fonksiyonun ekstremum noktalarından faydalanılır. Problemlerde elde edilecek denklem tek değişkene bağlı olarak yazılır ve kural uygulanır.

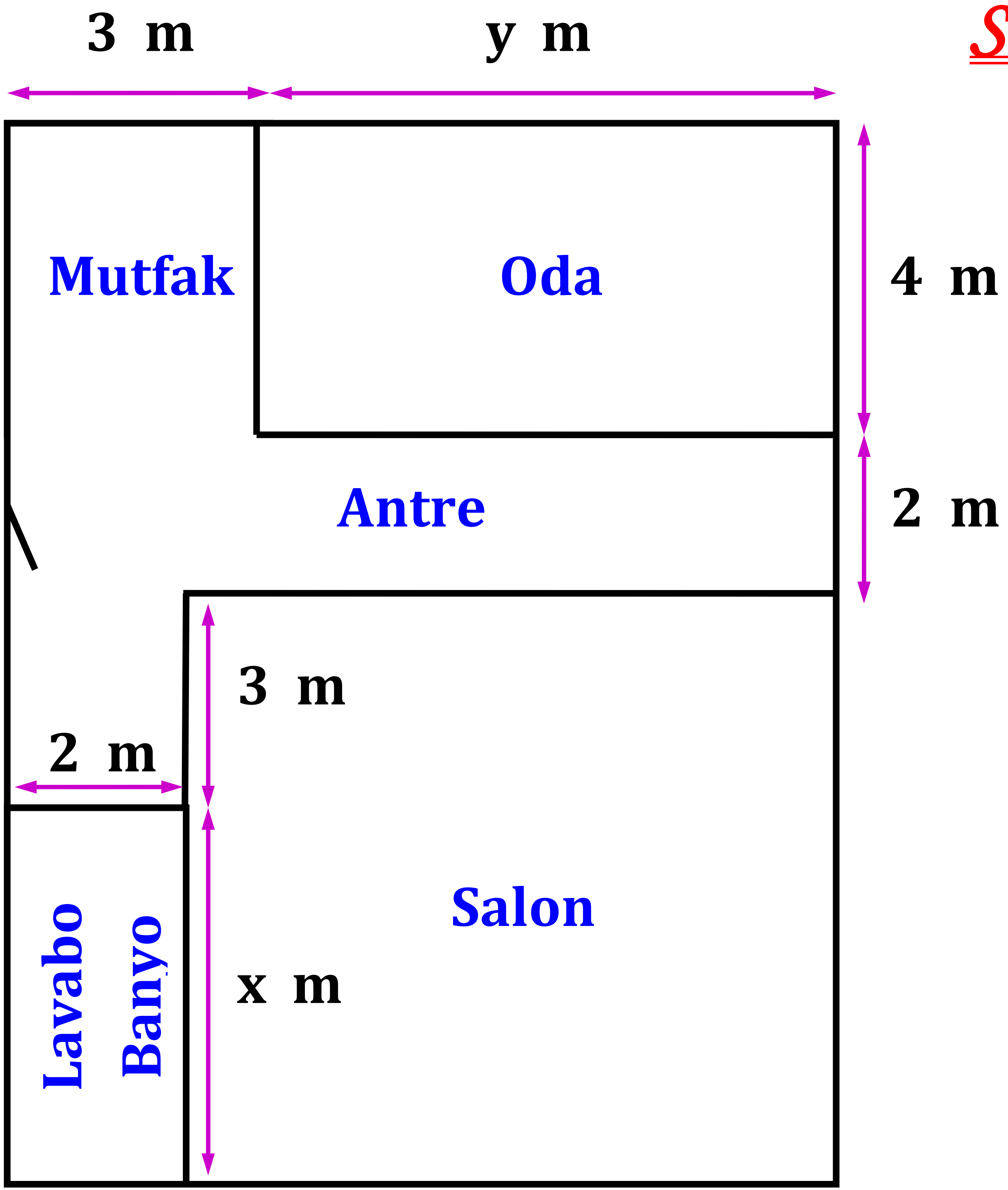
Soru : **Farkları 8 olan iki sayının çarpımı en az kaç olur ?**

Soru : **Dik kenar uzunlukları $2x$ ve $6 - 3x$ br olan üçgenin alanı en fazla kaç br^2 olur ?**

Soru : **Bir tarafı dağlık bölge olan dikdörtgen şeklindeki gül tarlasının diğer kenarlarına tel örgü çekilecektir. Bu amaçla 900 m tel kullanıldığına göre bu <u>tarlanın alanı</u> <u>en fazla</u> kaç m^2 olur ?**

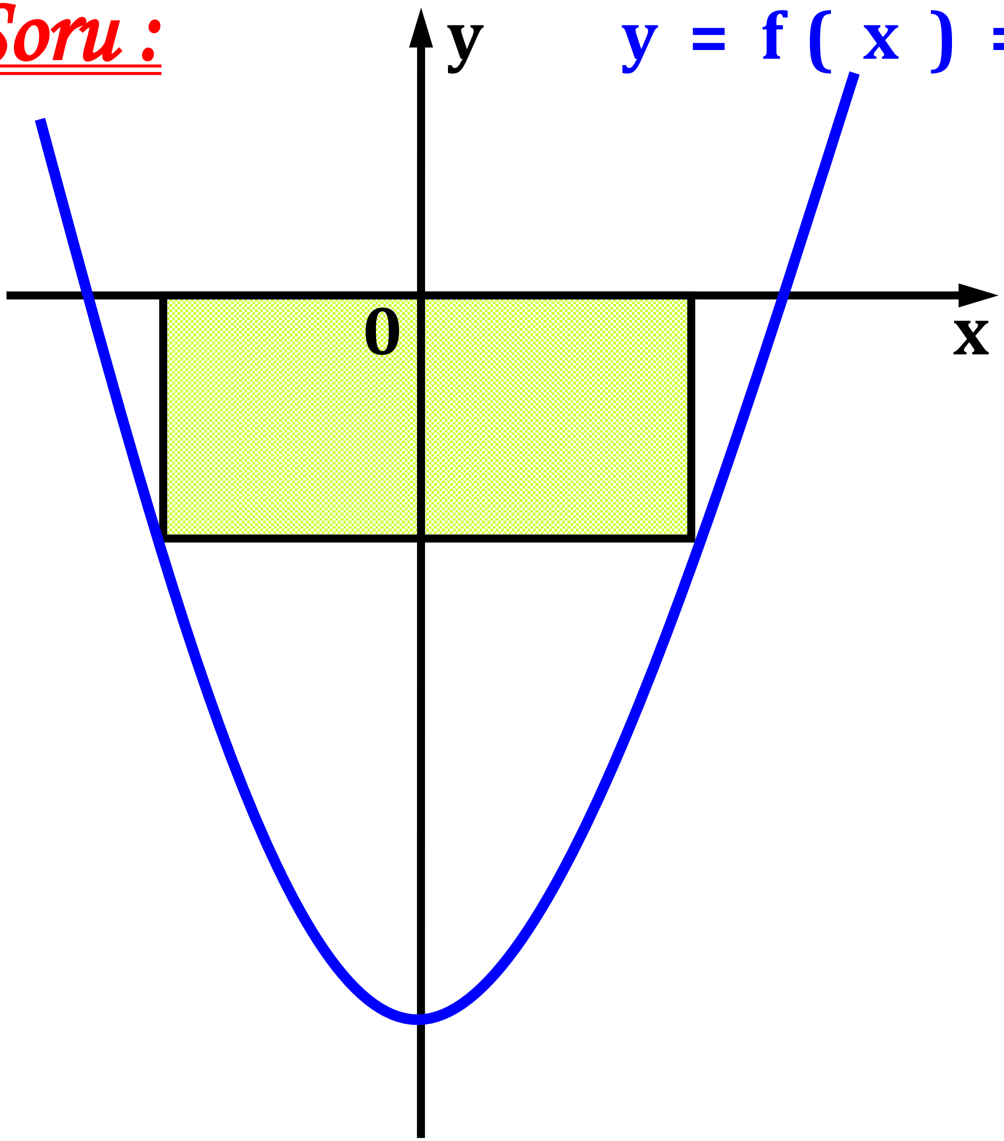
Soru : $x > 0$ olmak üzere bir ürünün alış fiyatı $5x + 36$ ₺ , satış fiyatı ise $-x^2 + 21x + 6$ ₺ 'dir. Bu ürünün satışından en fazla kaç ₺ kâr elde edilebilir ?

Soru : $2x^2 + (t + 1)x + 2t^2 - 12t + 8 = 0$ **denkleminin** **kökler çarpımının en küçük değeri kaç olur ?**



Soru : Yanda planı verilen dikdörtgen şeklindeki bir evin çevresi 42 m'dir. Evin bölümleri de dikdörtgen şeklinde ise <u>salonun alanı</u> <u>en fazla</u> kaç m^2 olur ?

Soru :

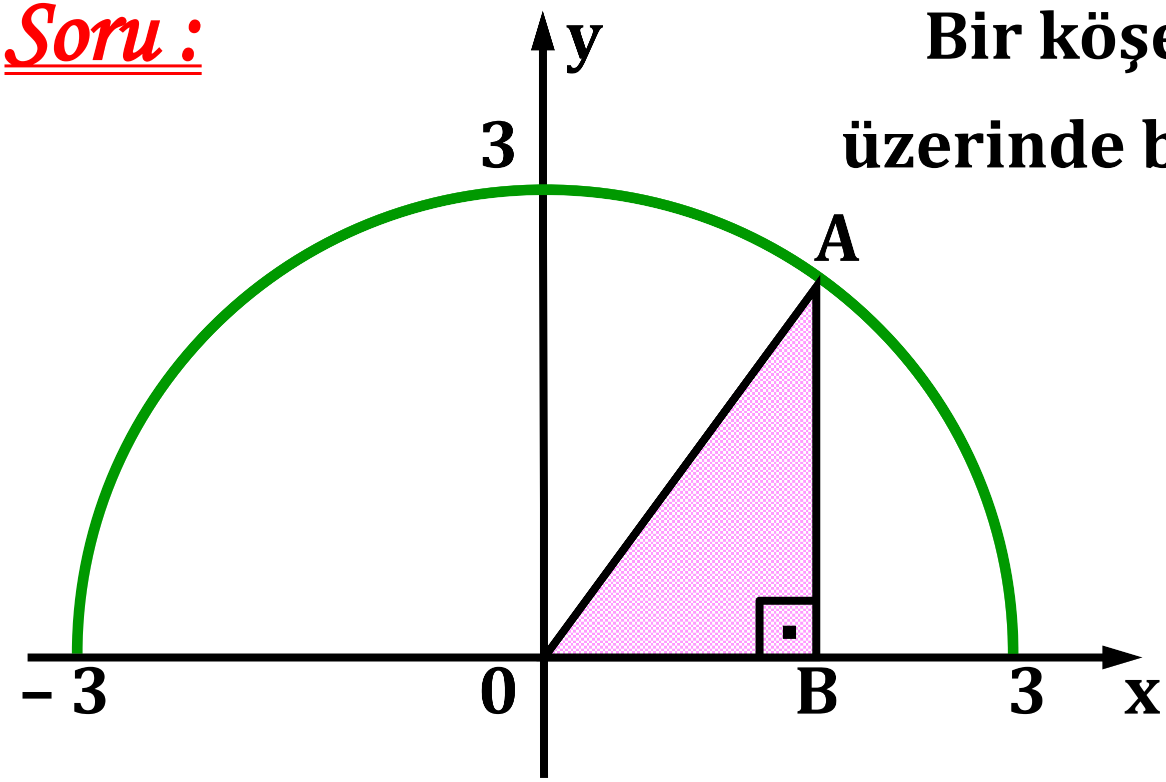


İki köşesi x ekseni, iki köşesi de parabol üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br ^{2} olur ?

Soru : $y = x^2 - 11x + 10$ **fonksiyonunun grafiği üzerinde olan bir noktanın elemanları toplamı en az kaç olur ?**

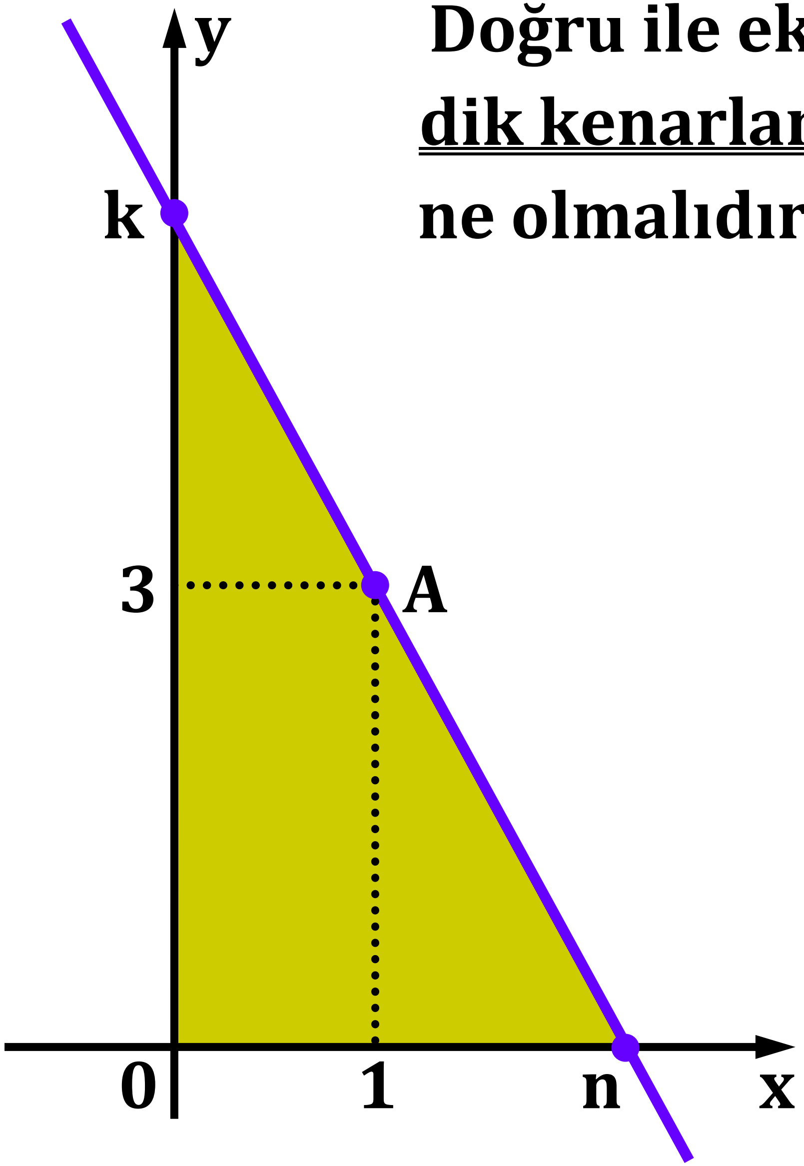
Soru : $y = x - 3$ **doğrusu üzerinde olup $A(2, 3)$ noktasına uzaklığı en yakın olan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

Soru :

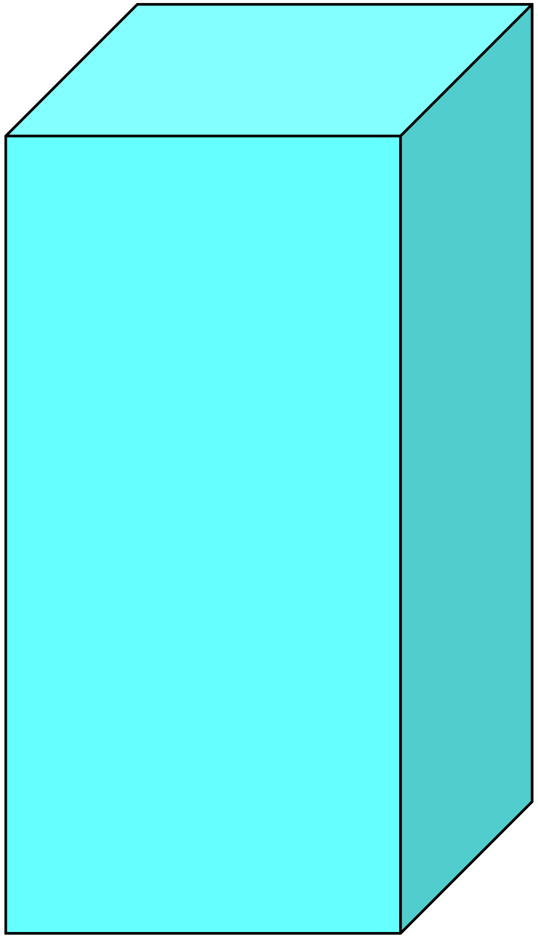


Bir köşesi 3 br yarıçaplı yarım çember üzerinde bulunan AOB üçgeninin çevresi en fazla kaç br olur ?

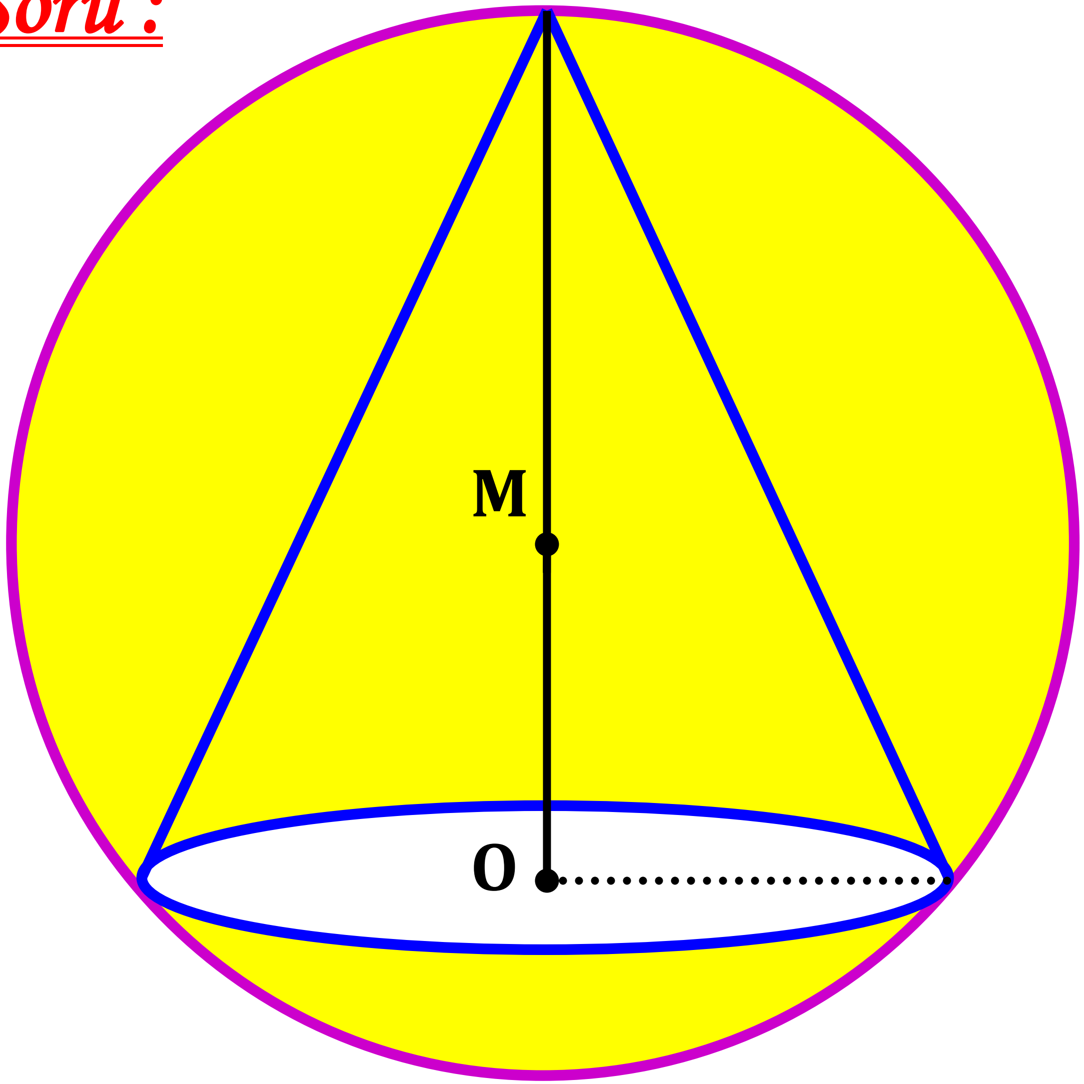
Soru : **Altta grafiği verilen doğru A noktasından geçmektedir. Doğru ile eksenler arasında kalan üçgensel bölgenin dik kenarlarının toplamının en az olması için k sayısı ne olmalıdır ?**



Soru : **Yan yüzeylerden birinin çevre uzunluğunun 12 br olduğu dik kare prizmanın hacmi en fazla kaç br^3 olur ?**



Soru :



12 br çaplı kürenin içine yerleş-tirilebilecek en büyük hacimli koninin hacmini bulunuz.

($V = \pi . r^2 . h / 3$ idi.

$\pi = 3$ alınız.)

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 6. İNTEGRAL

12. 6. 1. Belirsiz İntegral

Terimler ve Kavramlar : **Ters türev, belirsiz integral, integral sabiti**

Sembol ve Gösterimler : $\int f(x) . dx$, c

12. 6. 1. 1. **Bir fonksiyonun belirsiz integralini açıklayarak integral alma kurallarını oluşturur.**

A) **Belirsiz integral alma kuralları $n \neq -1$ olmak üzere $f(x) = a . x^n$, $(a \in \mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{Q})$ şeklindeki fonksiyonlarla sınırlandırılır.**

B) **Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının, iki fonksiyonun toplamının ve farkının integral alma kuralları verilerek uygulamalar yaptırılır.**

12. 6. 1. 2. **Değişken değiştirme yoluyla integral alma işlemleri yapar.**

6. ÜNİTE : İNTEGRAL

Belirsiz İntegral

Türevi belli olan bir fonksiyonu bulmak için yaptığımız işleme " integral alma " adı verilir. $\int$ integral sembolüdür.

$F(x)$ fonksiyonun türevi $f(x)$ olsun. $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun " ters türevi " adı verilir.

Türevi $F'(x) = 3x^2$ olan fonksiyon; $F(x) = x^3$, $F(x) = x^3 + 1$, $F(x) = x^3 - 5$, $F(x) = x^3 - 3/4$, $F(x) = x^3 + \sqrt{5}$, . . . olabilir. Bu yüzden bu fonksiyon $F(x) = x^3 + c$ (c sabit) olarak alınır.

Not 1: $F(x) + c \xrightarrow{\text{Türevi}} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{\text{İntegrali}} F(x) + c$ $\quad (F'(x) = f(x))$

$\int f(x).dx = F(x) + c$ (c sabit) belirsiz integral alma işlemini gösterir. İntegral alma işleminde türevi alınmış fonksiyonu bulurken c sabitini bilme imkanımız yoktur. Bu yüzden işlemin cevabına c sabitini ekleriz.

$$\int f(x).\underbrace{dx}_{} = F(x) + c$$

İntegral alma işleminin x değişkenine göre yapıldığını belirtir.

Soru : $\int f(x).dx = 6x - x^4 + 7$ ise $f(x) = ?$

Soru : $\int f(x).dx = \dfrac{5x^3}{4} - 6x + 4$ ise $f(-8) = ?$

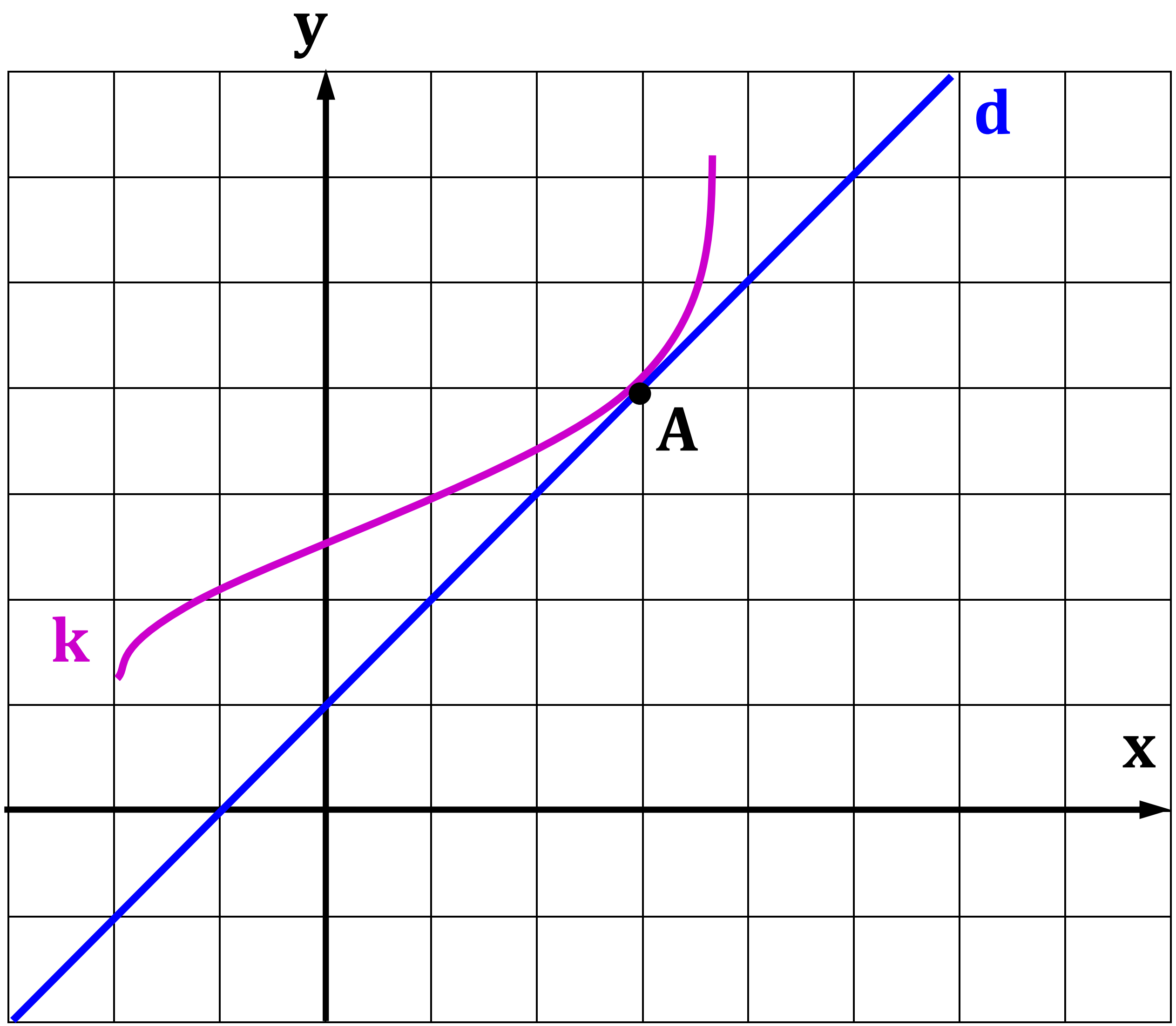
Soru : $\int f(x).dx = f^2(x) + 12$ ise $f'(x) = ?$

Soru : $\int x \, . \, f(x) \, . \, dx = x^4 + 4x^3 - x^2$ ise $f(-1) = ?$

Soru : $\int x^2 . f(x) . dx = \frac{x^7}{7} + \frac{2x^5}{5} - ax^3 + 2$ ve $f(1) = 6$ ise $a = ?$

Soru : $\int f(x).dx = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{6x^2}{2} + x - 9$ **ise f (x) fonksiyonunun x = – 1 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır ?**

Soru : Altta birim karelerde grafiği verilen k fonksiyonu d doğrusuna A noktasında teğettir. $\int f(x).dx = k^3(x) + 5$ ise $f(3) = ?$



Soru : $\int f(x).dx = 2x^3 - 24x^2 + 7$ **ise** $f(x)$**'in ekstremum noktası varsa bulunuz.**

Soru : $F(x) = \int (x^2 - 6x - 40).dx$ ise $F(x)$'in ekstremum noktası varsa bu noktaların apsislerinin çarpımını bulunuz.

Not 2: $\dfrac{d}{dx}$ türev operatörü olup $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right) = f'(x)$ idi.

$\underbrace{d\left(f(x)\right)}_{} = f'(x).dx$ ifadesine ise f fonksiyonunun " diferansiyeli " adı verilir.

Yani bir fonksiyonun diferansiyeli $(\ d\ (\ ...\ )\ )$, fonksiyonun türevi ile dx ifadesinin çarpımına eşittir.

$d\left(f(t)\right) = f'(t).dt$ olur. *** Fonksiyon hangi değişkene bağlıysa diferansiyel de ona göre uygulanır.

Soru : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

Soru : $f(x) = \dfrac{5x^{12}}{6} - 8x + x^4$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

Soru : $f(t) = -t^2 + 4t + k^3 + 5$ **fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.**

Soru : $\mathbf{u = (4p - 3)^2}$ **eşitliğinin diferansiyelini alınız.**

Soru : $y = 5t - \dfrac{3}{t}$ ise dy ifadesinin eşitini bulunuz.

Kural 1: $\int f(x).dx = F(x) + c$ (c sabit) olsun.

$F'(x) = f(x)$ idi.

A) $\frac{d}{dx}\int f(x).dx = \frac{d}{dx}[F(x) + c] = F'(x)$

$= f(x)$ olur.

Türev ve türev fonksiyonunun tersi (integral) alma işlemleri aynı anda birbirlerini etkisizleştirir.

($f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ yani etkisiz fonksiyonu verirdi.)

B) $\int [\frac{d}{dx} f(x)].dx = \int f'(x).dx = f(x)$ olur.

C) $\int d[f(x)] = \int f'(x).dx = f(x)$ olur.

Soru : $\int d(5x^3 - 7x + 1) = ?$

Soru : $h(x) = \dfrac{d}{dx}\int(-x^2 + 9x + x^3).dx$ ise $h(2) = ?$

Kural 2: (İntegral Alma Kuralları)

A) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\int a \, . \, f(x) \, . \, dx = a \, . \int f(x) \, . \, dx$ olarak alınır. a sabit sayısı integralin başına alınır.

B) $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\int x^n \, . \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ olarak alınır.

*** x 'in rasyonel kuvvetinin integralinin sonucunda kuvvet 1 arttırılır ve yeni kuvvet sonucun paydasına yazılır.

C) $\int [\, f(x) + g(x) \,] \, . \, dx = \int f(x) \, . \, dx + \int g(x) \, . \, dx$

$\int [\, f(x) - g(x) \,] \, . \, dx = \int f(x) \, . \, dx - \int g(x) \, . \, dx$

olarak alınır.

*** dx terimi integralde x değişkenine göre işlem yapılacağını gösterir.

Soru : $\int x^2 . dx = ?$

Soru : $\int 24x^5 . dx = ?$

Soru : $\int 4 . dx = ?$

Soru : $\int dx = ?$

Soru : $\int k \, . \, dx = ?$

Soru : $\int 3t\,.\,dt = ?$

Soru : $\int \frac{1}{x}\,.\,dx = ?$

Soru : $\int x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot dx = ?$

Soru : $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^4}} . dx = ?$

Soru : $\int (x^2 + 4x) . dx = ?$

Soru : $\int \left(5x^4 - \frac{x^3}{8} + 1 \right) . dx = ?$

Soru : $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 4x + 1 \right) . dx = ?$

Soru : $\int \left(\frac{6}{x^3} + x \right) . dx = ?$

Soru : $\int (3 - x).(-1 + x).dx = ?$ **(Önce çarpım yapılır ve ardından kural uygulanır.)**

Soru : $\int 12x \, . \, (\, x - 3 \,)^{2} \, . \, dx = \, ?$

Soru : $\int (x - 3).(x + 3).(x^2 + 9).dx = ?$

Soru : $\int (x + 16) . (\sqrt{x} + 4) . (\sqrt[4]{x} - 2) . (\sqrt[4]{x} + 2) . dx = ?$

Soru : $\int \frac{2x^3 - 5}{x^2} . dx = ?$ **(Önce kesir ayrılır ve ardından kural uygulanır.)**

Soru : $\int \dfrac{m^5 - 3m^2 + 1}{m^2} . dm = ?$

Soru : $\int \frac{x^2 + 5x - 36}{x - 4} . dx = ?$ **(Önce sadeleştirme yapılır ve ardından kural uygulanır.)**

Soru : $\int \frac{-2x^2 + x + 10}{5x + 10} . dx = ?$

Soru : $\int \frac{6x^2 - 24}{x + 2} . dx = ?$

Soru : $\int \frac{x - 16}{\sqrt{x} + 4} . dx = ?$

Soru : $\int \frac{x^3 + 27}{x^2 - 3x + 9} . dx = ?$

Soru : $f'(x) = 2x - 1$ ve $f(-2) = 8$ ise $f(x) = ?$ **(Önce türev fonksiyonunun integrali alınır ve f fonksiyonu bulunur. Ardından verilenler yerleştirilerek c sabiti elde edilir.)**

Soru : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ ve $f(1) = 10$ ise $f(2) = ?$

Soru : $f'(x) = 20x^9 + x - 4x^3 + 1$ ve $f(-1) = 0$ ise $f(1) = ?$

Soru : $f''(x) = 2$, $f'(2) = 10$ ve $f(1) = -3$ ise

$f(x) = ?$

Soru : $f''(x) = 6x - 4$, $f'(1) = -2$ ve $f(0) = 5$ ise

$f(x) = ?$

Soru : $K(x) = \int f(x).dx + \int f'(x).x.dx$ **veriliyor.**

$f(4) = 6$, $K(4) = 20$ **ve** $f(-2) = -5$ **ise** $K(-2) = ?$

(İntegraller birleştirilir ve toplamın kimin türevi olduğu bulunur. Verilenler kullanılarak istenen elde edilir.)

Soru : $K(x) = \int 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \cdot dx + \int g'(x) \cdot dx$ veriliyor.

$f(-1) = -6$, $g(-1) = 3$ ve $K(-1) = 41$ ise $K(x) = ?$

Soru : $K(x) = \int \frac{f'(x) \cdot x^3}{x^6} \cdot dx - \int \frac{f(x) \cdot 3x^2}{x^6} \cdot dx$ veriliyor. $f(3) = 81$, $K(3) = -2$ ve $f(2) = 32$ ise $K(2) = ?$

Kural 3: (Değişken Değiştirme Yöntemi)

Türevi, yanında çarpım olarak verilen fonksiyonların integral sorularında çözümü kolaylaştırmak için fonksiyona değişken değiştirme yöntemi uygulanır ve ardından integral alma kuralları kullanılır.

$n \neq 0$, $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere,

$\int [\, f(x) \,]^n . f'(x) . dx$ integral alma işleminde;

1) $f(x) = t$ değişken değiştirmesi yapılır.

2) $d[\, f(x) \,] = dt$ eşitliğin diferansiyeli alınır.

$f'(x) . dx = dt \longrightarrow \boxed{dx = \dfrac{dt}{f'(x)}}$ olur. dx yalnız bırakılır.

$$\int [\, f(x) \,]^n . f'(x) . dx = \int t^n . \cancel{f'(x)} . \frac{dt}{\cancel{f'(x)}}$$

$$= \int t^{n} . dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c = \frac{[\,f(x)\,]^{n+1}}{n+1} + c$$ **olarak bulunur.**

Soru : $\int (4x - 5)^{6} . dx = ?$

Soru : $\int (x^2 + 1)^{11} . x . dx = ?$

Soru : $\int 8 \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) \cdot x \cdot dx = ?$

Soru : $\int \frac{6}{(5-x)^4} . dx = ?$

Soru : $\int \frac{x^2}{(x^3 + 2)^4} . dx = ?$

Soru : $\int \sqrt{1 - x^3} \,.\, 3x^2 \,.\, dx = ?$

Soru : $\int \sqrt{x - 4} \, . \, x \, . \, dx = ?$

Soru : $F(x) = \int \frac{x+8}{\sqrt{x^2+16x-1}} \, . dx$ ise $F(1) = ?$

Soru : $\int f'\left(\frac{x^4}{4}\right).x^3.dx = ?$

Soru : $F(x) = \int f'(3x^2 + 2x).(6x + 2).dx$ veriliyor.

$F(1) = -5$, $f(5) = 2$ ve $f(16) = 1$ ise $F(2) = ?$

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 6. 2. Belirli İntegral ve Uygulamaları

Terimler ve Kavramlar : **Riemann toplamı, belirli integral**

Sembol ve Gösterimler: $\int_a^b f(x).dx$

12. 6. 2. 1. **Bir fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplar.**

A) **Günlük hayatta karşılaşılan ve değeri alan formülleriyle hesaplanamayan alanların, uygun toplamların limiti olarak ifade edilebileceği açıklanır.**

B) **Polinom fonksiyonlarla sınırlandırılır.**

C) **Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.**

12. 6. 2. 2. **Bir fonksiyonun belirli ve belirsiz integralleri arasındaki ilişkiyi açıklayarak işlemler yapar.**

12. 6. 2. 3. **Belirli integralin özelliklerini kullanarak işlemler yapar.**

Parçalı fonksiyonların belirli integraline yer verilir.

12. 6. 2. 4. **Belirli integral ile alan hesabı yapar.**

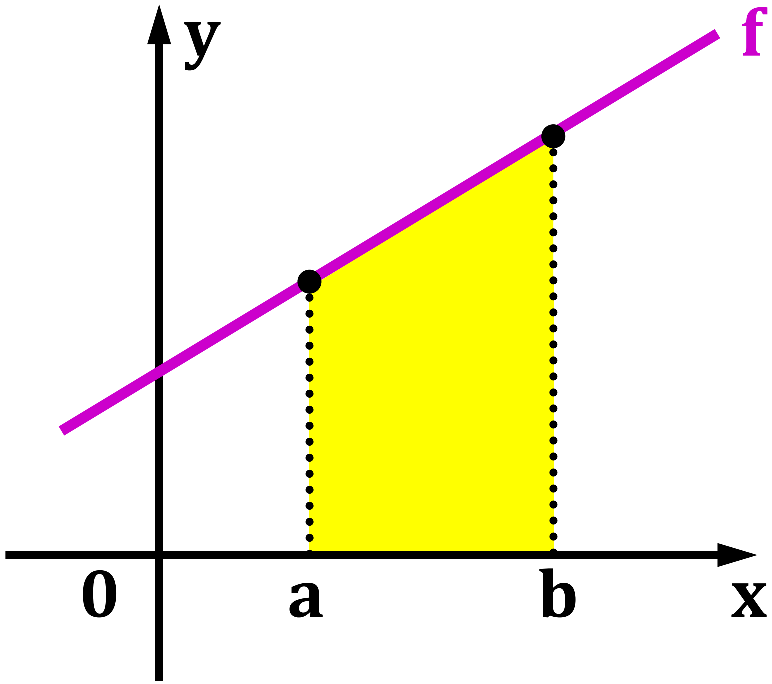
A) **İki fonksiyonun grafikleri arasında kalan sınırlı bölgenin alanı hesaplanır.**

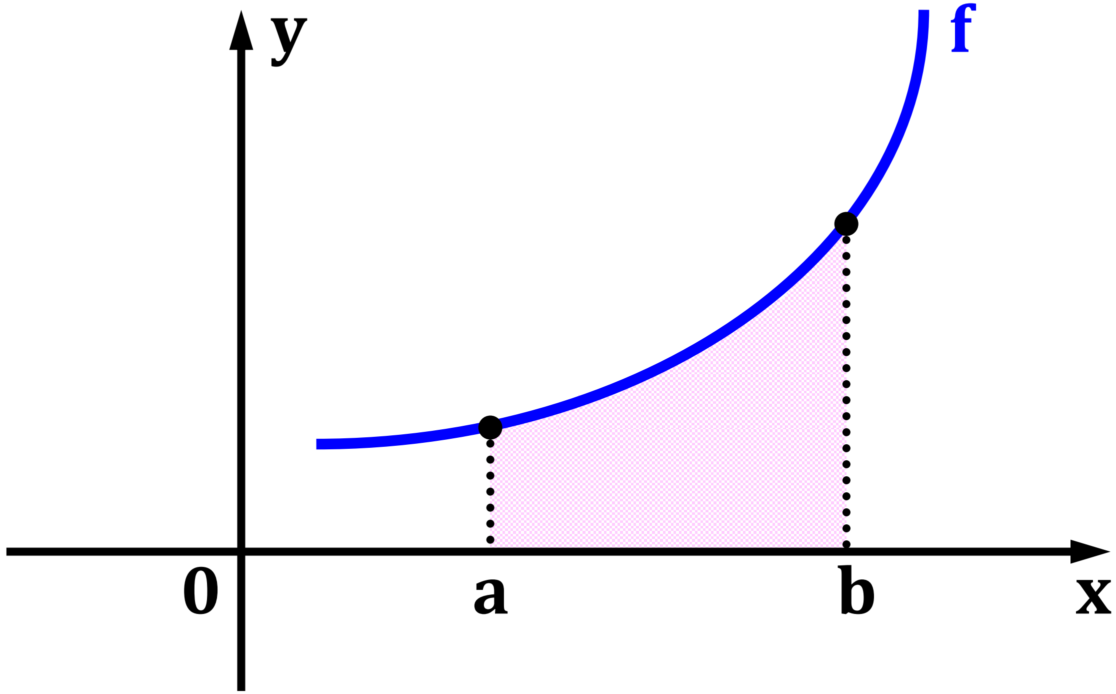
B) **Gerçek hayat problemlerine yer verilir.**

C) **Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.**

Belirli İntegral ve Uygulamaları

Riemann Toplamı





Bir f doğrusunun alt tarafı ile x ekseni arasında kalan [a , b] aralığındaki bölge bir yamuk olduğundan alanını hesaplamak mümkündür.

Bir f eğrisinin alt tarafı ile x ekseni arasında kalan [a , b] aralığındaki bölgenin alanı bilinen geometrik şekillere uymadığından alanı hesaplanamaz.

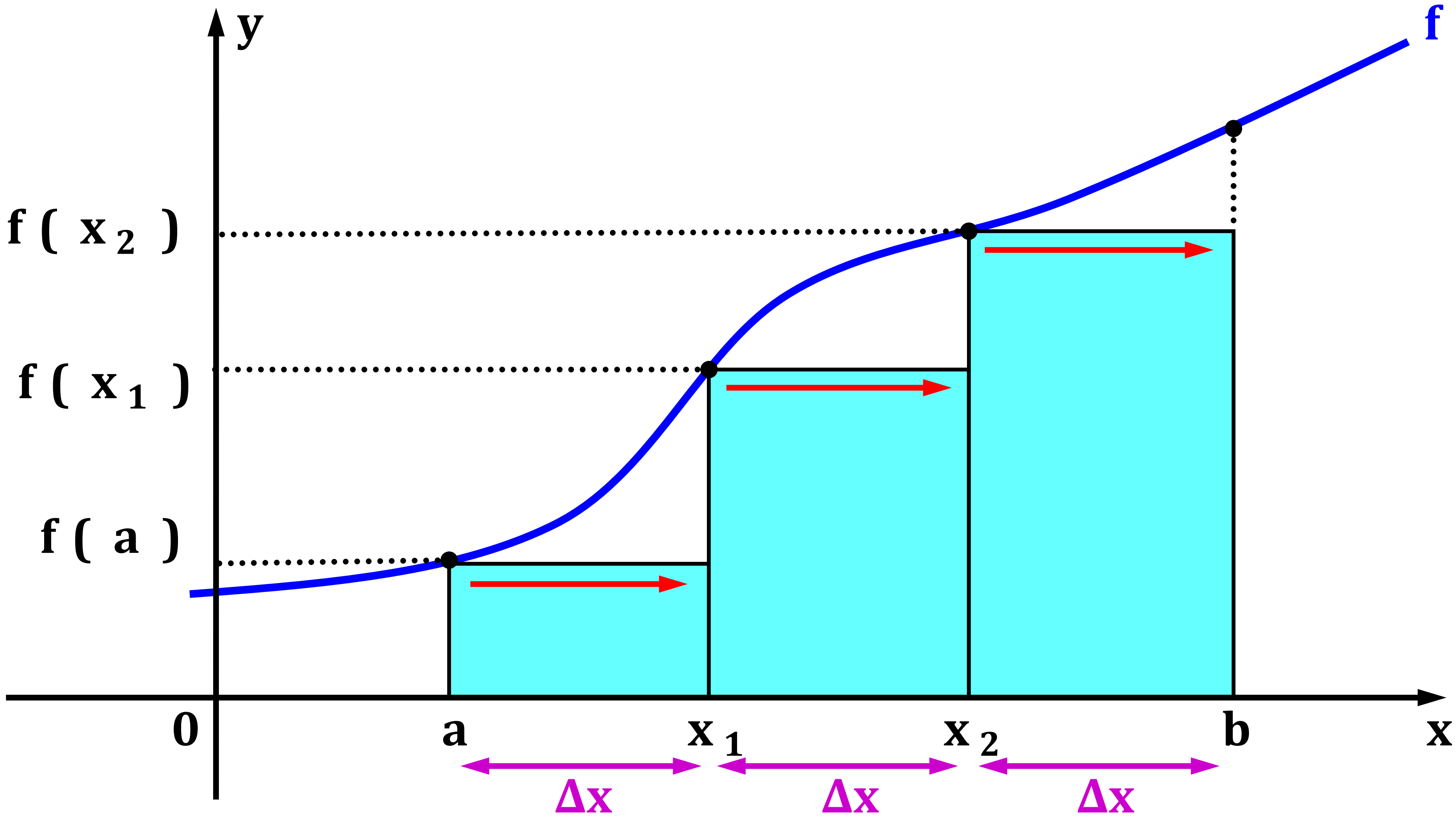
Alan hesaplaması yapılamayan durumlarda bölgenin alanını bulmak için Alman matematikçi Bernhard Riemann'ın bulduğu yöntemden yararlanılır.

Kural 1: **(Riemann Alt Toplamı)**

[a , b] aralığı n adet eşit aralığa ayrılsın. Aralıkların ortak genişliği Δx ile gösterilir. $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ olarak bulunur.

***** Her aralığın <u>ilk noktasının</u> görüntüsünden itibaren sağ tarafa doğru eğrinin altında dikdörtgenler oluşturulur ve bu dikdörtgenlerin alanları toplanır. Bu toplama " Riemann Alt Toplamı " adı verilir.**

Örneğin alttaki grafikteki aralık <u>üç</u> parçaya bölünmüş ve Riemann alt toplamı bulunmuştur.



Eğrinin altında kalan dikdörtgenlerin alanları toplamı

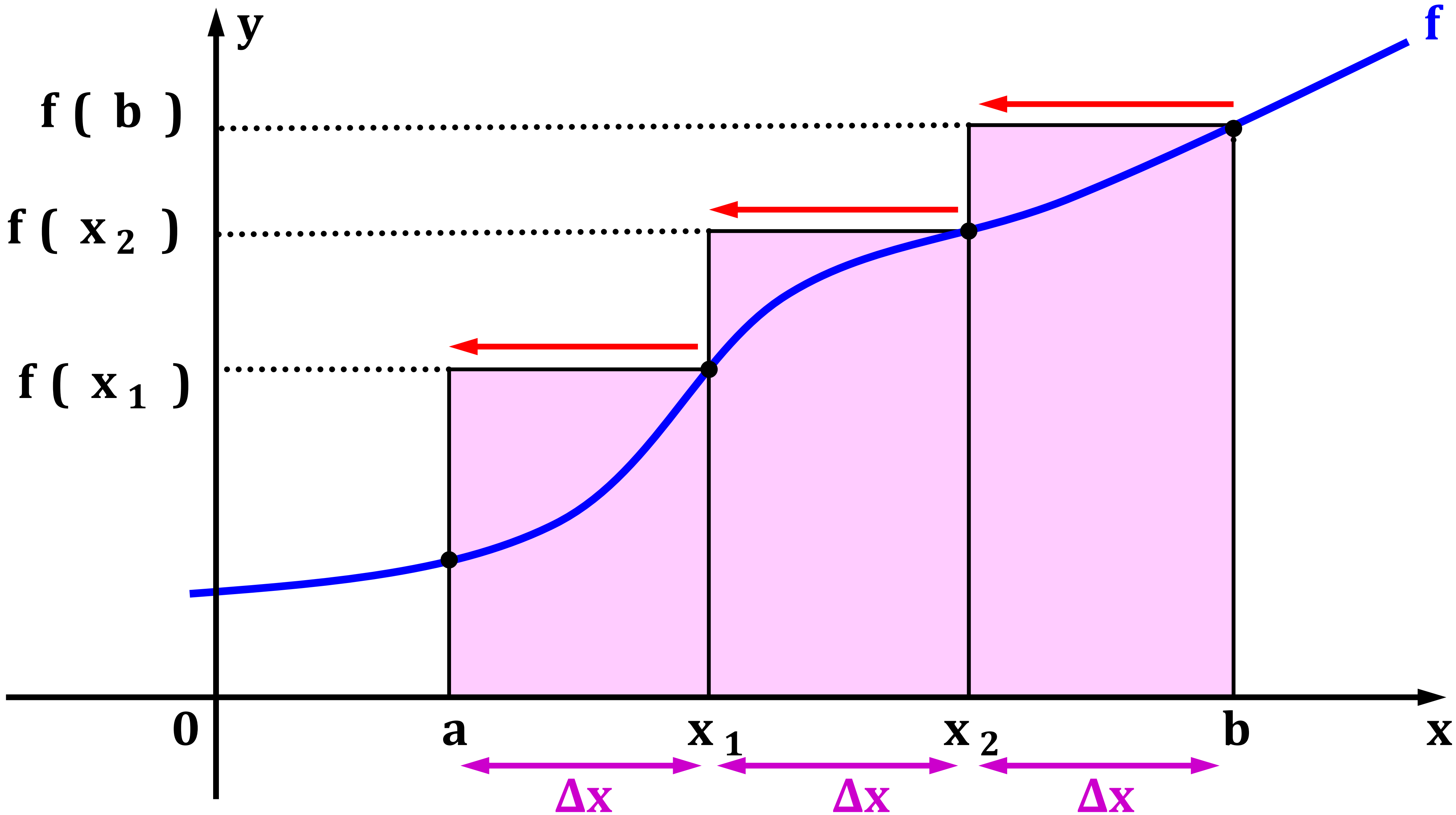
$S_{alt} = \Delta x . f(a) + \Delta x . f(x_1) + \Delta x . f(x_2)$ **olarak bulunur.**

Kural 2: **(Riemann Üst Toplamı)**

[a , b] aralığı n adet eşit aralığa ayrılsın. Aralıkların ortak genişliği Δx ile gösterilir. $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ olarak bulunur.

***** Her aralığın <u>ikinci noktasının</u> görüntüsünden itibaren sol tarafa doğru eğrinin üzerinde dikdörtgenler oluşturulur ve bu dikdörtgenlerin alanları toplanır. Bu toplama " Riemann Üst Toplamı " adı verilir.**

Örneğin alttaki grafikteki aralık <u>üç</u> parçaya bölünmüş ve Riemann üst toplamı bulunmuştur.



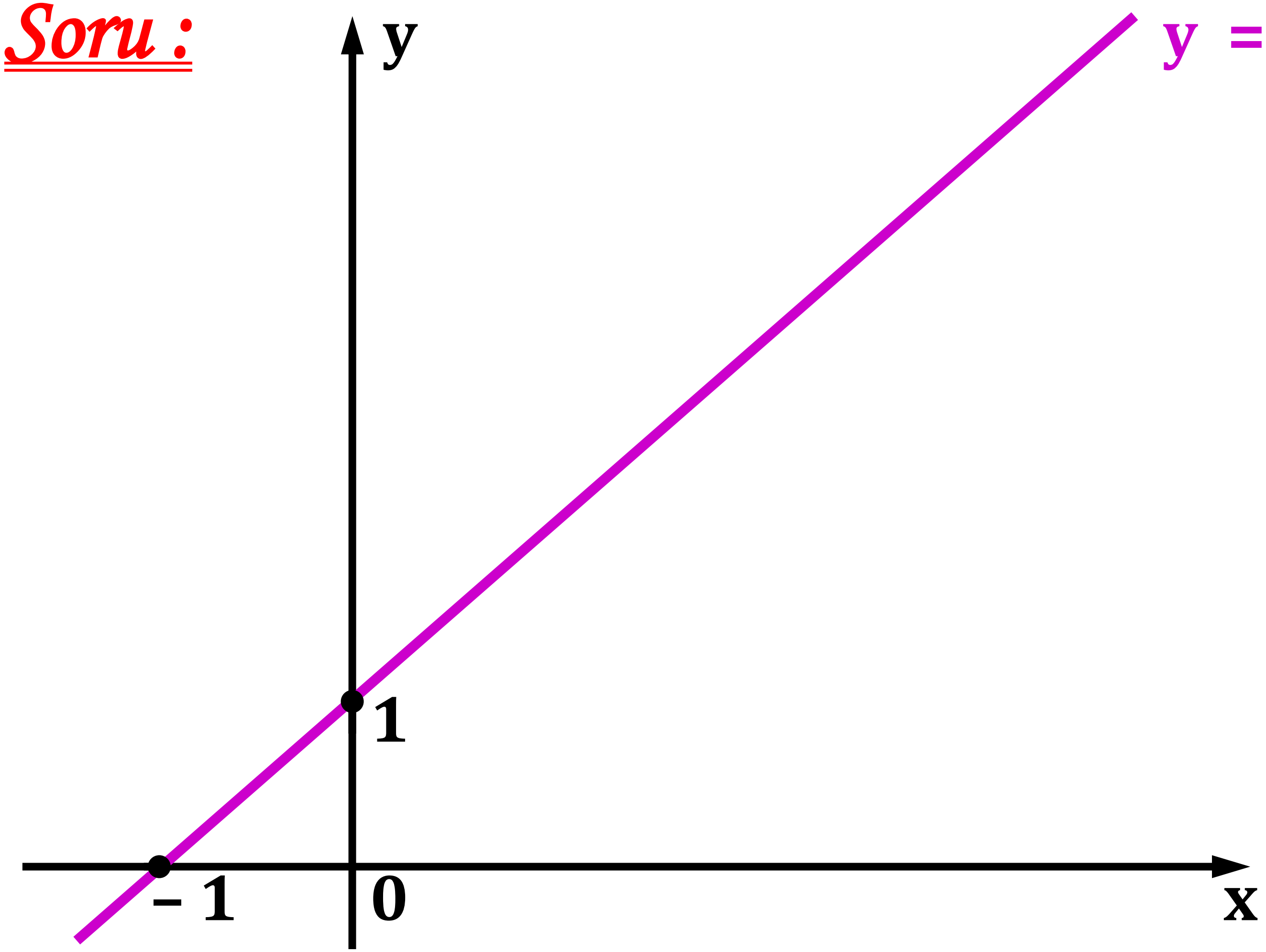
Eğrinin üzerinde olan dikdörtgenlerin alanları toplamı

$S_{üst} = \; = \Delta x . f(b) + \Delta x . f(x_1) + \Delta x . f(x_2)$ olarak bulunur.

Not : Bir eğrinin altında ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı S olsun. S değeri, Riemann alt toplamı ile üst toplamı aralığında olmalıdır.

$$S_{alt} < S < S_{üst}$$ olmalıdır.

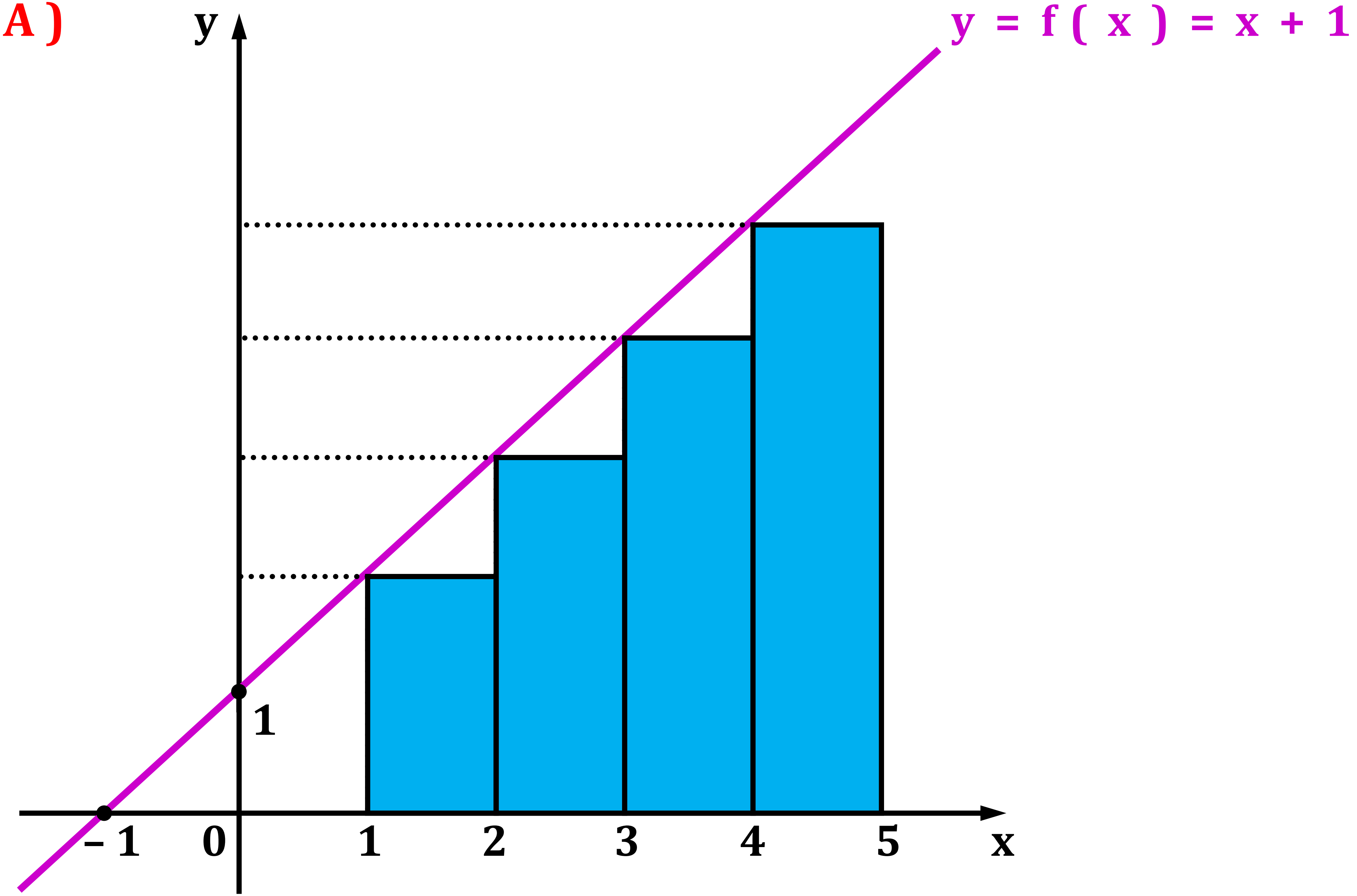
Soru :



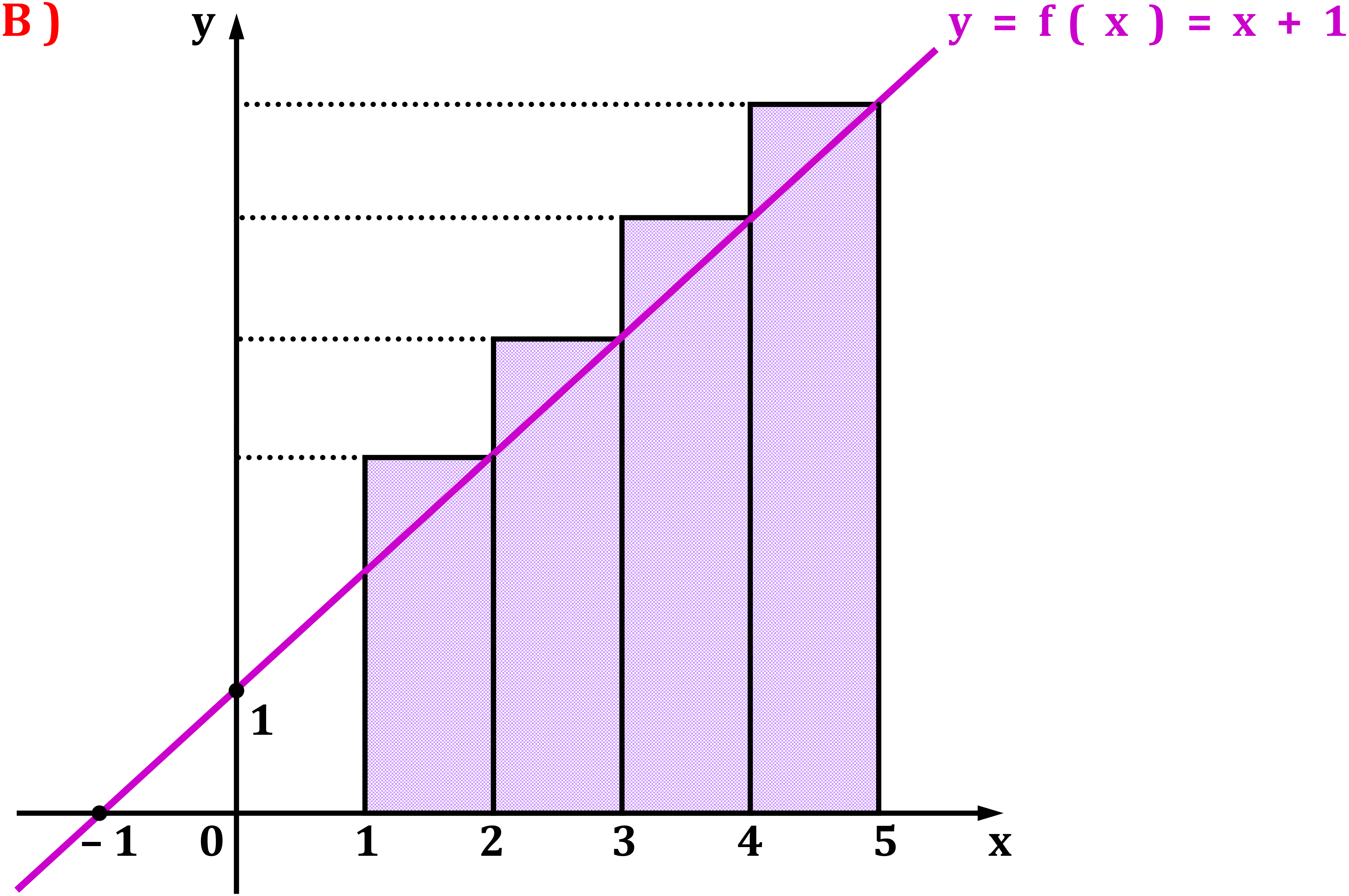
Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafik üzerinde $[\ 1\ ,\ 5\ ]$ aralığı <u>4 eşit</u> parçaya ayrılıyor. Buna göre; **A)** Riemann alt toplamını bulunuz.

B) Riemann üst toplamını bulunuz.

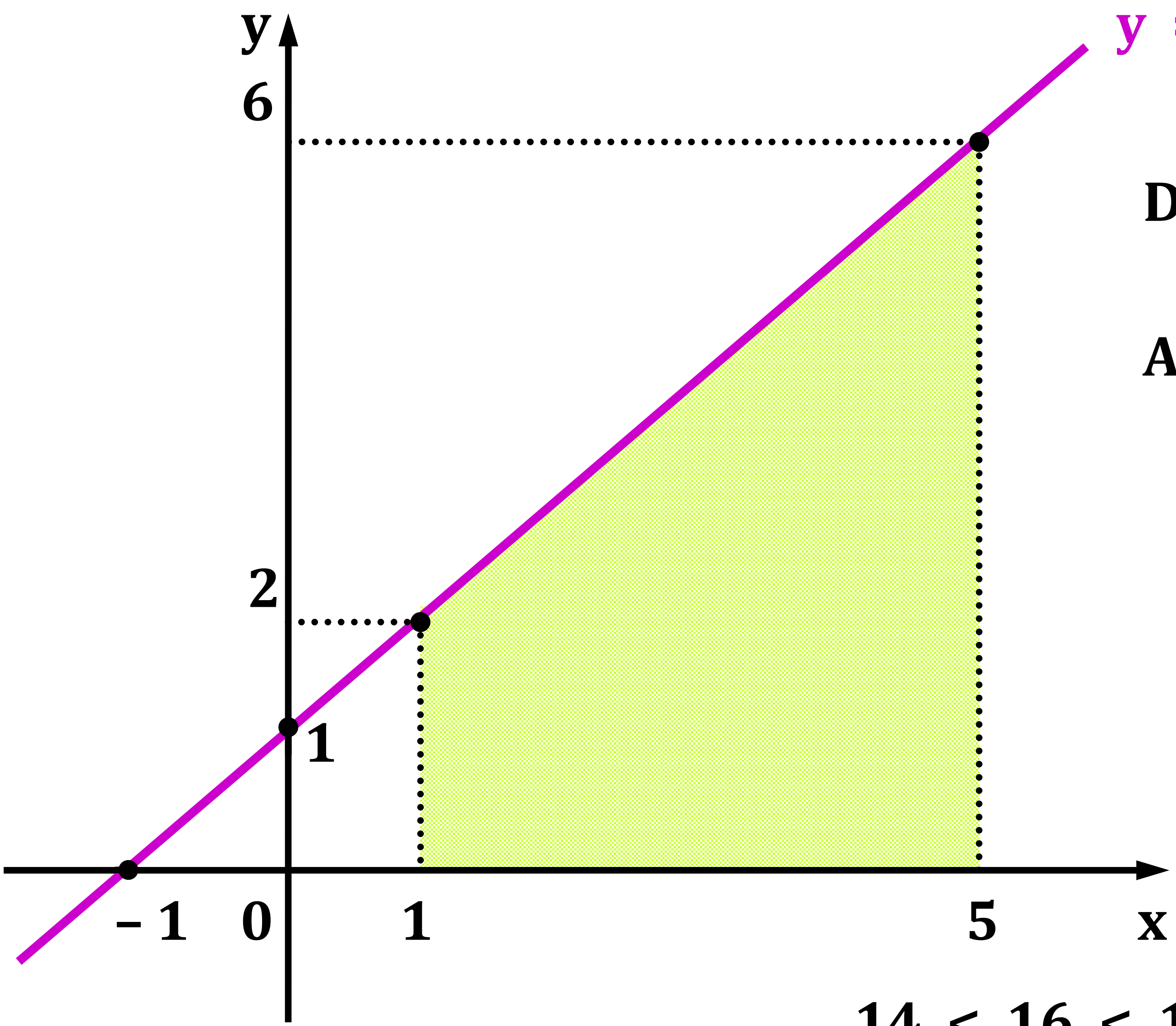
A)



B)



Not : $S_{alt} < S < S_{üst}$ şartını kontrol edelim.



Doğrunun altında kalan alan bir yamuktur.

Alan = S

$= (2 + 6) . 4 / 2$

$= 16$ br^2 bulunur.

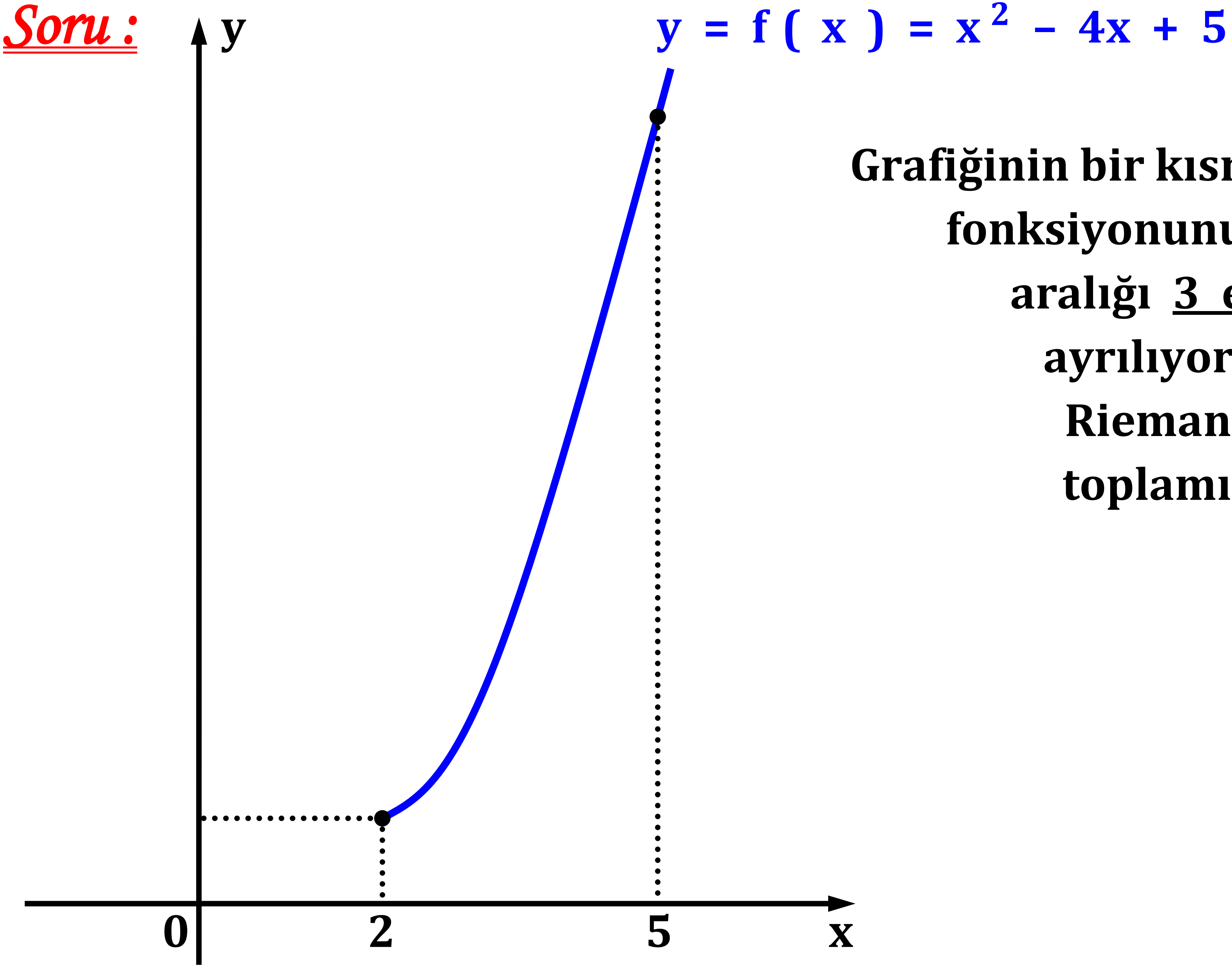
$S_{alt} = 14$ br^2

$S_{üst} = 18$ br^2

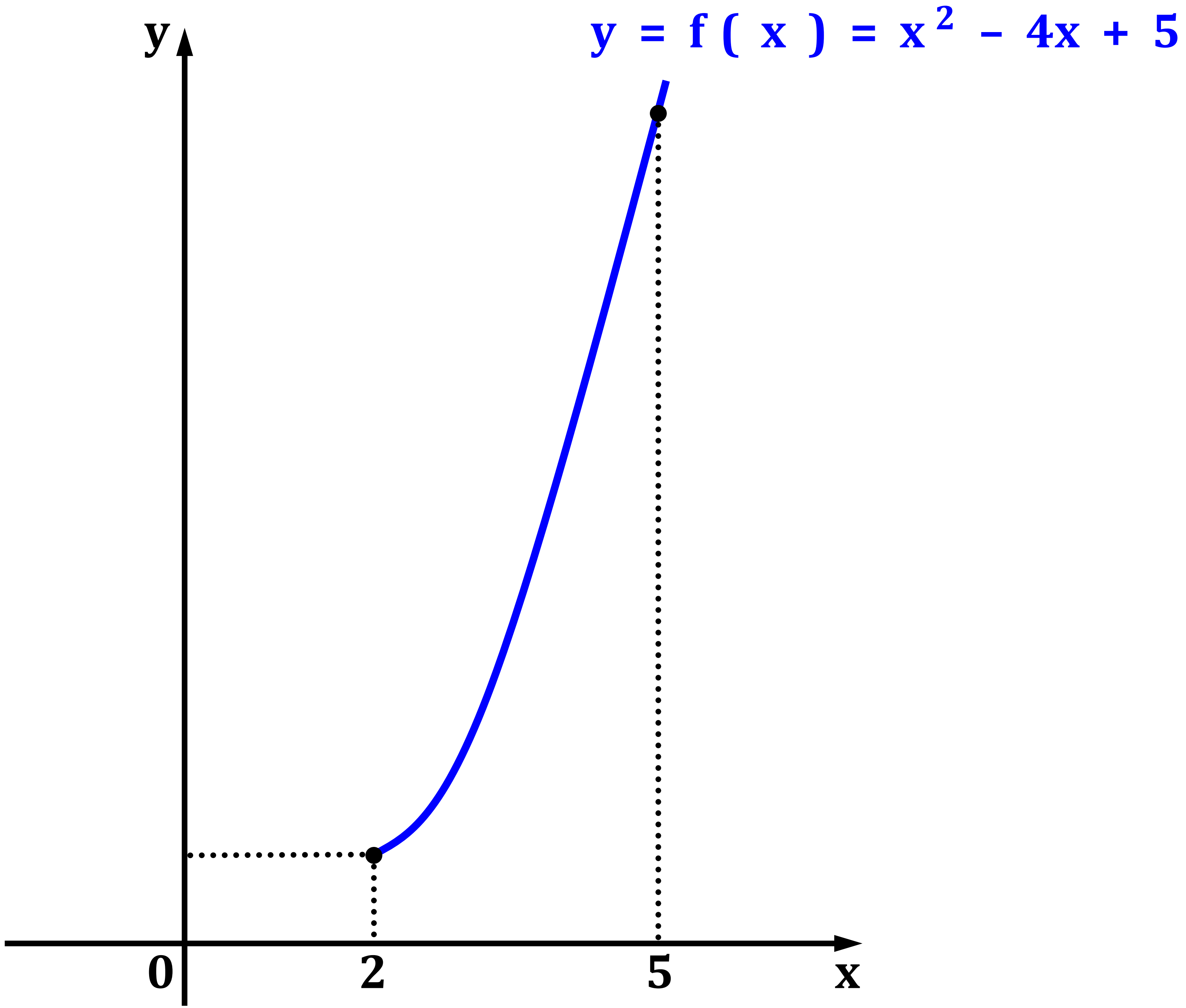
olduğundan

$14 < 16 < 18$ istenen şartı sağlar.

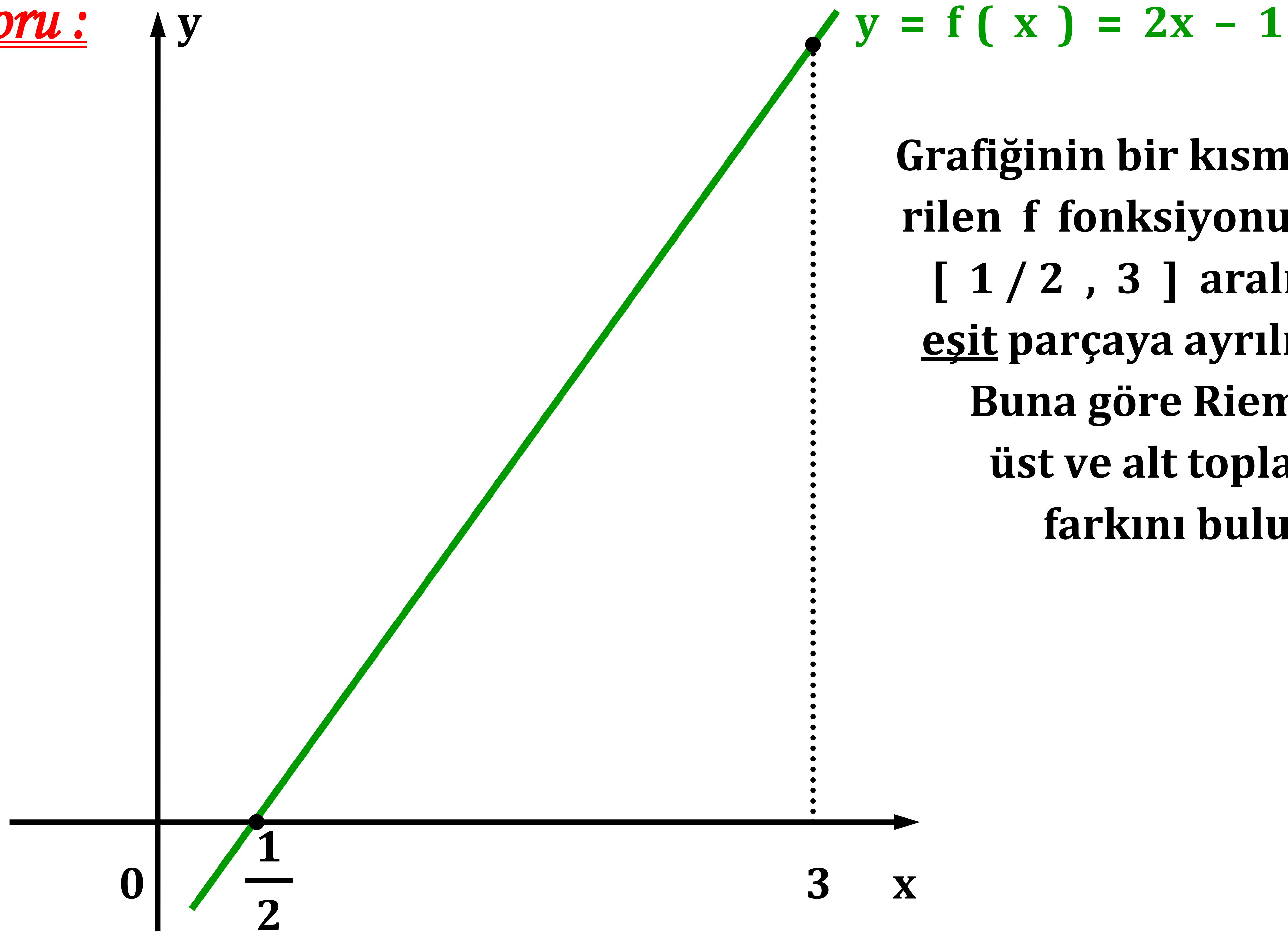
Soru :



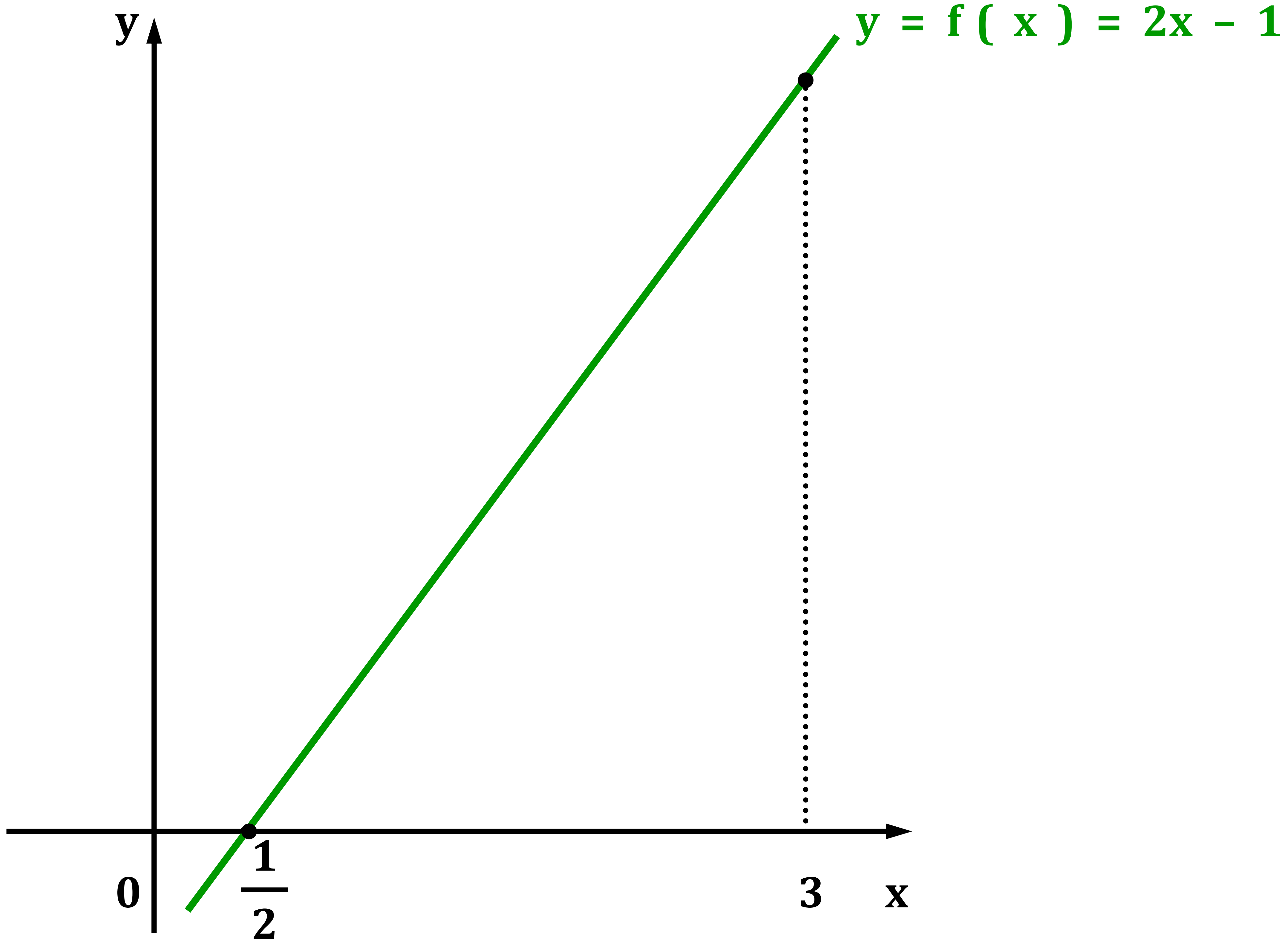
Grafiğinin bir kısmı verilen f fonksiyonunun [2 , 5] aralığı 3 eşit parçaya ayrılıyor. Buna göre Riemann alt ve üst toplamını bulunuz.


y = f (x) = x 2 – 4x + 5
y
x
0
2
5

Soru :



Grafiğinin bir kısmı verilen f fonksiyonunun [1 / 2 , 3] aralığı 5 eşit parçaya ayrılıyor. Buna göre Riemann üst ve alt toplamın farkını bulunuz.

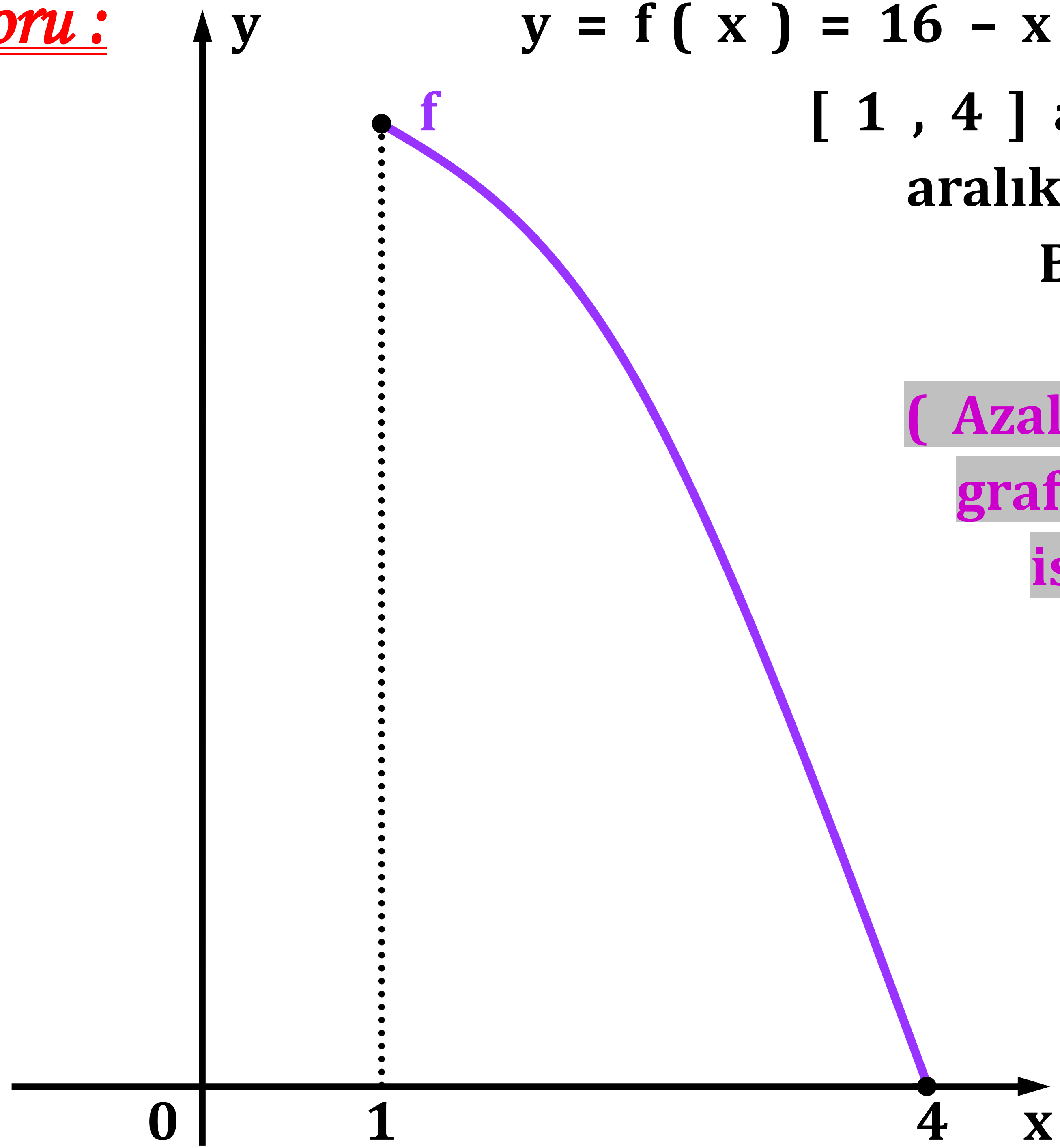


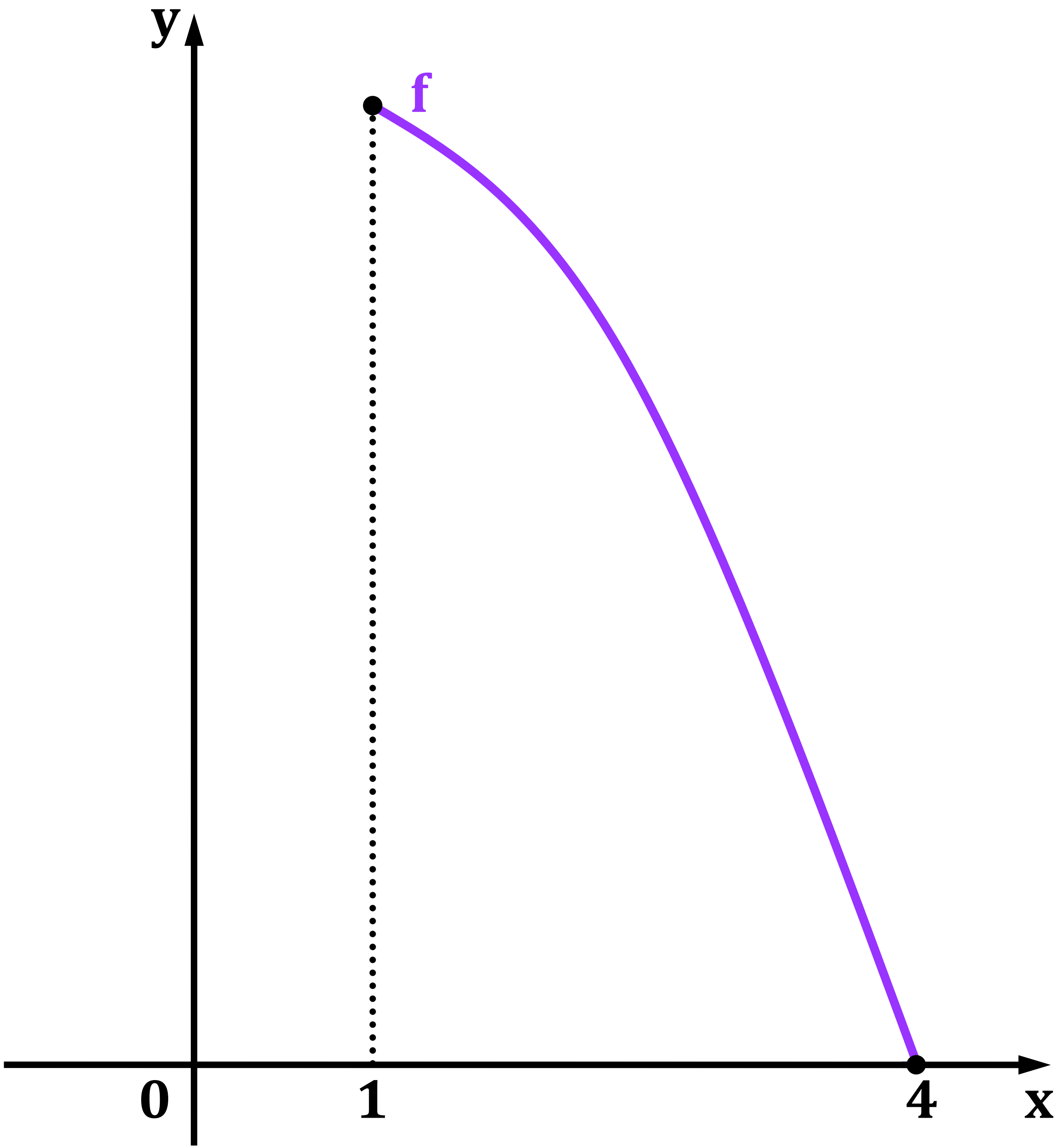
y
y = f (x) = 2x – 1
0
1
2
3
x

Soru :

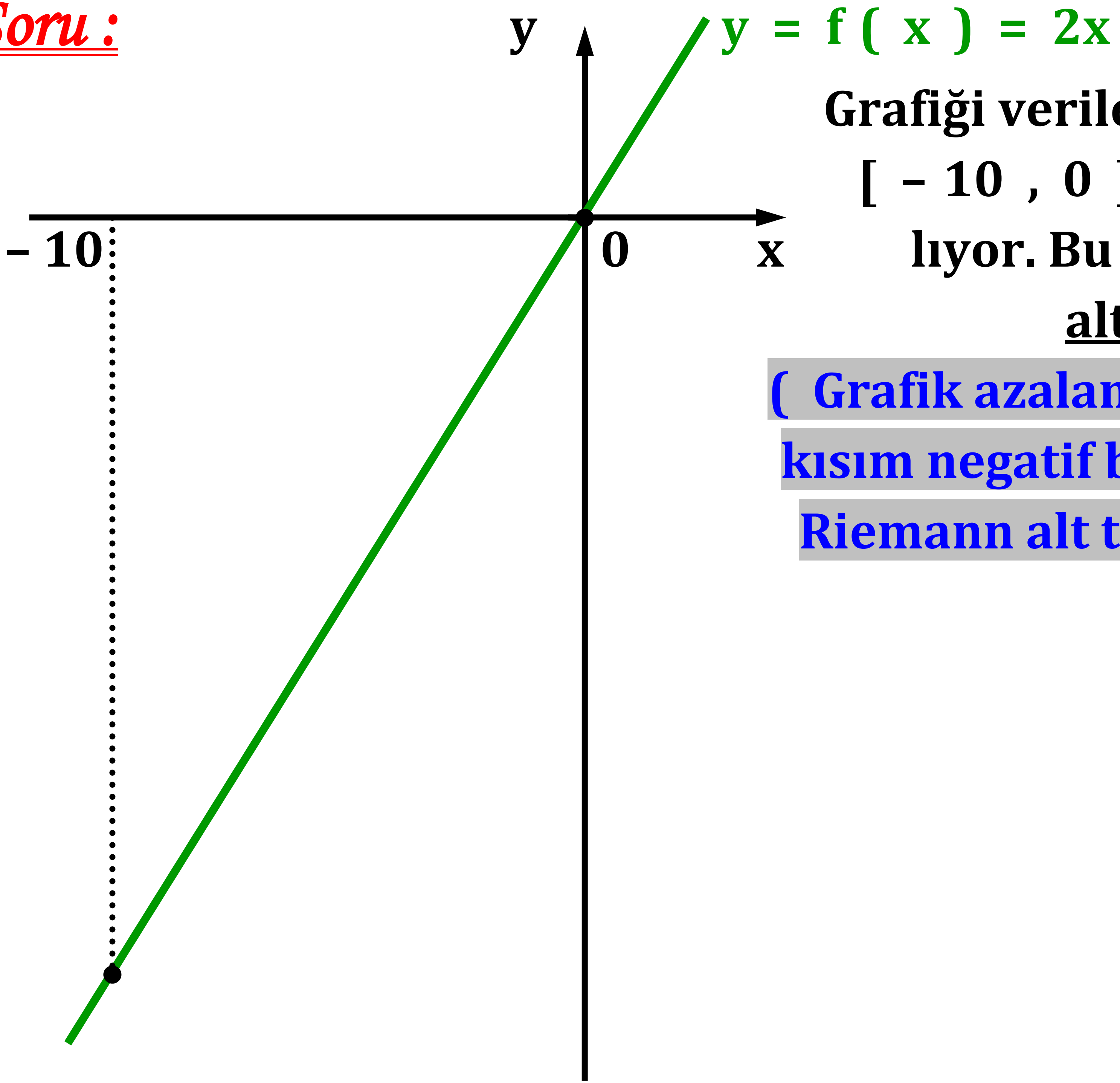
$y = f(x) = 16 - x^2$ fonksiyonunun grafiği $[\,1\,,\,4\,]$ aralığında verilmiştir. Bu aralık <u>3 eşit</u> parçaya ayrılıyor. Buna göre Riemann alt ve üst toplamını bulunuz.

(Azalan grafiklerde alt toplam grafiğin üzerinde, üst toplam ise grafiğin altında kalır.)




y
f
0
1
4
x

Soru :

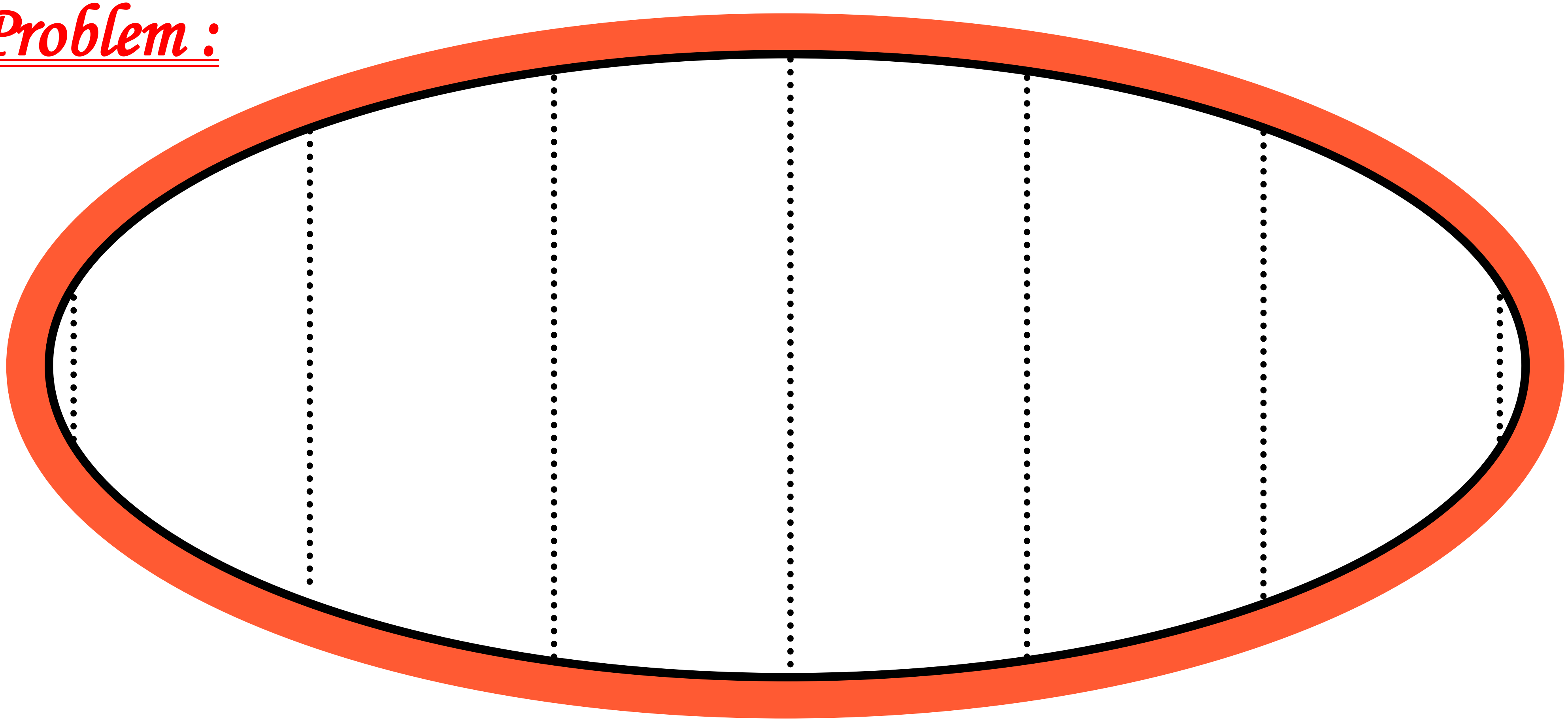


Grafiği verilen f fonksiyonunun [– 10 , 0] aralığı 5 eşit ayrılıyor. Bu aralık için Riemann alt toplamını bulunuz.

(Grafik azalan değil ama istenilen kısım negatif bölgede olduğundan Riemann alt toplamı yine grafiğin üzerinde olur.)

Soru : $y = f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor. $[-3, 5]$ aralığını 4 eşit parçaya bölen kısmın Riemann alt ve üst toplamını bulunuz. **(Önce fonksiyonun grafiği çizilmelidir.)**

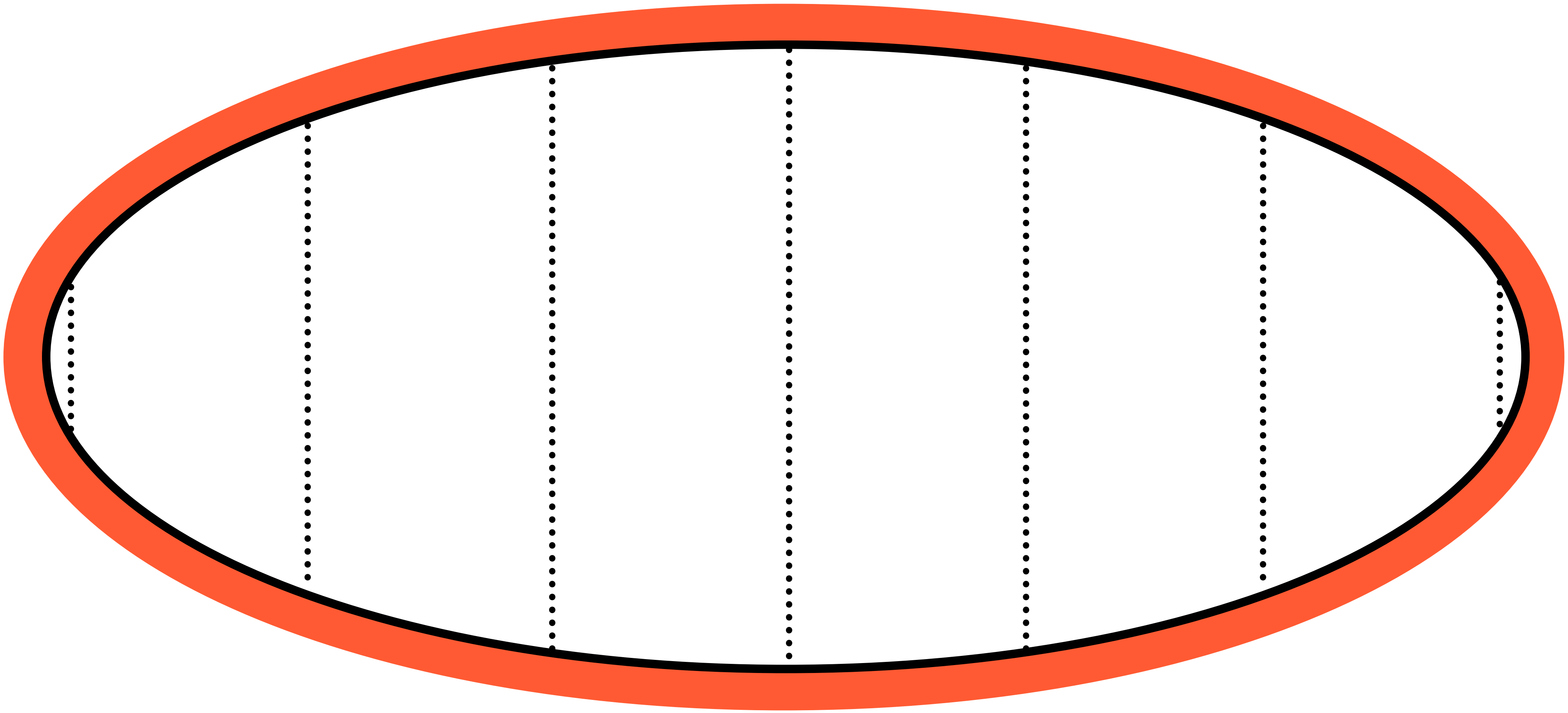
Problem :

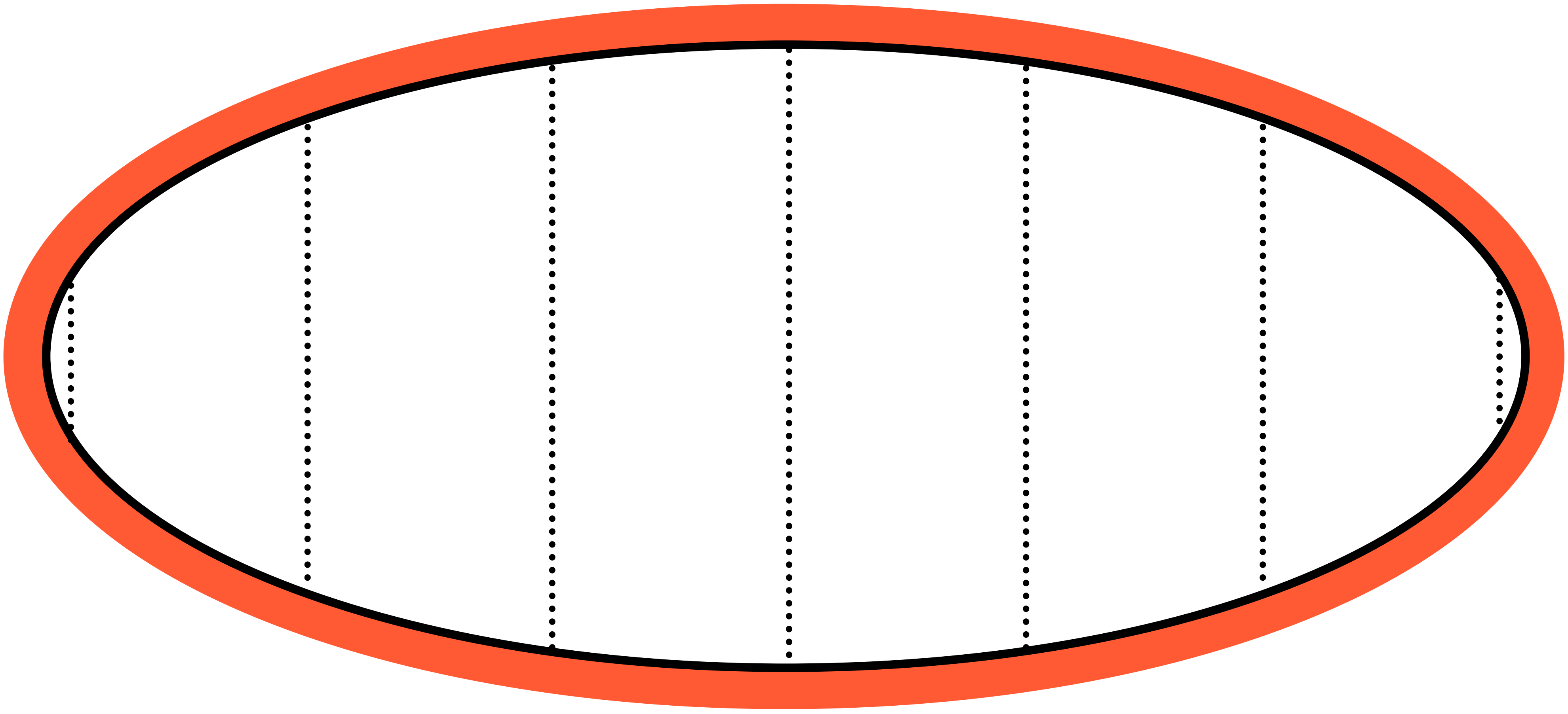


10 m dikey aralıklarla bölünmüş koşu pistinin iç kısmındaki parçaların uzunlukları soldan sağa sırasıyla; 5 , 15 , 20 , 22 , 20 , 15 ve 5 m'dir. Bu iç kısmın alanı aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir ?</u>

A) 700 B) 1000 C) 1300 D) 1600 E) 1900

Koordinat sisteminde verilmediği için şekli alt ve üst dikdörtgen bölgelere ayırarak Riemann alt ve üst toplamları bulunur.



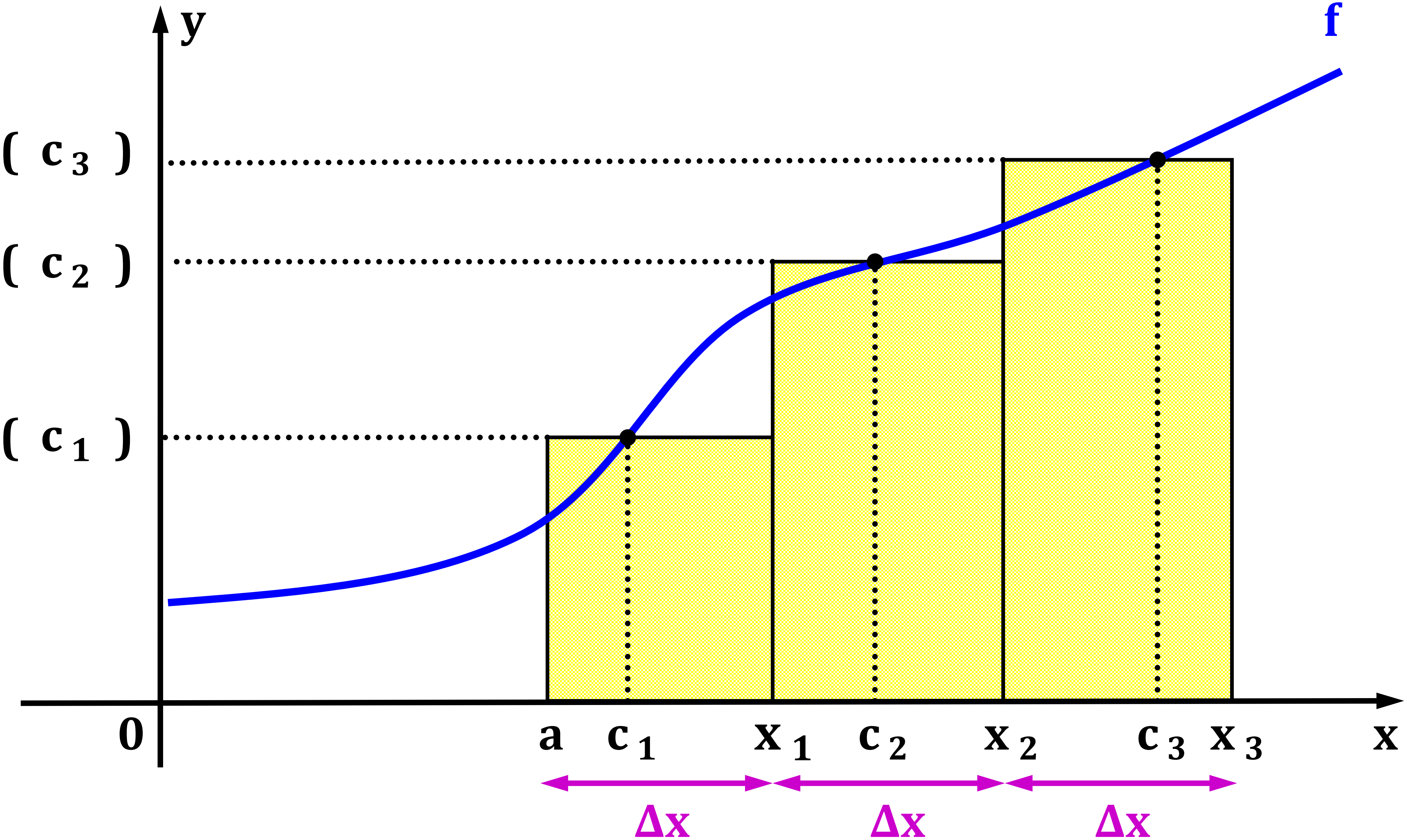


Kural 3: **(Riemann Toplamı)**

[a , b] aralığı n adet eşit aralığa ayrılsın. Aralıkların ortak genişliği Δx ile gösterilir. $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ olarak bulunur.

***** Her aralığın içinde bir nokta seçilir ve bu noktanın görüntüsünden geçen dikdörtgen oluşturulur. Bu dikdörtgenlerin alanları toplanır. Bu toplama " Riemann Toplamı " adı verilir.**

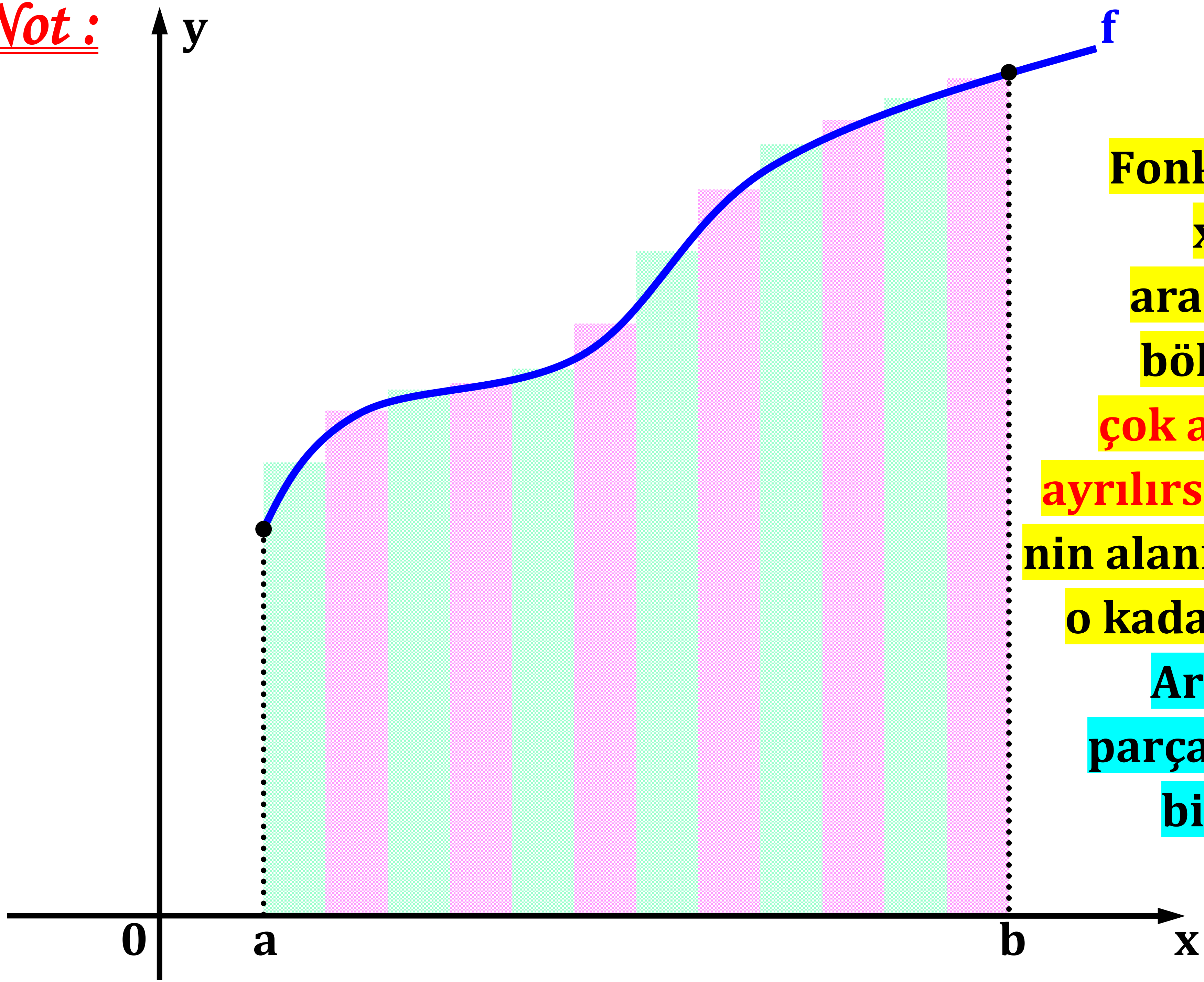
Örneğin alttaki grafikteki aralık üç parçaya bölünmüş ve Riemann üst toplamı bulunmuştur.



Eğrinin üzerinde olan dikdörtgenlerin alanları toplamı

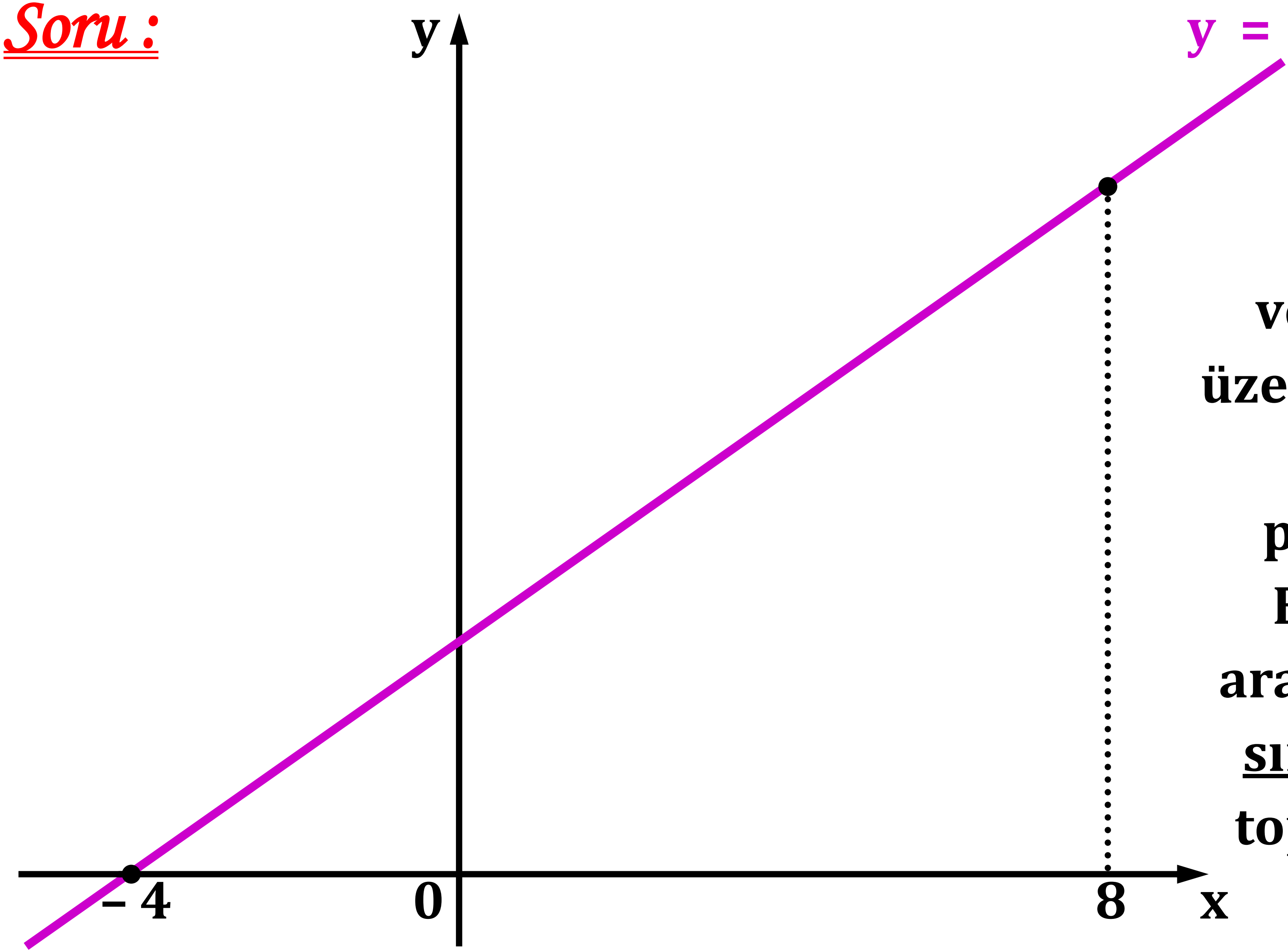
$S = \Delta x \, . \, f(c_1) + \Delta x \, . \, f(c_2) + \Delta x \, . \, f(c_3)$ **olarak bulunur.**

Not :



Fonksiyonun ve x ekseninin arasında kalan bölge ne kadar çok alt bölgelere ayrılırsa ara bölgenin alanını bulmaya o kadar yaklaşılır. Aralığı sonsuz parçaya ayırmak bize istenilen alanı verir.

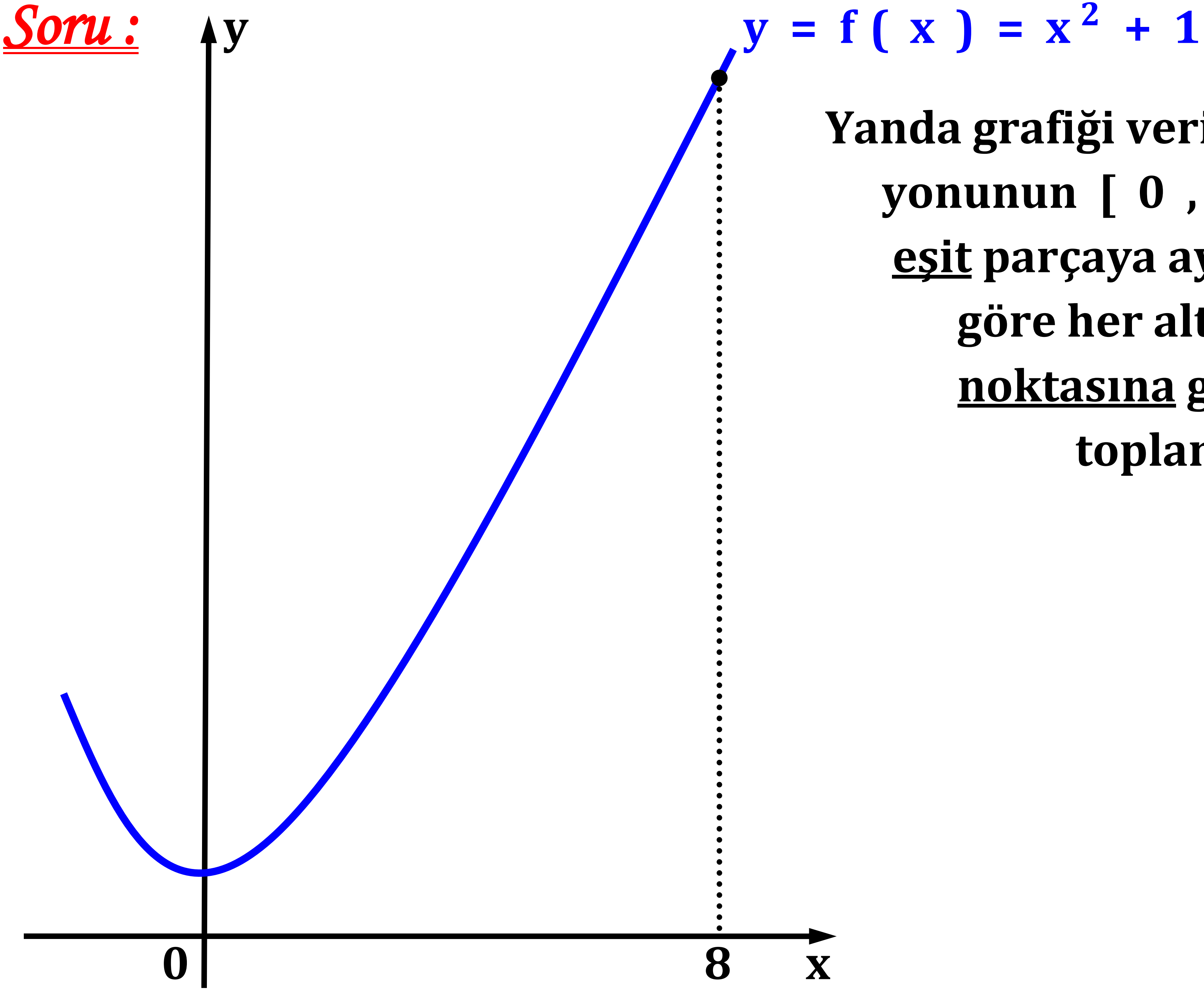
Soru :



$y = f(x) = \frac{x}{2} + 2$

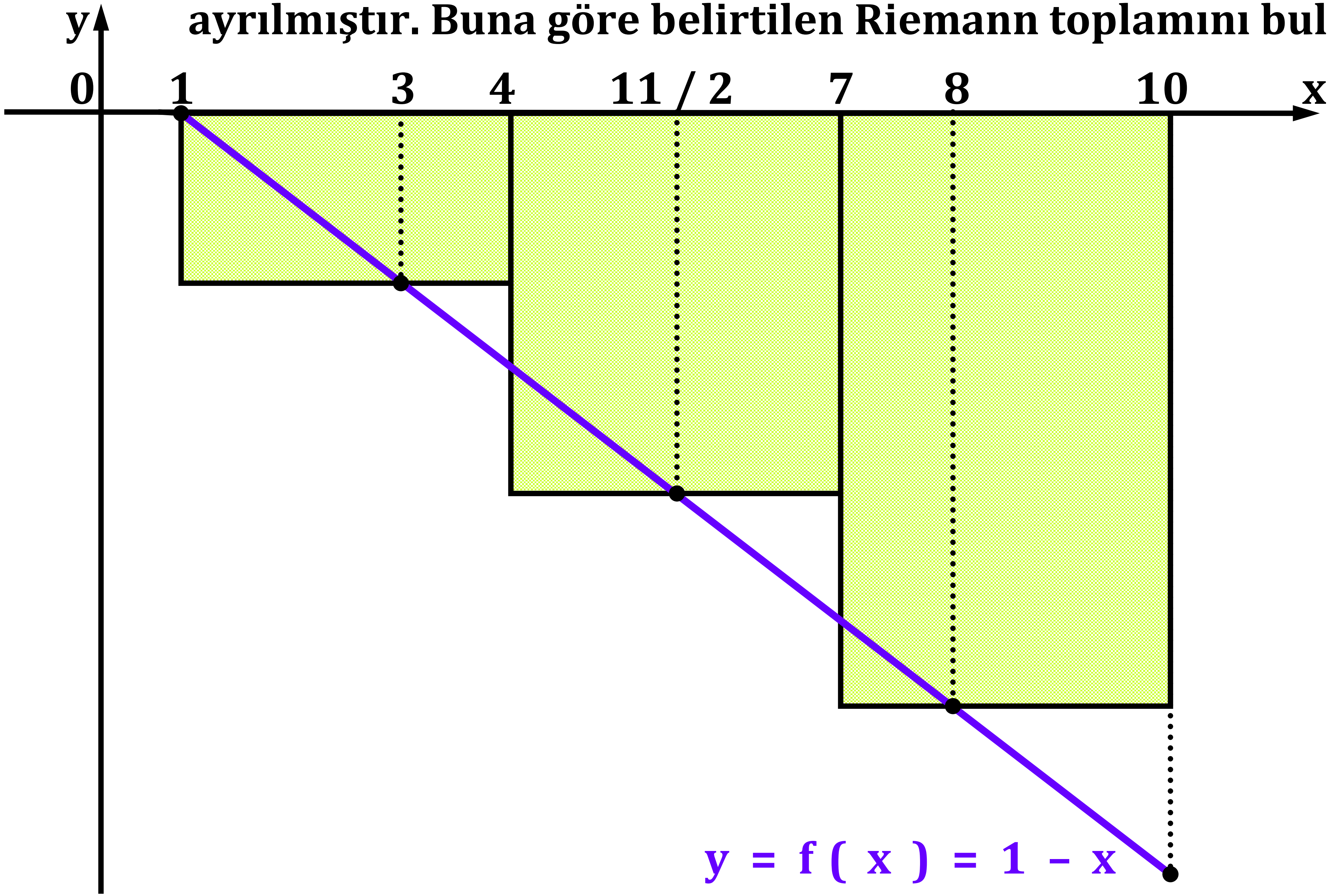
Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafik üzerinde [– 4 , 8] aralığı 3 eşit parçaya ayrılıyor. Buna göre her alt aralığın orta noktasına göre Riemann toplamını bulunuz.

Soru :



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun [0 , 8] aralığı <u>4 eşit</u> parçaya ayrılıyor. Buna göre her alt aralığın <u>orta noktasına</u> göre Riemann toplamını bulunuz.

Soru : **Alttaki aralıkta grafiği verilen f fonksiyonu <u>3 eşit</u> parçaya ayrılmıştır. Buna göre belirtilen Riemann toplamını bulunuz.**



Belirli İntegral

$[\ a\ ,\ b\ ]$ aralığında bir f fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\int_a^b f(x)\,.\,dx$ integrali ile bulunur.

a ’ya “ alt sınır ”, b ’ye de “ üst sınır ” adı verilir.

$\int f(x)\,.\,dx = F(x) + c$ idi.

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = \Big[\ F(x) + c\ \Big]\Big|_a^b$$

$$= [\ F(b) + c\ ] - [\ F(a) + c\ ]$$

$= F(b) - F(a)$ olarak bulunur.

$\int_{a}^{b} f(x).dx = F(b) - F(a)$ işleminin sonucunda c sabiti kalmadığından bu integrale " belirli integral " adı verilir.

Soru : $y = f(x) = 2x + 4$ ise $\int_{-2}^{3} f(x).dx = ?$

2.Yol : **Grafik çizilip istenilen aralıktaki bölgenin alanı bulunur.**

$$y = f(x) = 2x + 4 \quad \text{ise} \quad \int_{-2}^{3} f(x)\,.\,dx = ?$$

Soru : $\int_{1}^{6} (3x^2 - 2).dx = ?$

Soru : $\int_{-1}^{4} (8x^3 - 2x + 1) . dx = ?$

Soru : $$\int_{3}^{6} \left(\frac{x^2}{2} + x - 1 \right) . dx = ?$$

Soru : $\int_{0}^{8} (4 - x)^2 . dx = ?$

Soru : $\int_{1}^{4} (2x + \sqrt{x}) \, . \, dx = ?$

Soru : $\int_{1/2}^{4} \left(\frac{4}{x^2} - 32x \right) . dx = -1 + 3k$ ise $k = ?$

Soru : $A = \int_{-6}^{15} (\,6x^{12} + x^{7} - 11x + 4\,)\,.\,dx$ ve $B = \int_{3}^{8} x\,.\,dt$ ise

$A' + B = ?$ (A' : A'nın x'e göre türevi)

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x < 0 \text{ ise} \\ x + 1 & , \quad x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\displaystyle\int_{6}^{8} f(x - 4) \, . \, dx = ?$ **(Önce $f(x - 4)$ fonksiyonu bulunur. İntegralin sınırlarına uygun olan fonksiyon seçilir ve çözüm bulunur.)**

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} -6 - 2x, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 8x + 5, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\displaystyle\int_{2}^{5} f(3 - x).dx = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x \le -5 \quad \text{ise} \\ 2x^2 + 3x & , \quad -5 < x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2 + 4x & , \quad 1 \le x \quad \text{ise} \end{cases}$$

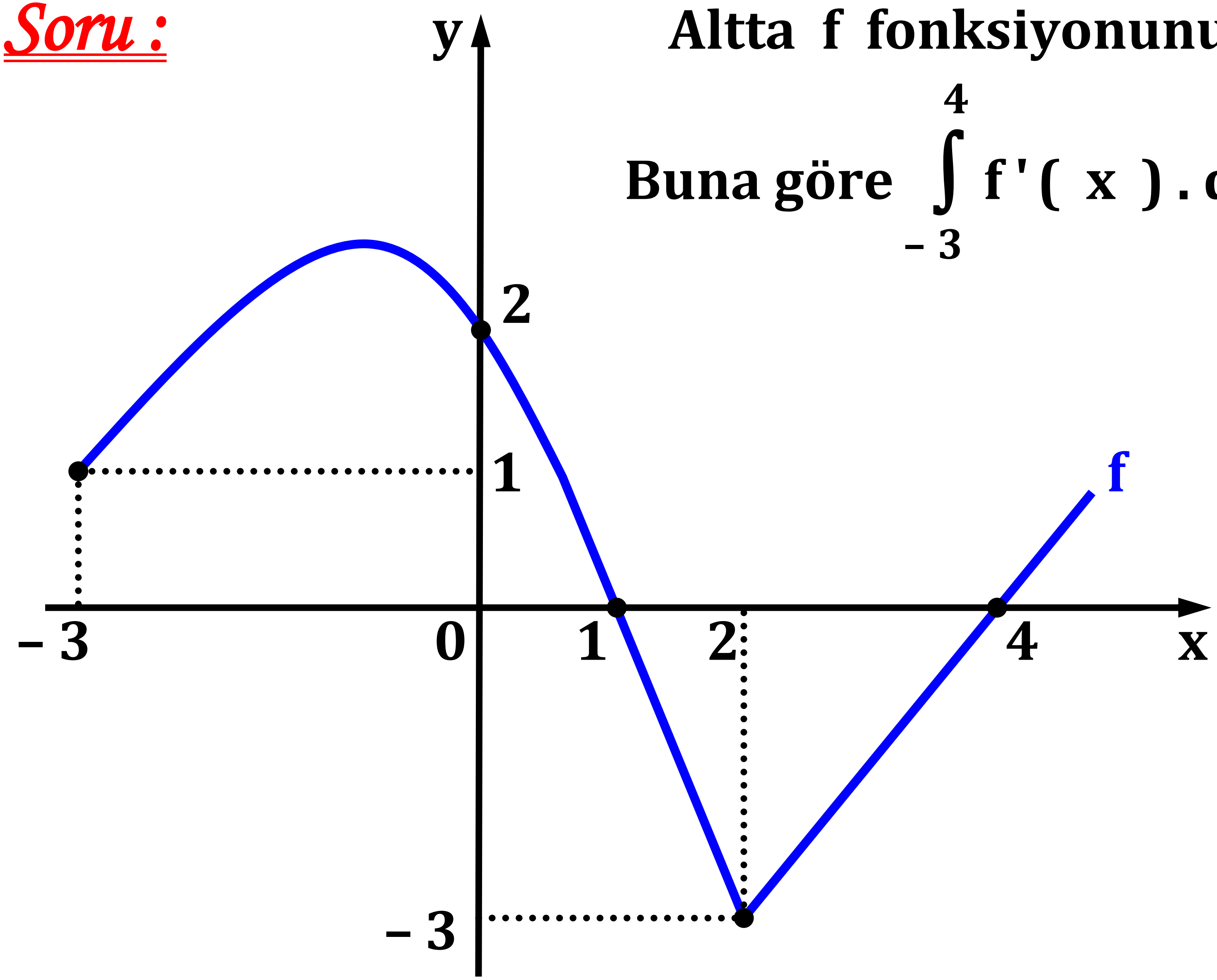
parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre

$$\int_{-1}^{1} f(x+2).dx = ?$$

Soru :

Altta f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\displaystyle\int_{-3}^{4} f'(x).dx + \int_{0}^{2} f'(x).dx = ?$



(İntegralin içindeki fonksiyonun kimin türevi olduğu bulunur ve kural uygulanır.)

Soru : $\int_{1}^{10} f'(x).dx = f(10) + f(1) - 24$ ise $f(1) = ?$

Soru : $\displaystyle\int_{0}^{8} 2 \,.\, f(x) \,.\, f'(x) \,.\, dx = 32$ **ve** $f(8) = 3 \,.\, f(0)$ **ise**

$f(0)$ değerinin <u>pozitif</u> değeri kaç olur ?

Soru : $\int_{-2}^{3} [\, f(x) + x \,.\, f'(x) \,] \,.\, dx = -6$ ve

$f(3) + 2 \,.\, f(-2) = 22$ ise $f(-2) = ?$

Soru : $\displaystyle\int_{0}^{2} (2x - 1)^4 \,.\, dx = ?$

(Değişken değiştirme yöntemi uygulanır. Değişken değiştiği için integralin sınırları da değiştirilmelidir.)

Soru : $$\int_{\sqrt{6}}^{3} (7 - x^2)^6 . 14x . dx = ?$$

Soru : $$\int_{-1}^{0} \frac{3 + 2x}{(x^2 + 3x + 1)^5} . dx = ?$$

Soru : $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{1 + x^3}\,.\,3x^2\,.\,dx = ?$

Soru : $\int_{1}^{4} f''(x).f'(x).2.dx = 3$ olup f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı 45° ise $f'(4) = ?$

Soru :

$$f(x-2)=\begin{cases} x+4 & , \quad x \le 0 \text{ ise} \\ x-1 & , \quad x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$ parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\displaystyle\int_{0}^{3} f'(3x+1)\,.\,dx = ?$

Belirli İntegralin Özellikleri

Kural 1: $\int_{a}^{a} f(x).dx = 0$ olarak alınır. Belirli integralde alt ve üst sınır aynı ise integralin sonucu sıfırdır.

$$\int_{a}^{a} f(x).dx = F(a) - F(a) = 0$$ olarak bulunur.

Kural 2: $\int_{a}^{b} f(x).dx = -\int_{b}^{a} f(x).dx$ olarak alınır. Belirli integralde alt ve üst sınırlar yer değiştirirse belirli integralin değeri işaret değiştirir.

$$\int_{a}^{b} f(x).dx = F(b) - F(a) = -[-F(b) + F(a)]$$

$$= -\int_{b}^{a} f(x).dx$$ olarak bulunur.

Kural 3: $$\int_a^b k\,.\,f(x)\,.\,dx = k\,.\int_a^b f(x)\,.\,dx$$ (k sabit)

k sabit sayısı integralin başına alınabilir.

Soru : $\int_5^0 f(x)\,.\,dx = 3k - 11$ ve $\int_0^5 f(x)\,.\,dx = 17 - k$ ise

$k = ?$

Soru : **Alttaki verilen ifadelerden hangisi – hangileri doğrudur ?**

I. $\int_{2}^{2} (5x + 4) \, . \, dx = 0$

II. $\int_{-7}^{7} f(x) \, . \, dx = \int_{7}^{-7} f(x) \, . \, dx$

III. $\int_{1}^{10} (2x - 9) \, . \, dx = \int_{10}^{1} (-2x + 9) \, . \, dx$

IV. $\dfrac{d}{dx} \int_{-3}^{4} (6x^3 + 5) \, . \, dx = 0$

Kural 4: $a < c < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$ olarak ayırabiliriz.

$a < c < d < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^d f(x).dx + \int_d^b f(x).dx$$

olarak integrallerin alt ve üst sınırlarını parçalayabiliriz.

.

.

.

7 3 7

Soru : $\int_{0} (\ 2x\ +\ 5\ ).\,dx = \int_{0} (\ 2x\ +\ 5\ ).\,dx + \int_{3} (\ 2x\ +\ 5\ ).\,dx$

eşitliğinin sağladığını integrallerin sonuçlarını bularak karşılaştırınız.

Soru :

$$\int_{-3}^{-2} (x^2 - 4).dx + \int_{-2}^{0} (x^2 - 4).dx + \int_{0}^{4} (x^2 - 4).dx = ?$$

Kural 5:

$$\int_a^b [\, f(x) + h(x) \,].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b h(x).dx$$

$$\int_a^b [\, f(x) - h(x) \,].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b h(x).dx$$

Sınırlar aynı olmak üzere; toplam ve fark durumundaki integralleri ayırabildiğimiz gibi, ayrı olarak verilmiş integralleri de bir araya getirebiliriz.

Soru :

$$\int_{1}^{5} (8 + 4x)\,.\,dx + \int_{1}^{5} (-2x + 1)\,.\,dx - \int_{1}^{5} 6\,.\,dx = ?$$

Soru :

$$\int_{-1}^{4} (3x^2 + kx - 1).dx + \int_{4}^{-1} (kx + 4).dx + \int_{-1}^{4} (1 - x).dx = ?$$

Kural 6: (Parçalı Fonksiyonun Türevi)

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x < c \text{ ise} \\ k(x), & x \geq c \text{ ise} \end{cases}$$ parçalı fonksiyonu verilsin.

$a \leq c \leq b$ olmak üzere, (c parçalı fonksiyonda sınırdır.)

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c h(x).dx + \int_c^b k(x).dx$$ olarak alınır.

Belirli integral parçalara ayrılır. Her bir aralığa uygun olan fonksiyon kullanılarak integral alma işlemi uygulanır.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \quad , \quad x < 3 \text{ ise} \\ x^2 - 5 \quad , \quad x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$ **parçalı fonksiyonu veriliyor.**

Buna göre $\int_{-2}^{6} f(x) \, . \, dx = \, ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} -7 - 4x & , \quad x < 1 \text{ ise} \\ 3x^2 + 2 & , \quad x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$ **parçalı fonksiyonu veriliyor.**

Buna göre $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,.\,dx = ?$

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \quad x < -2 \text{ ise} \\ x + 2 & , \quad -2 \leq x < 0 \text{ ise} \\ 1 - 4x^3 & , \quad x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\,.\,dx = ?$

Not : Mutlak değerli fonksiyonların integrali varsa önce mutlak değer fonksiyonu parçalı fonksiyona çevrilir. Bunun için öncelikle mutlak değerin içini sıfır yapan kök bulunur ve işaret tablosu yapılır. İntegral sınırlarına göre gerekirse sınırlar parçalara ayrılır.

Örneğin $f(x) = |2x - 4|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f (x)	$-$	0	$+$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 \quad , \quad x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 4 \quad , \quad x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$ olarak yazılır.

Eşitliği ilk aralığa da koyabilirdik. Eşitliği çoğunlukla pozitif olduğu kısma koyarız.

Soru : $$\int_{1}^{6} |\, 2x + 2 \,| \, . \, dx = ?$$

Soru : $\int_{-1}^{7} |-12 + 4x| \, . \, dx = ?$

Soru : $\displaystyle\int_{-4}^{4} |-x+2|\,.\,dx = ?$

Soru : $\displaystyle\int_{-2}^{5} [\,|x-1|+x+3\,].dx = ?$

Soru : $\int_{0}^{2} |x^2 - 4|.dx = ?$

Soru : $$\int_{-2}^{2} \left| x^2 - 6x + 5 \right| . dx = ?$$

Soru : $$\int_{-1}^{3} \left| x^2 + 8x + 16 \right| . dx = ?$$

Belirli İntegral İle Alan Hesabı

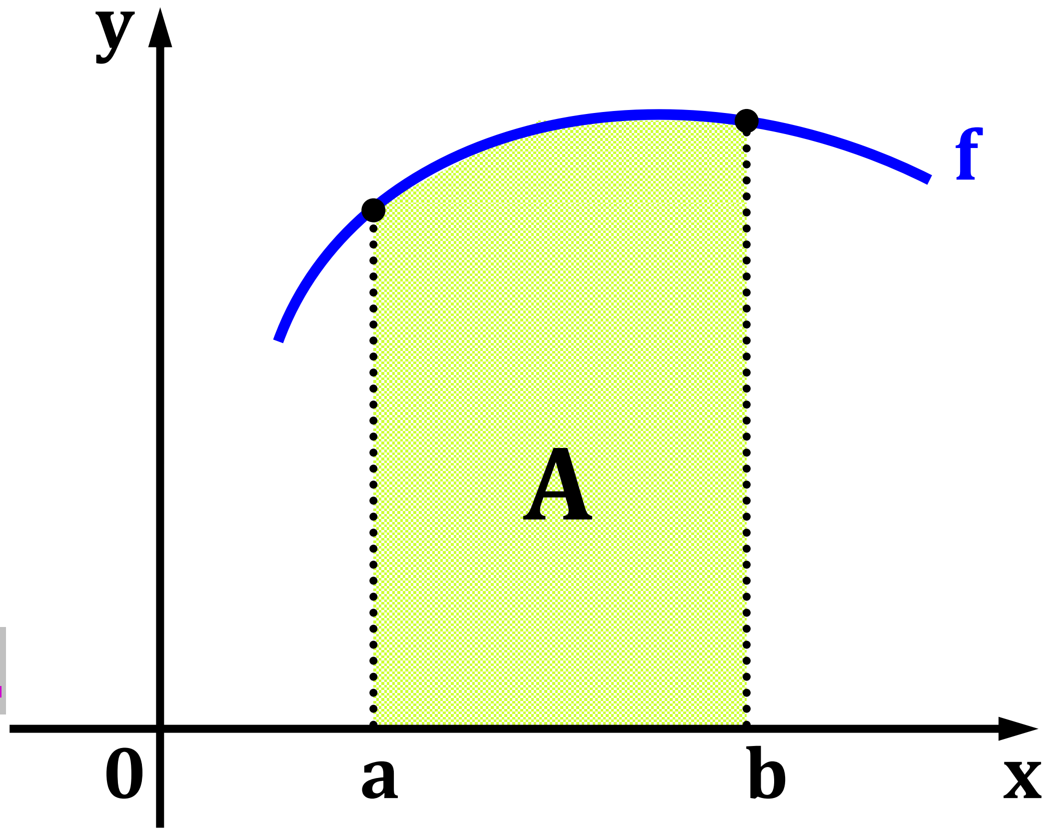
[a , b] aralığında bir f fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\int_{a}^{b} |f(x)|.dx$ integrali ile bulunur.

1) f pozitif değerli ise alan

$$A = \int_{a}^{b} f(x).dx$$

integrali ile hesaplanır.

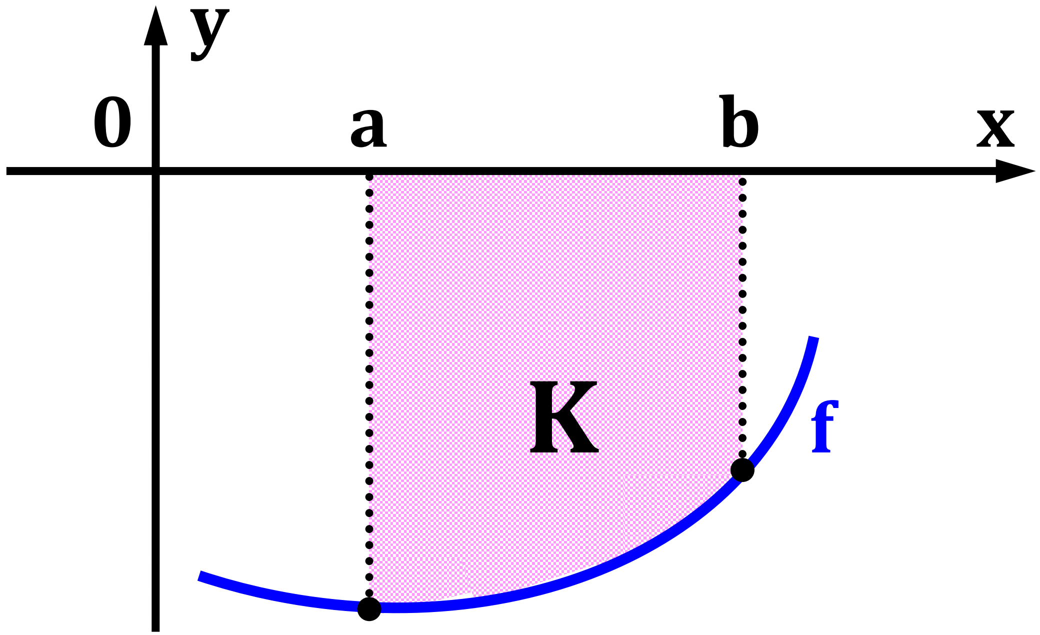
*** Alan sonucu negatif olmaz.



2) f negatif değerli ise alan

$$K = -\int_a^b f(x)\,.\,dx$$ integrali

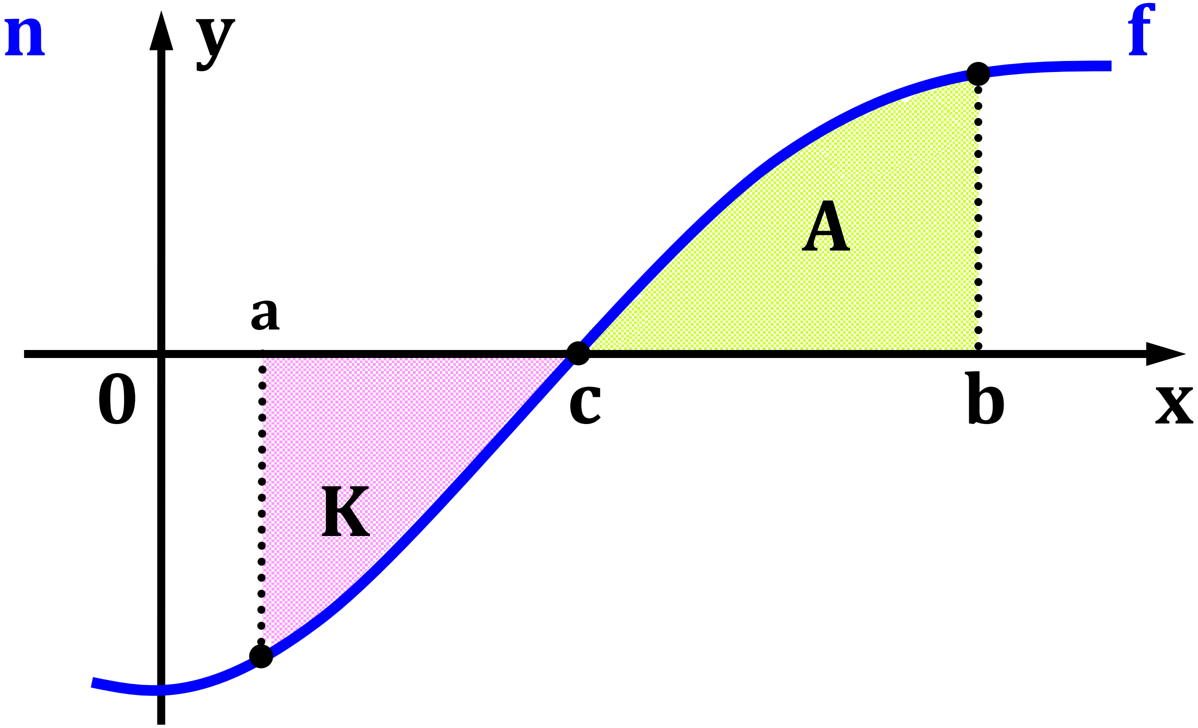
ile hesaplanır.



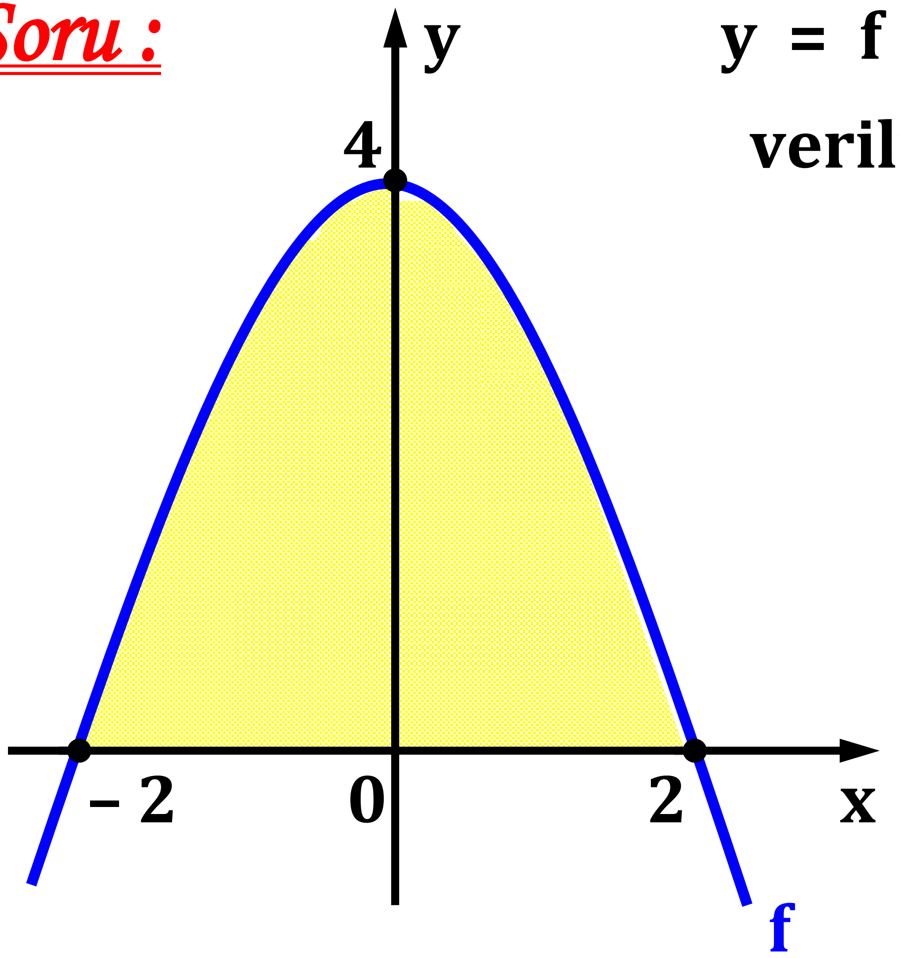
3) f hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa alan

$$A + K = \int_c^b f(x)\,.\,dx - \int_a^c f(x)\,.\,dx$$

integrali ile hesaplanır.

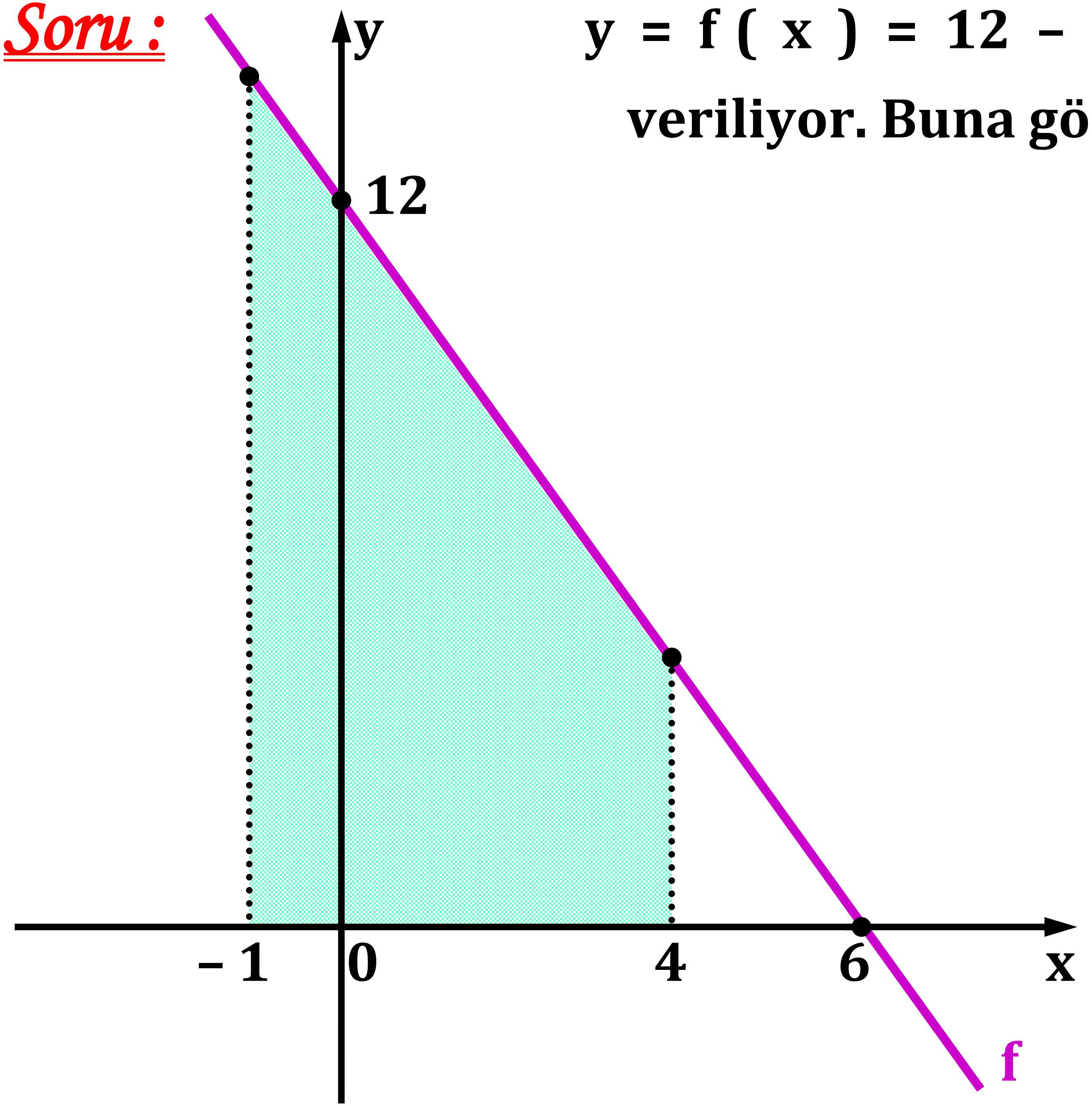


Soru :

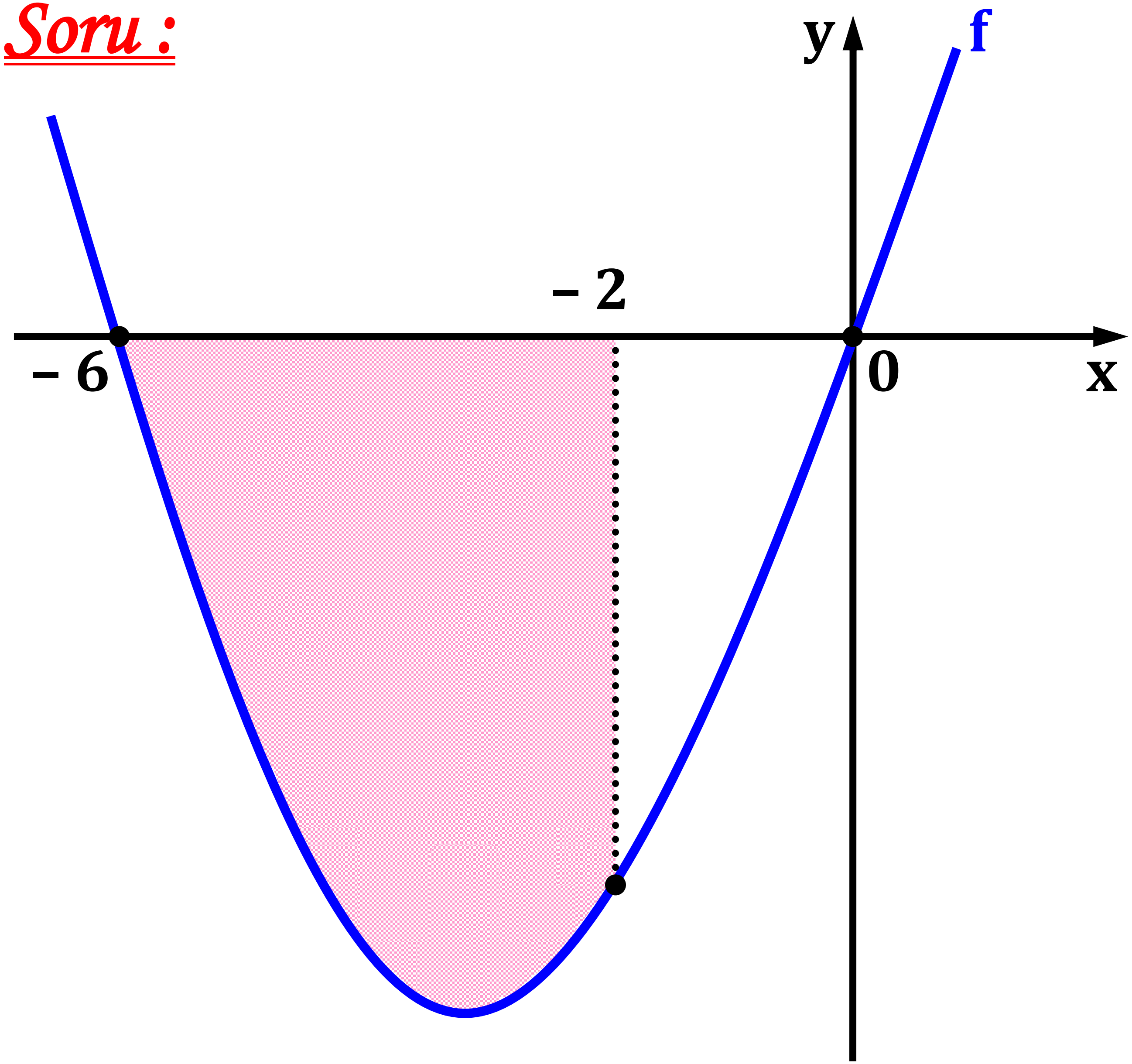


$y = f(x) = 4 - x^2$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

Soru : $y = f(x) = 12 - 2x$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

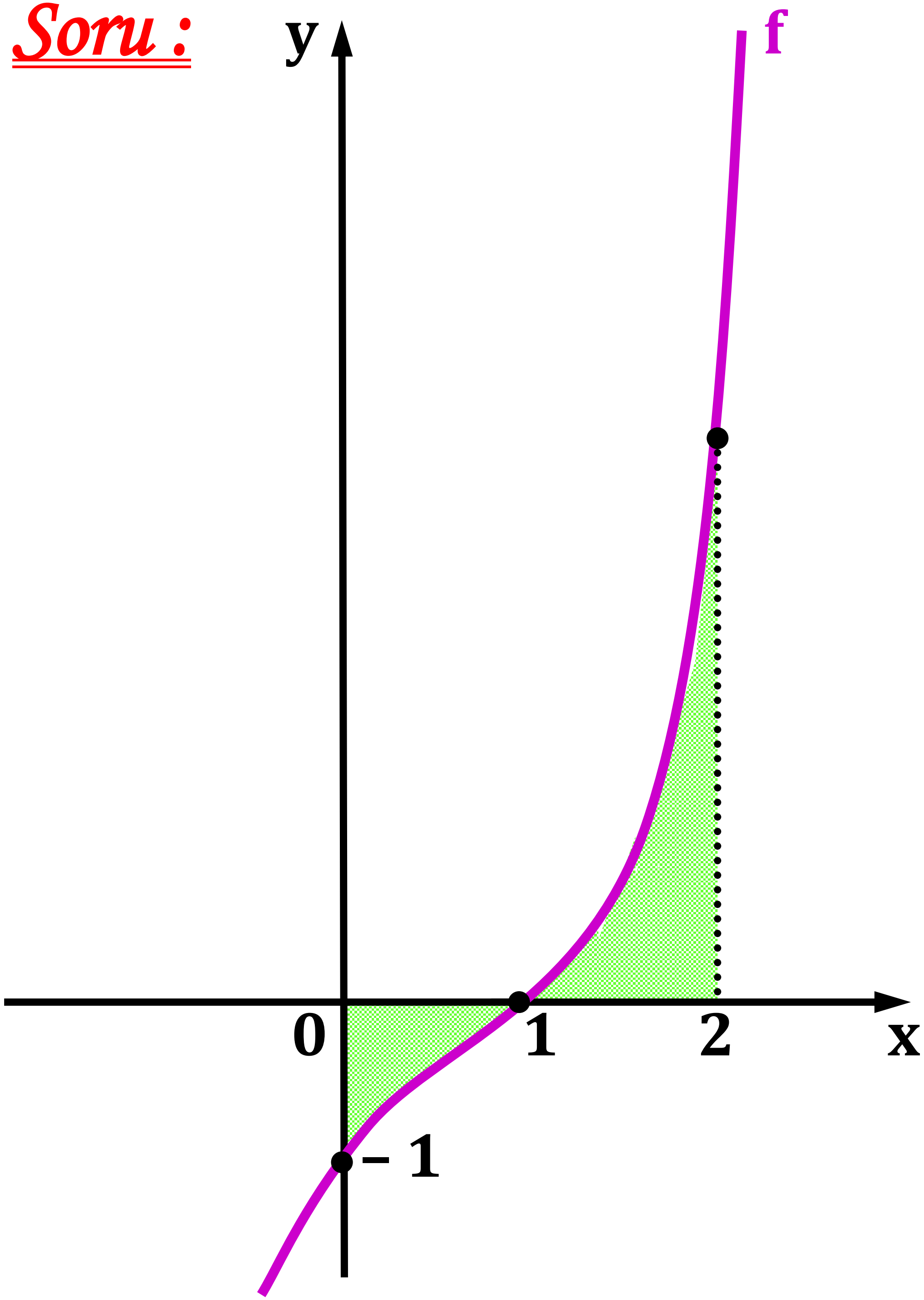


Soru :



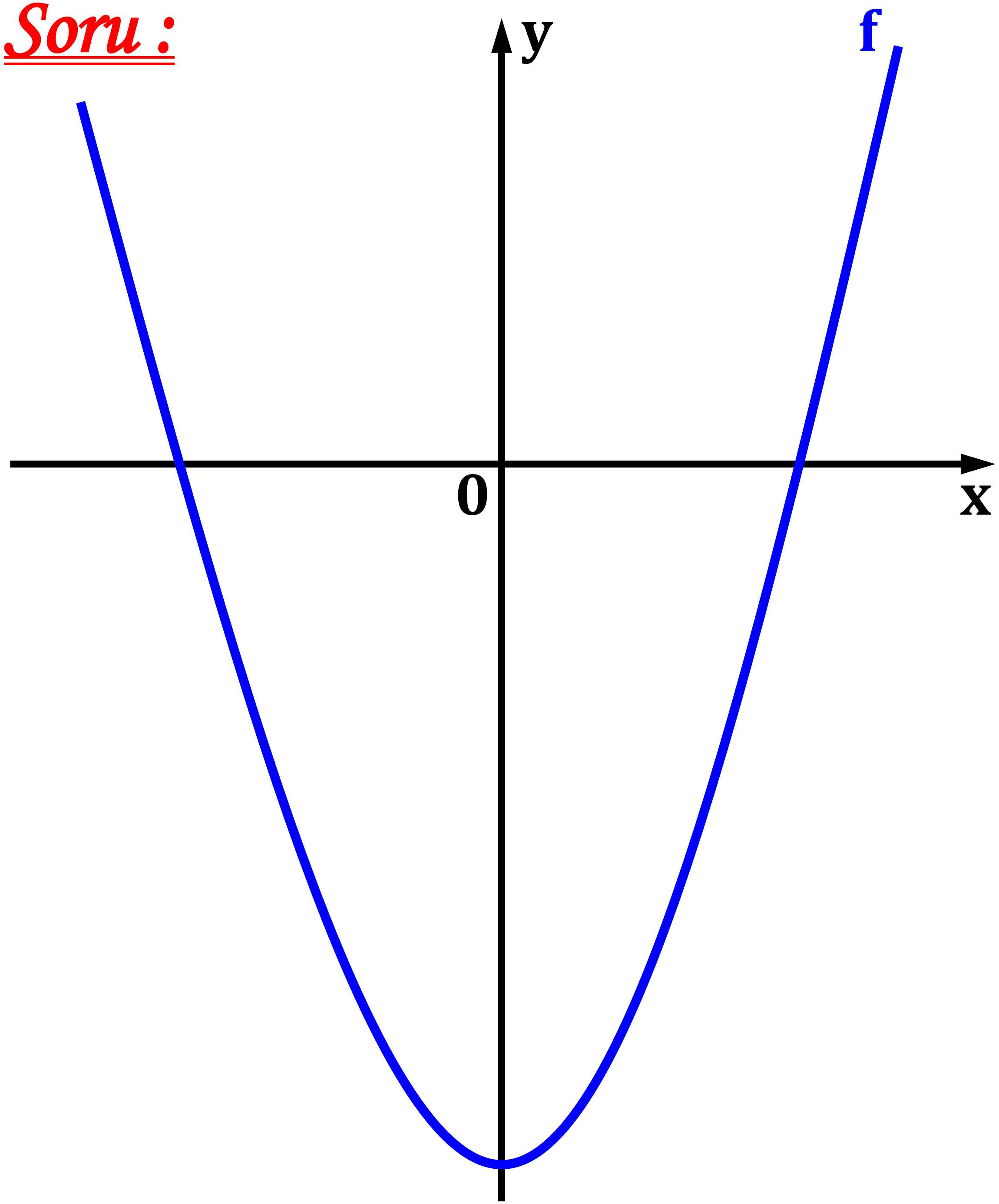
$y = f(x) = x^2 + 6x$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

Soru :



$y = f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

Soru :



$y = f(x) = x^2 - 9$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna

$$\int_{-4}^{3} |f(x)|.dx = ?$$

(Eksik noktalar bulunur ve istenen bölge taranır.)

Soru : $y = f(x) = x + 2$ **fonksiyonunun grafiği,** $x = -3$ **ve** $x = 5$ **doğruları ile** x **ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.** **(1. Yol : Çizim yapılır ve istenen bölge belirlenir. Kural uygulanır. 2. Yol : Sınırlar arasında fonksiyonun mutlak değeri alınır ve mutlak değerli integral çözümünden faydalanılır.)**

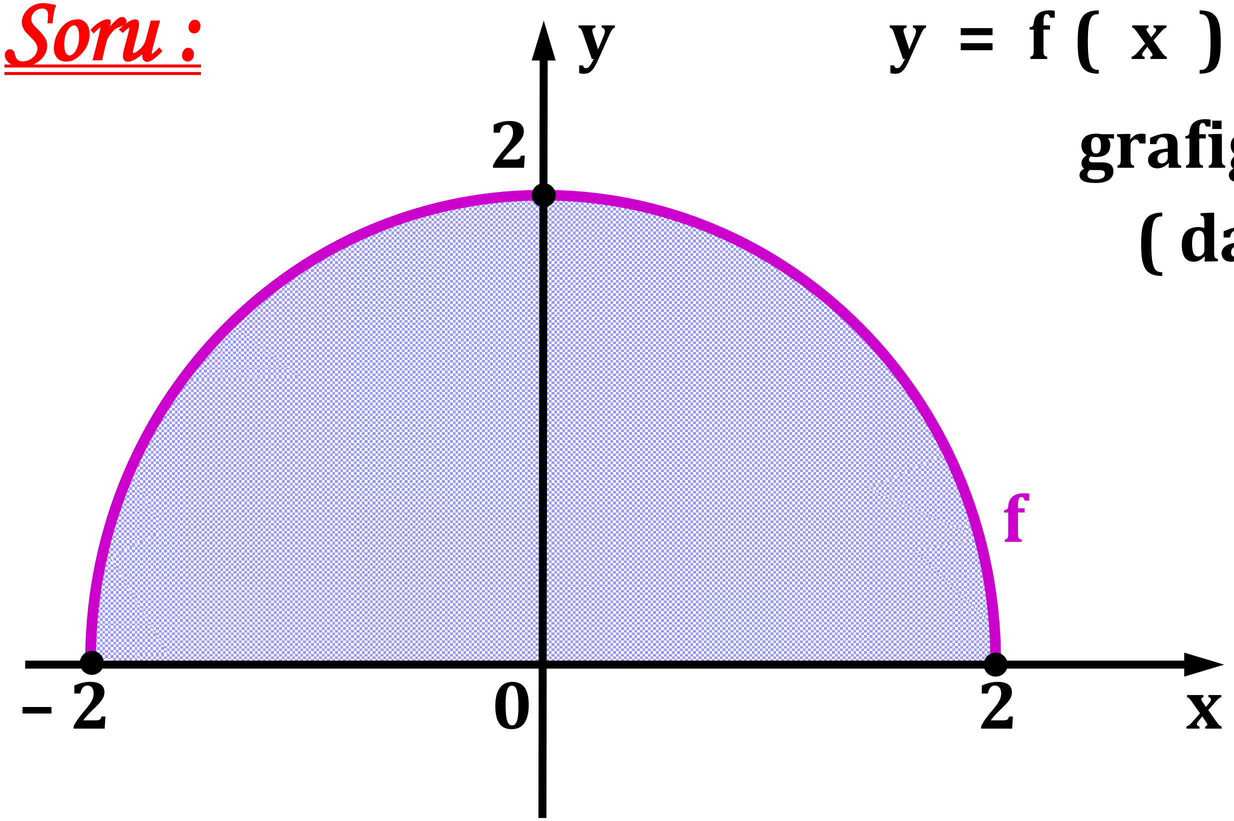
2.yol:

Soru : $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ **fonksiyonunun grafiği,** $x = -1$ **ve** $x = 4$ **doğruları ile** x **ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. **(Sınırlar verilmediyse, fonksiyonun x ekseninin kestiği noktaların apsisi integralin sınırlarıdır.)**

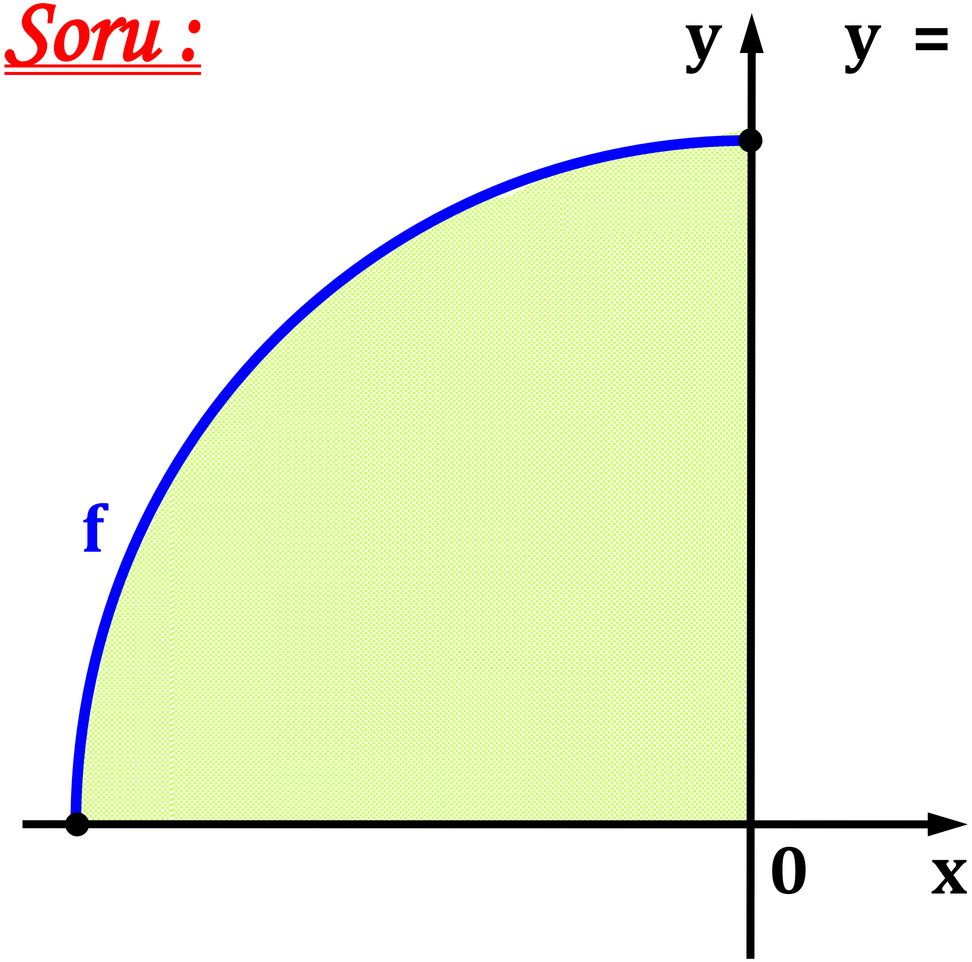
Soru : $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ **fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

Soru : $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Boyalı bölgenin (daire parçası) alanını bulunuz.



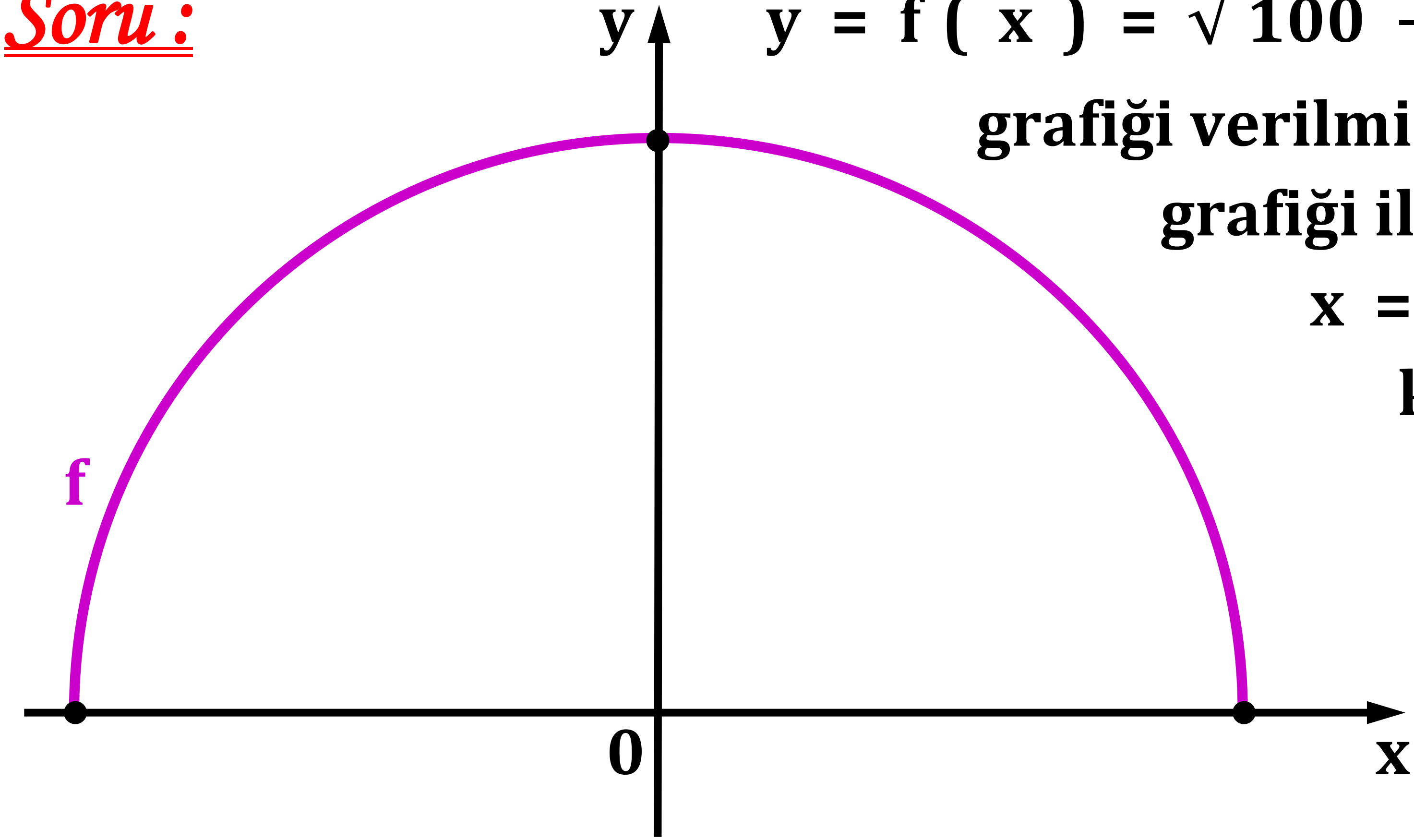
Not : İstenilen bölgenin alanı $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \, . \, dx$ integrali ile bulmak bulmak gerekir. Ama bu integralin çözümü için bilinen kurallar yeterli değildir. Bunun yerine istenilen bölgenin alanı için daire parçasının alanı formülünden yararlanılır. $\text{Alan} = \pi . r^2 . \alpha \, / \, 360^\circ$ idi.

Soru :



$y = f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ **fonksiyonunun grafiğinin bir parçası verilmiştir. Bu daire parçasının alanını bulunuz.**

Soru :



$y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni ve $x = 0$, $x = 5$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

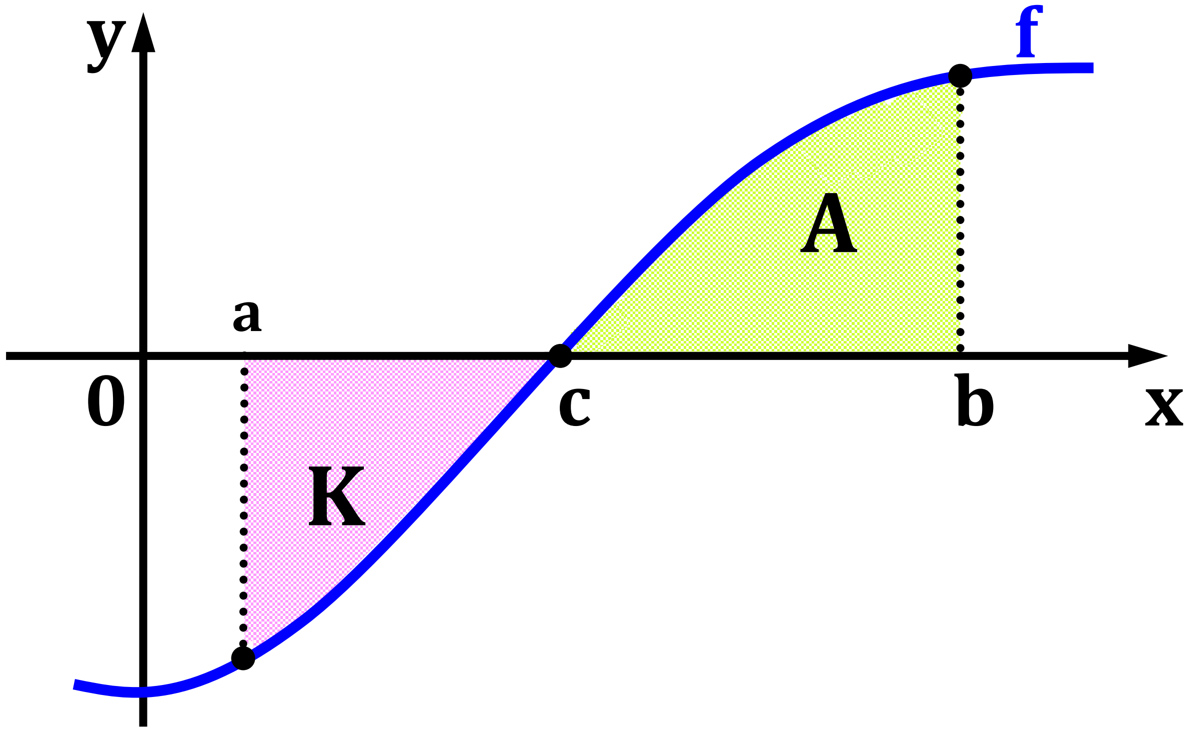
(İstenilen bölge iki kısma ayrılır. Birinin alanı daire parçası alanından, diğerinin alanı ise üçgenin alanından elde edilir.)

Not : f hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa

boyalı bölgenin alanı

$$A + K = \int_a^b |f(x)|.dx$$

integrali ile hesaplanır.

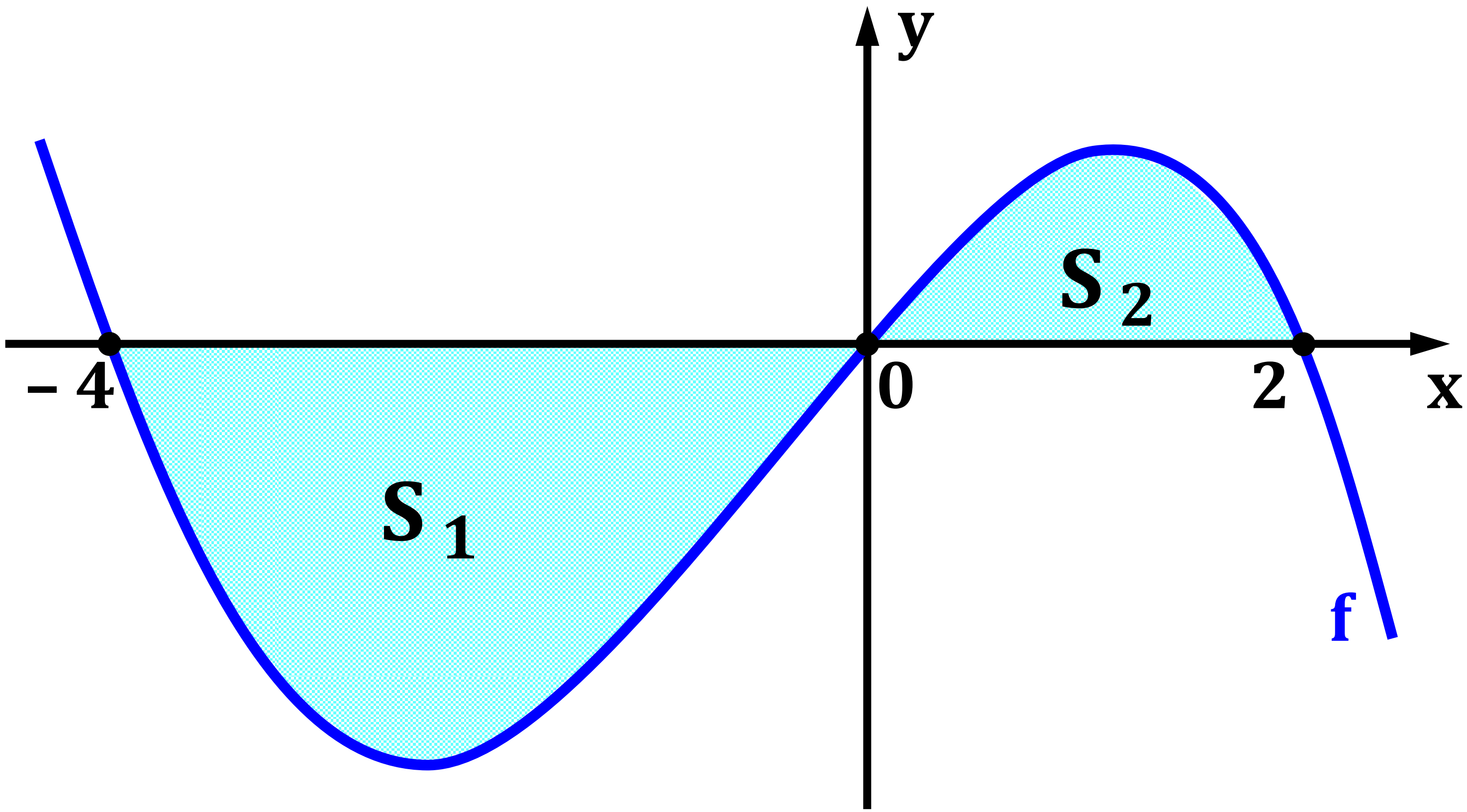


*** Alan <u>istenmezse</u> integralin değeri $\int_a^b f(x).dx = A - K$ olarak alınır.

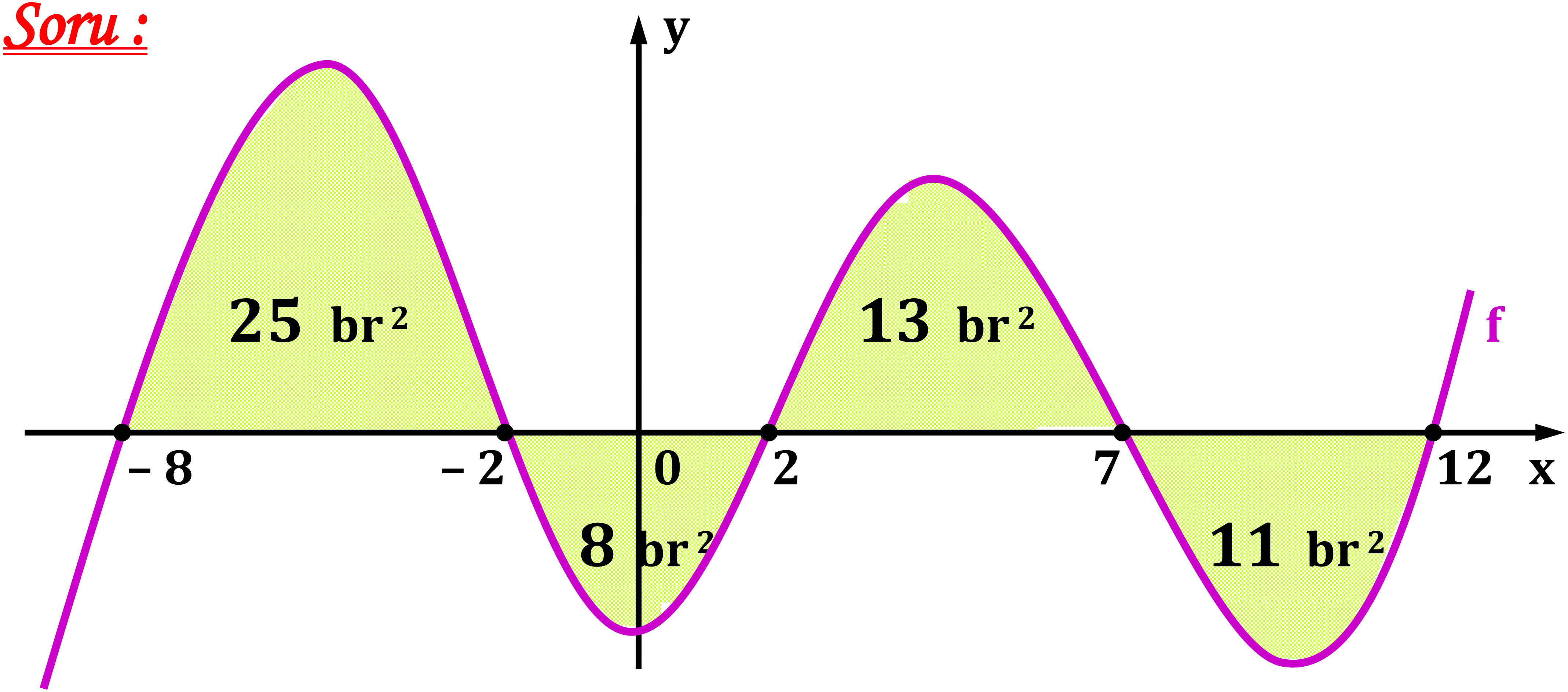
x ekseninin üstündeki bölgelerin alanı toplanır. x ekseninin altında kalan kısmın alanı ise çıkartılır.

Soru : S_1 ve S_2 bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

$$\int_{-4}^{2} f(x)\,.\,dx = -7 \quad \text{ve} \quad \int_{-4}^{2} |\,f(x)\,|\,.\,dx = 15 \quad \text{ise} \quad S_1 = \,?$$



Soru :



Grafikte boyalı bölgelerin alanları verilmiştir. Buna göre alttaki integrallerin sonucunu bulunuz.

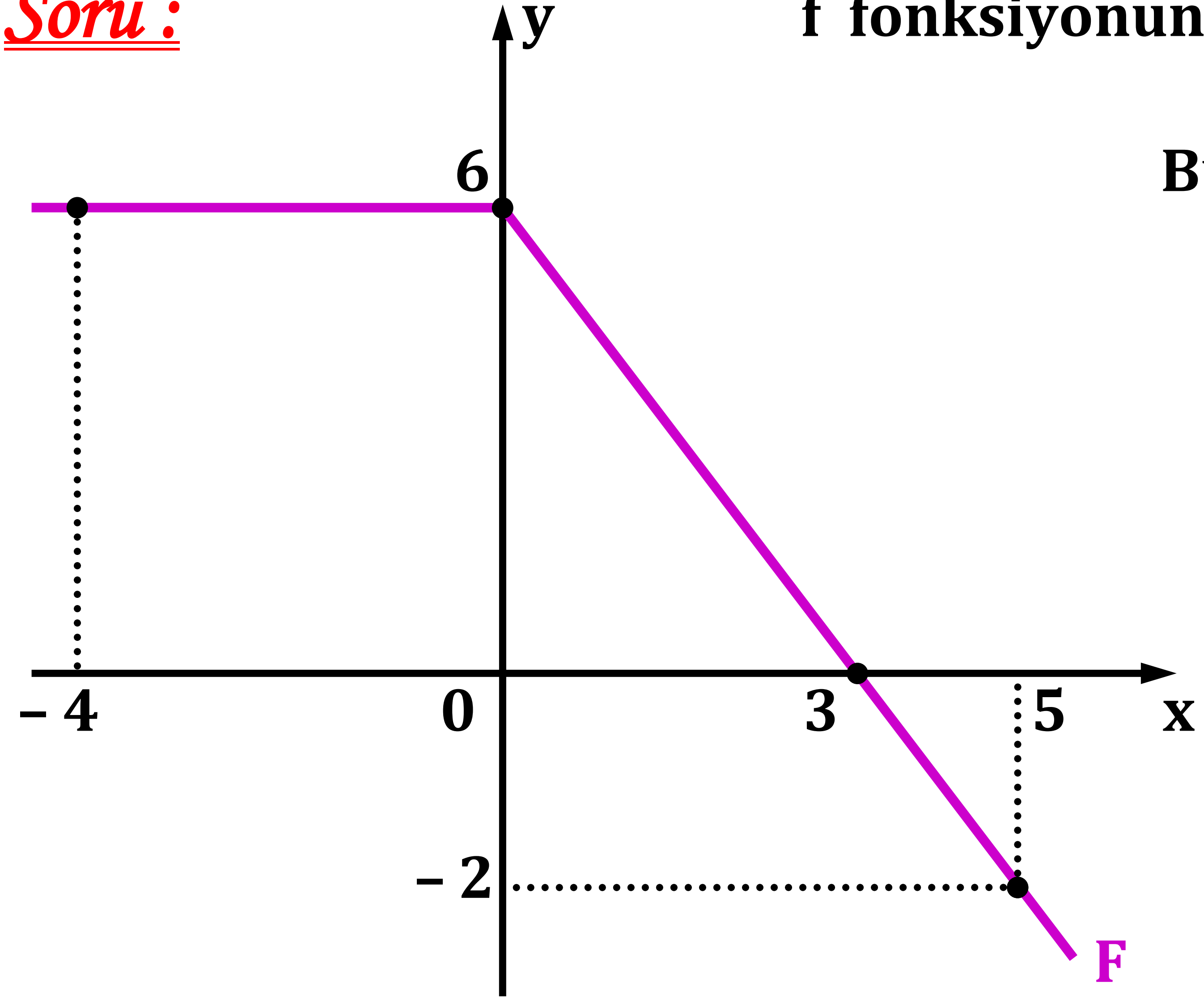
A) $\displaystyle\int_{-8}^{12} f(x)\,.\,dx = ?$

B) $\int_{-8}^{12} | f(x) | . dx = ?$

C) $\int_{-8}^{2} | f(x) | . dx + \int_{-2}^{12} f(x) . dx = ?$

D) $\int_{-8}^{7} f(x) . dx - \int_{2}^{12} f(x) . dx = ?$

Soru :

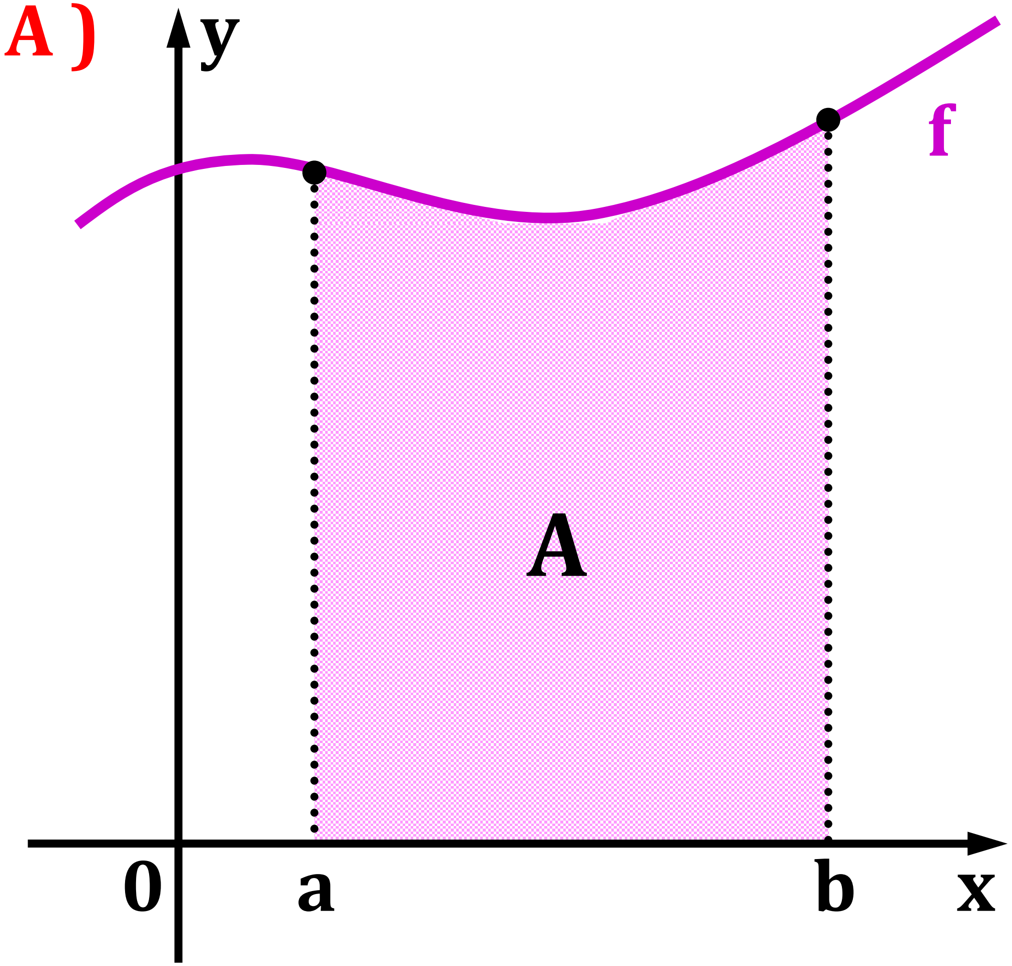


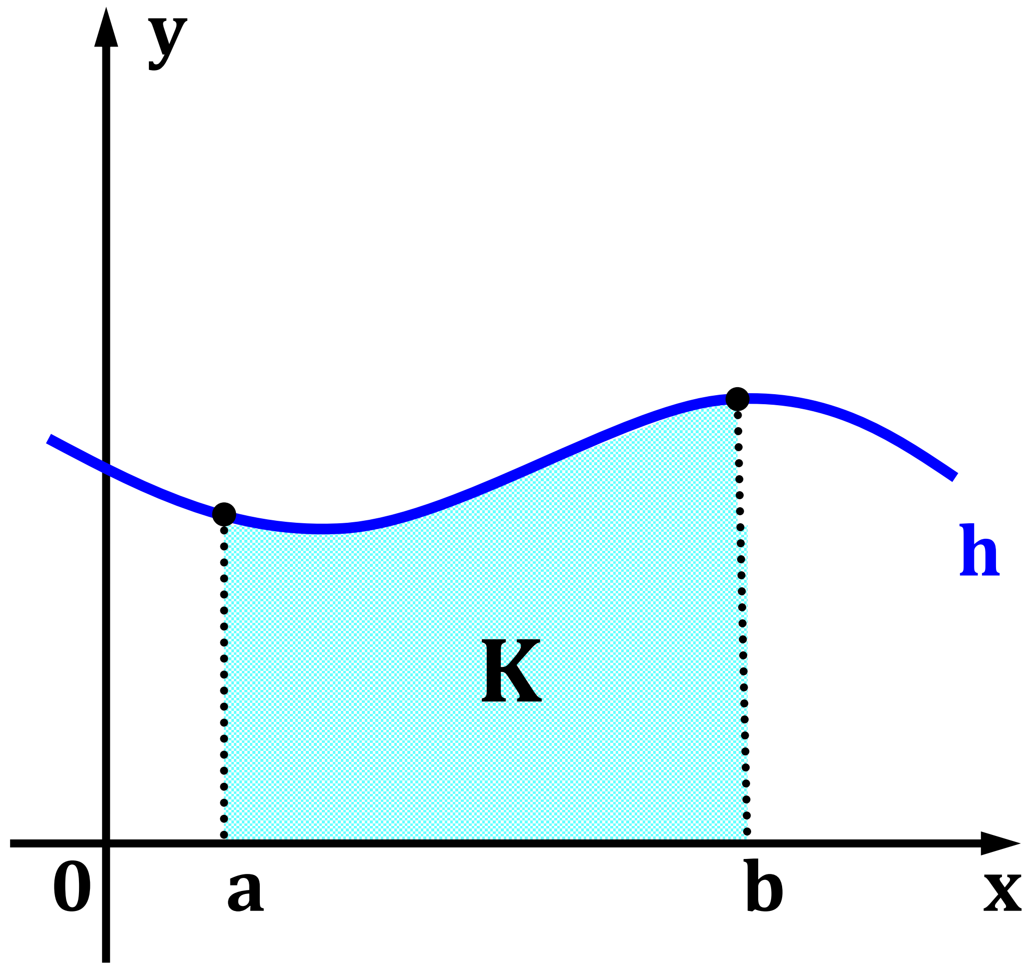
f fonksiyonunun grafiği yanda veriliyor.

Buna göre $\int_{-4}^{5} f(x)\,.\,dx = ?$

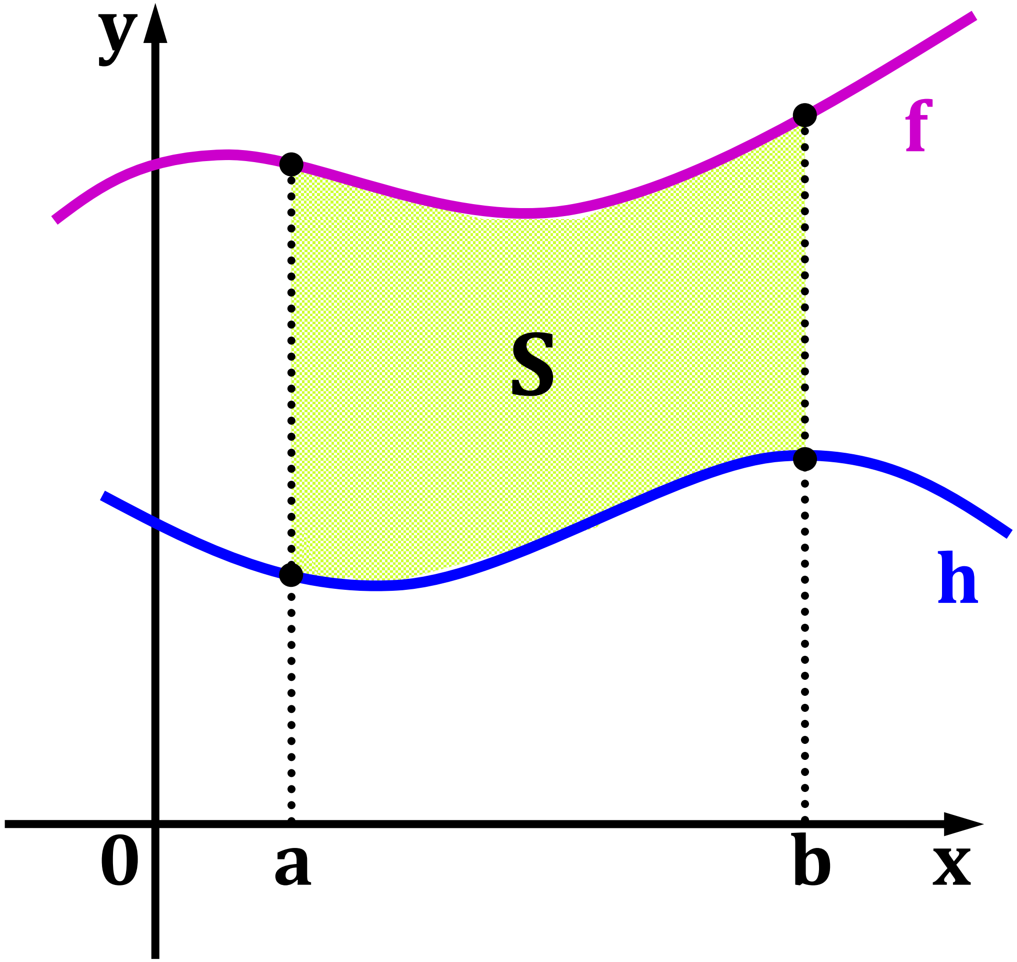
İki Fonksiyonun Grafiği Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanı

A)





f ve h fonksiyonunun grafikleri verilsin. x ekseni ve x = a , x = b doğruları arasındaki kalan bölgelerin alanları A ve K br ^{2} olsun.



f ile h fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$ ile $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı S br^2 olsun.

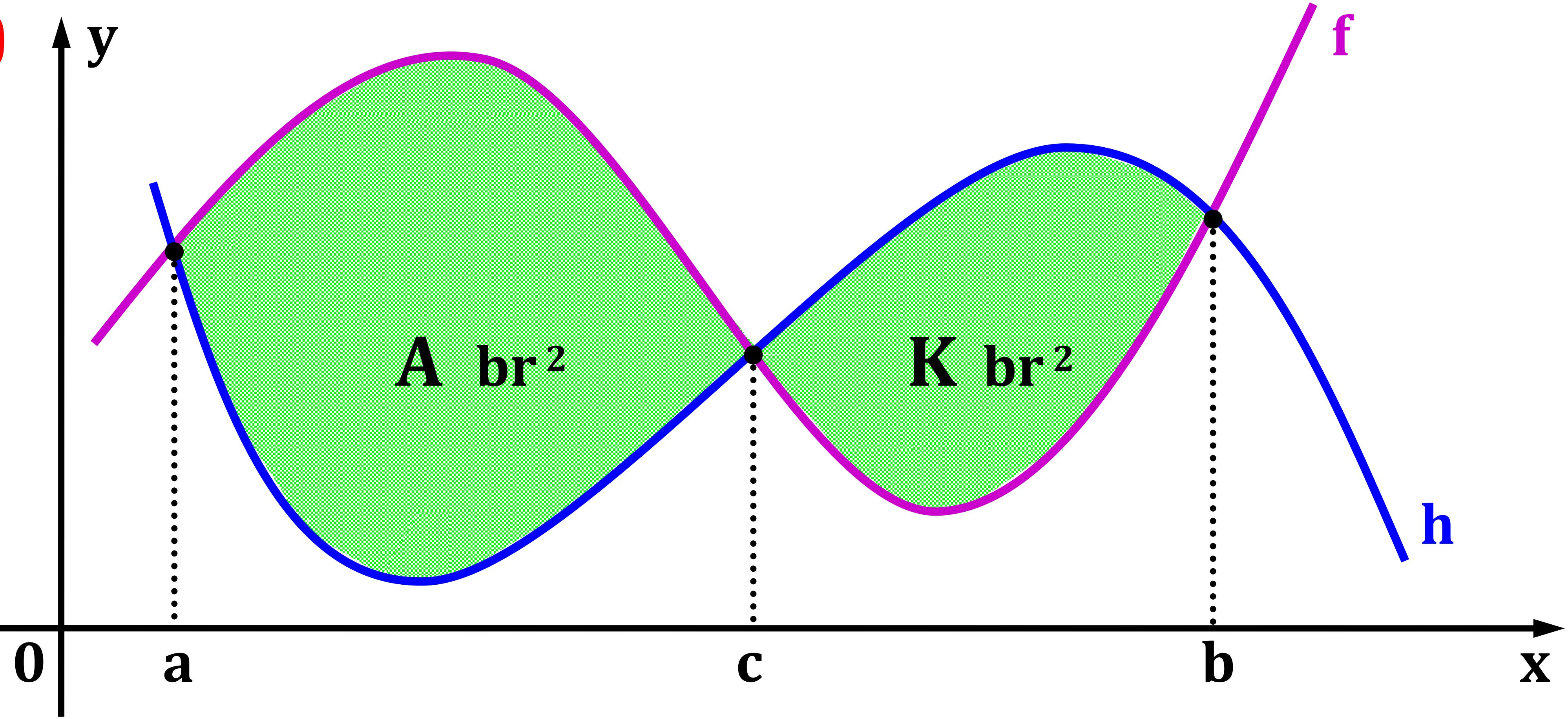
$S = A - K$ olarak bulunur.

$$A = \int_a^b f(x).dx$$ ve

$$K = \int_a^b h(x).dx$$ olduğundan $$S = \int_a^b [f(x) - h(x)].dx$$

olur. **Ara bölgenin alanını bulmak için, üstteki fonksiyonun denkleminden alttaki fonksiyonun denklemi çıkartılırak integrali alınır.**

B)



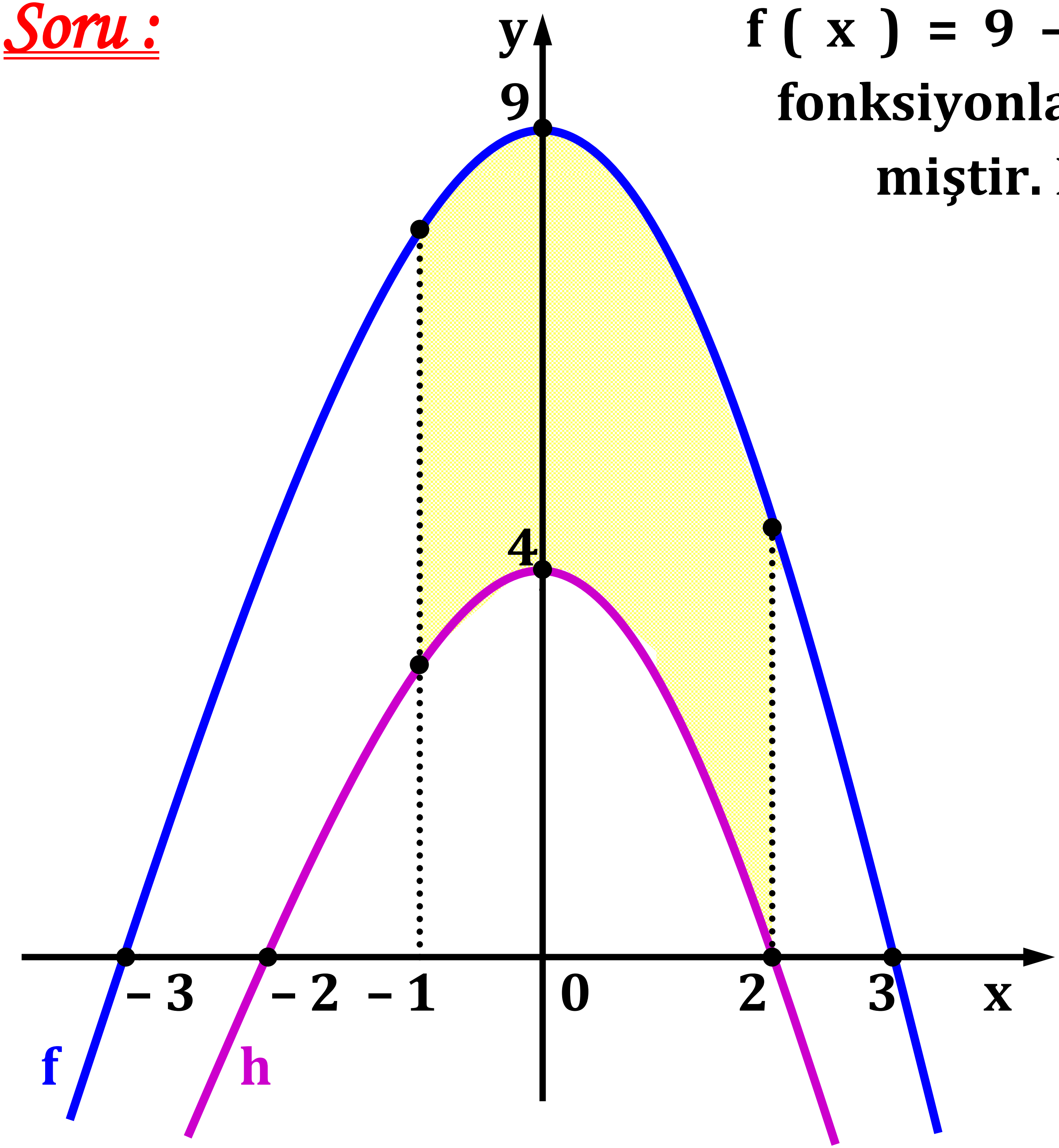
[a , b] aralığında boyalı bölgenin alanı,

Alan = A + K

$$= \int_a^c [\, f(x) - h(x)\,].dx + \int_c^b [\, h(x) - f(x)\,].dx$$

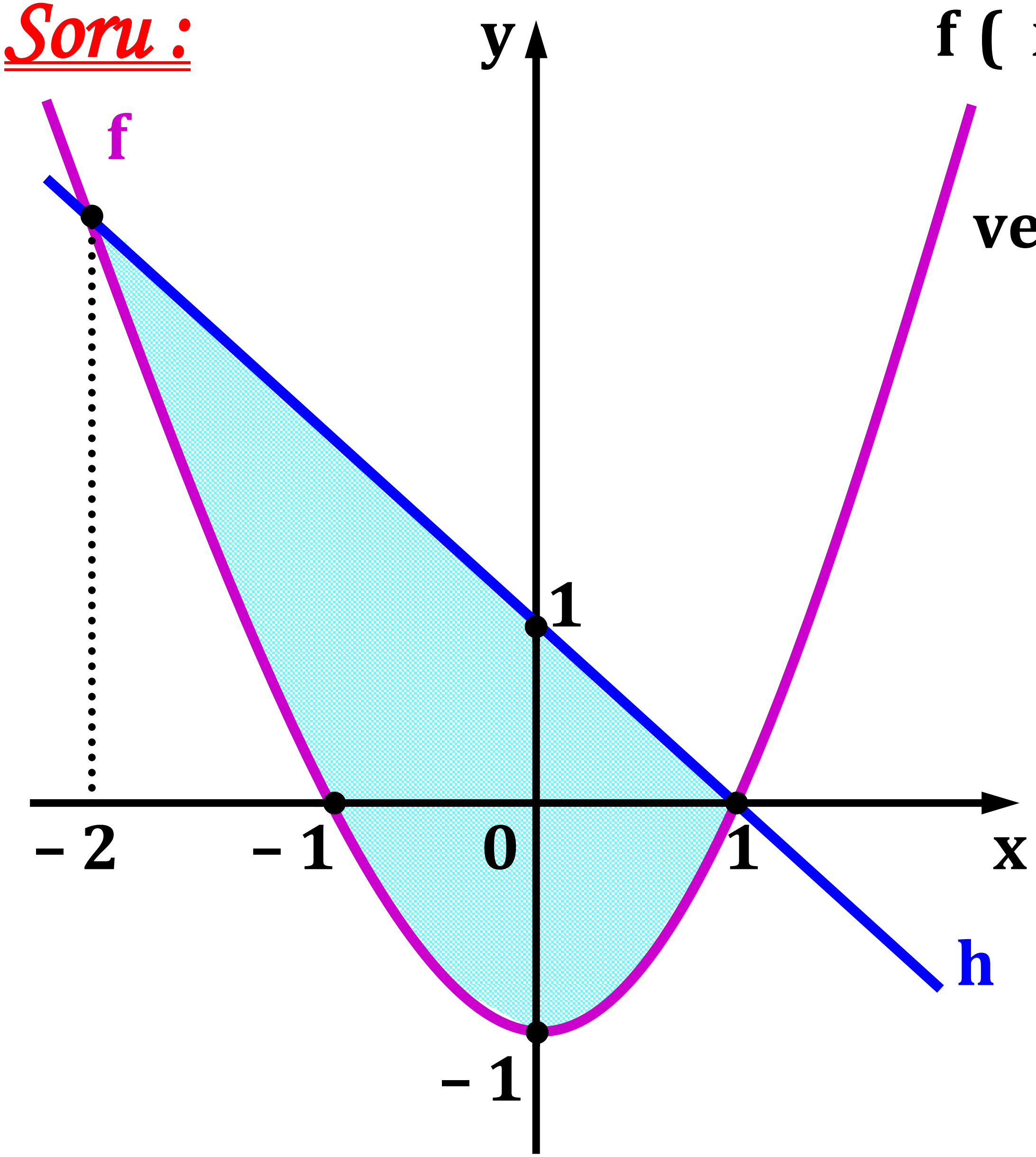
olarak bulunur.

Soru :



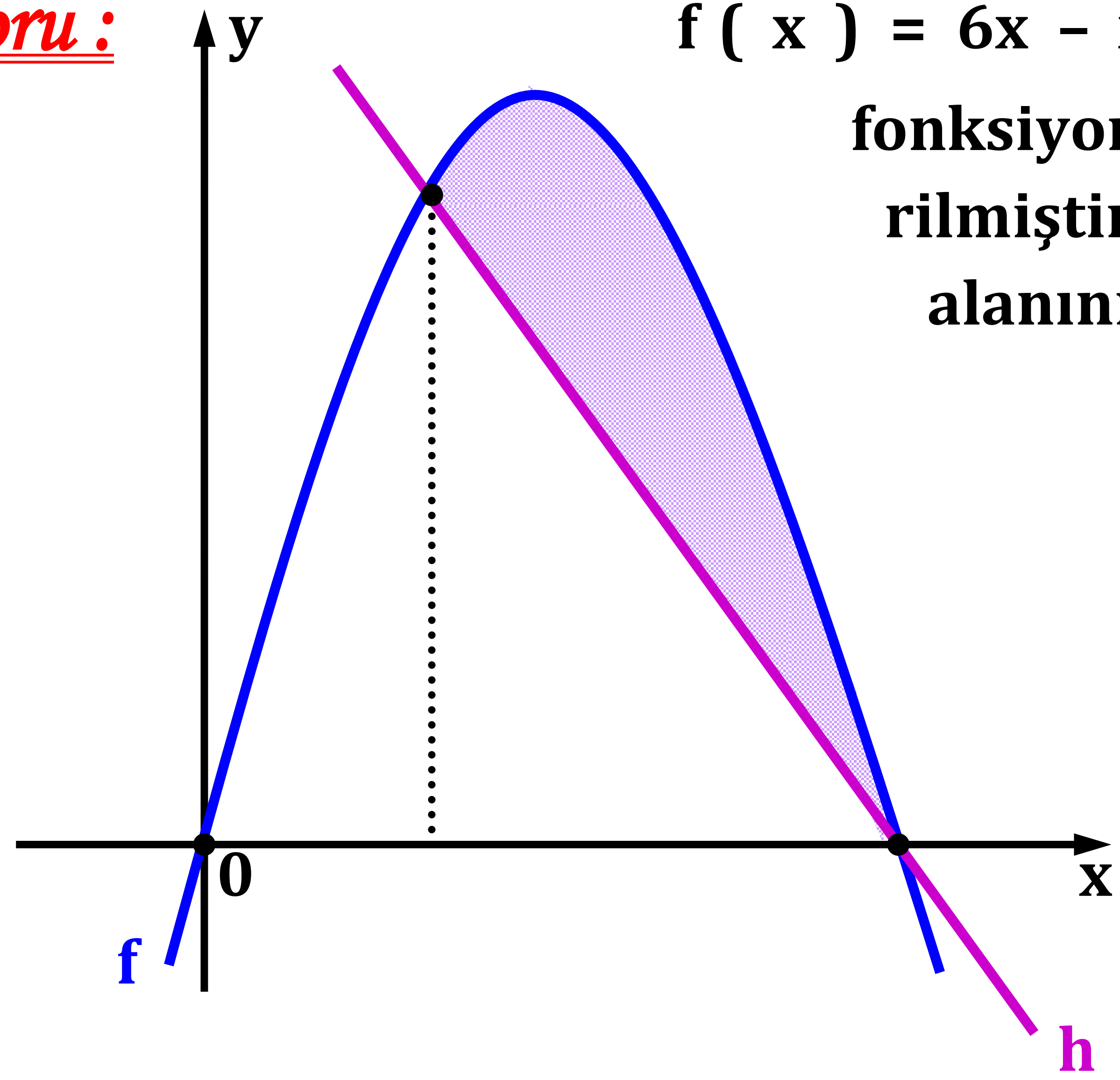
$f(x) = 9 - x^2$ ve $h(x) = 4 - x^2$ fonksiyonların grafikleri yanda verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

Soru :



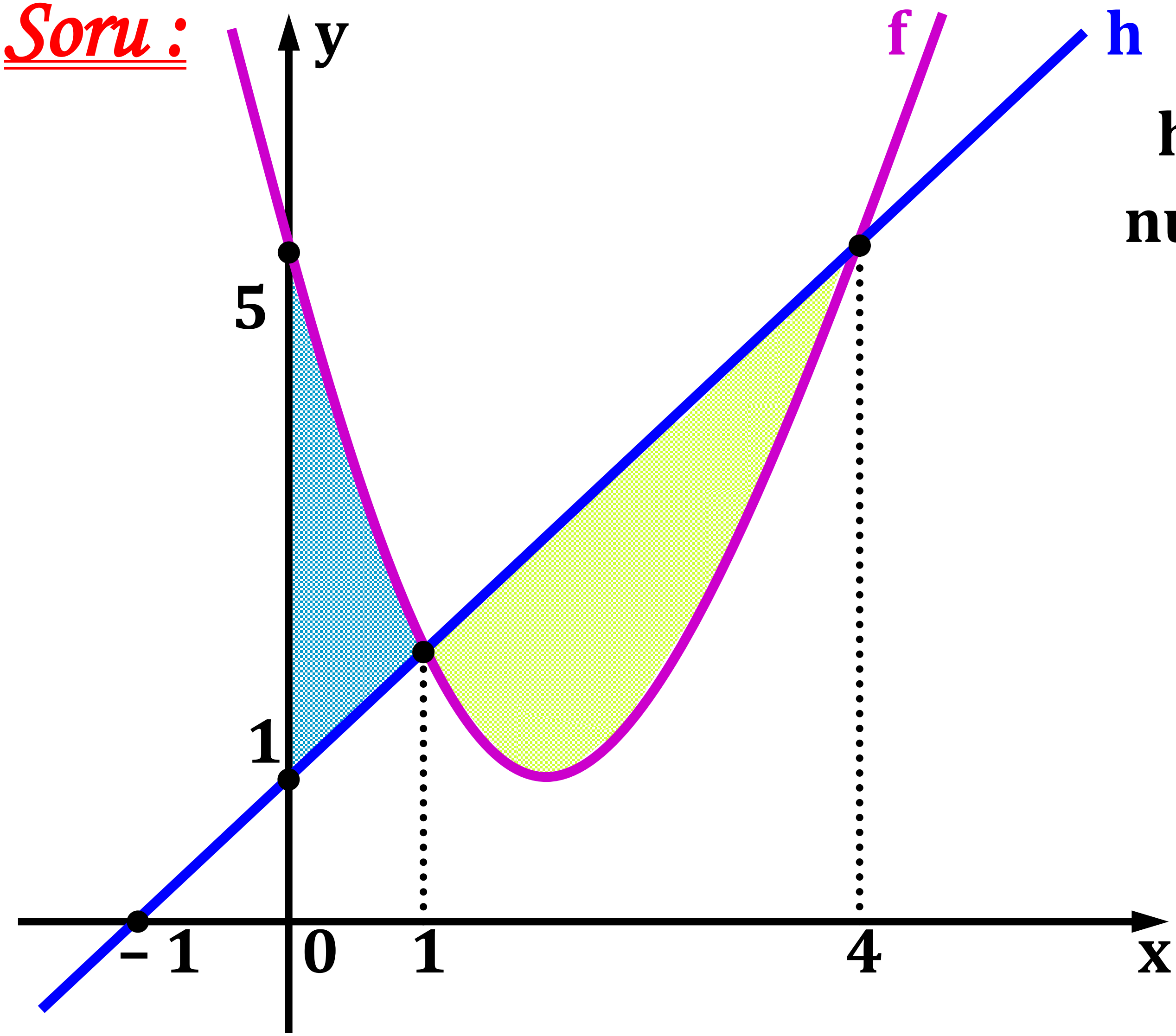
$f(x) = x^2 - 1$ ve $h(x) = 1 - x$ fonksiyonlarının grafikleri yanda veriliyor. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

Soru :



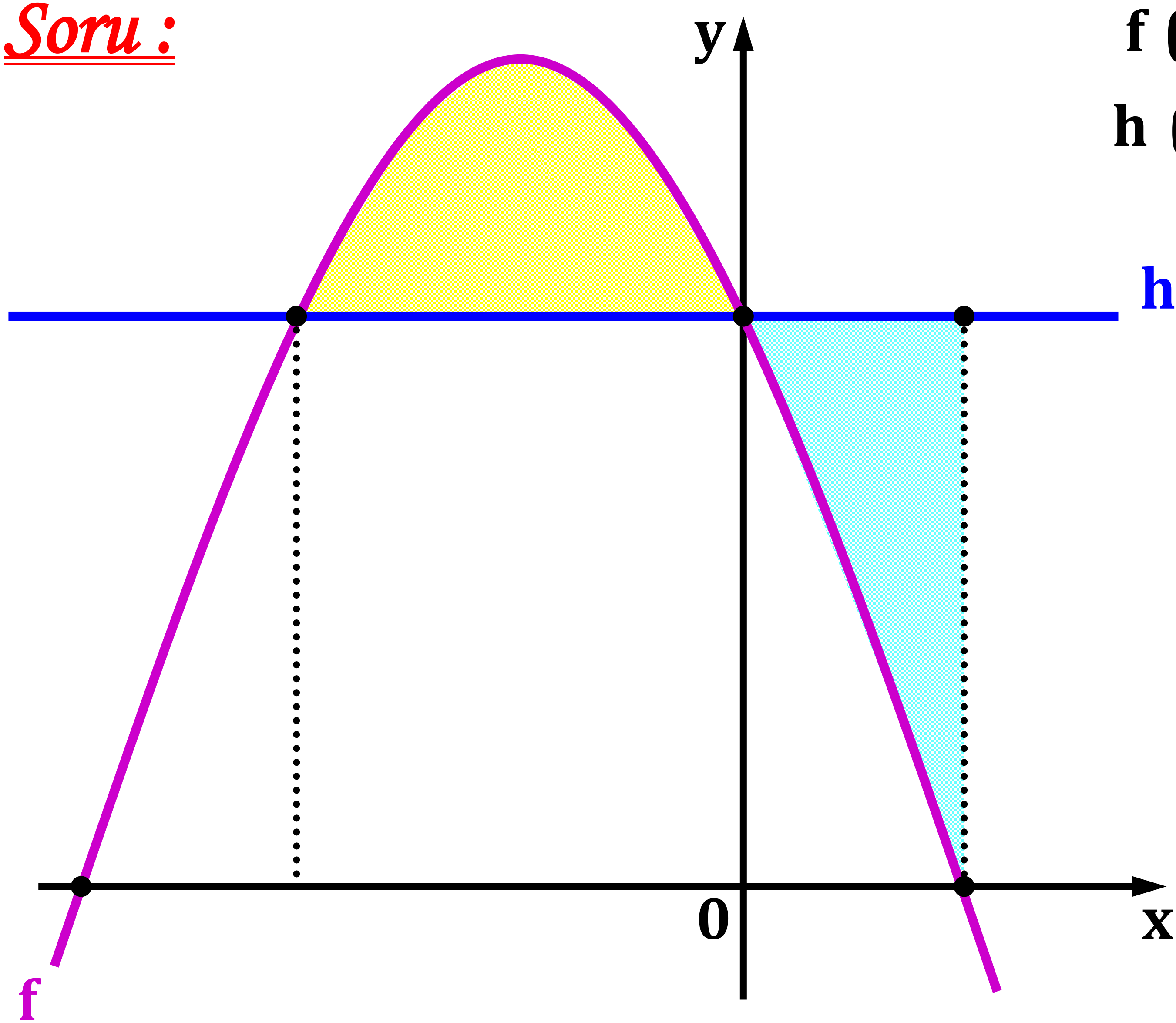
$f(x) = 6x - x^2$ ve $h(x) = -2x + 12$ fonksiyonlarının grafikleri yanda verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz. **(Önce ortak çözümden noktalar bulunur.)**

Soru :



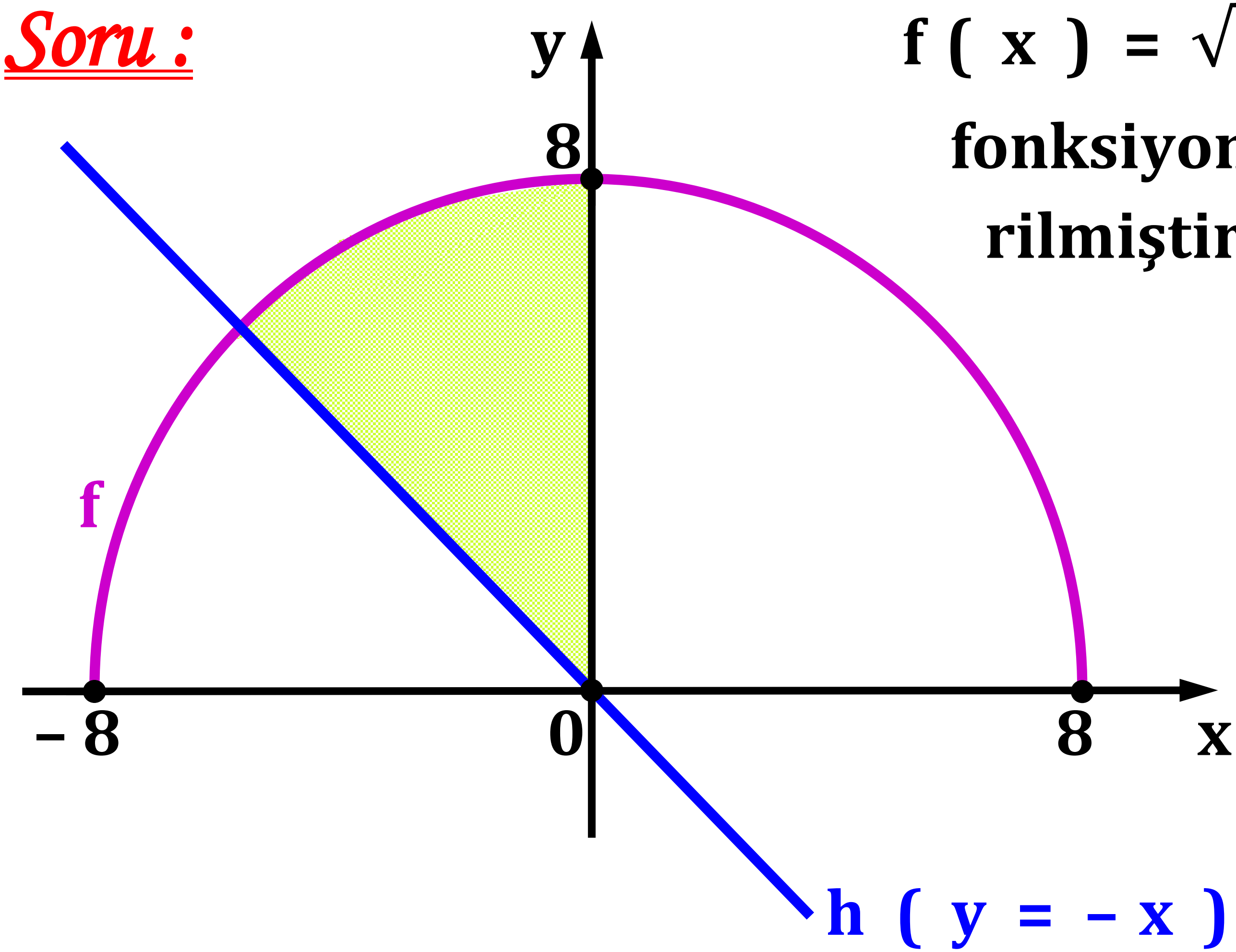
$f(x) = x^2 - 4x + 5$ ve $h(x) = x + 1$ fonksiyonunun grafikleri yanda veriliyor. Buna göre boyalı bölgelerin alanları toplamını bulunuz.

Soru :



$f(x) = -x^2 - 2x + 3$ ve $h(x) = 3$ fonksiyonunun grafikleri yanda $h\,(y = 3)$ verilmiştir. Buna göre Boyalı bölgelerin alanları toplamını bulunuz.

Soru :



$f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ ve $h(x) = -x$ fonksiyonlarının grafikleri yanda verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanını bulunuz.

(Alanı fonksiyonların farkının integralinden bulmak bilinen kurallarla mümkün değildir. Bu yüzden daire parçasının alanı kullanılır.)

Soru : $y = x^2$ ile $y = 2 - x$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. (**1. yol :** Grafikler çizilir ve ortak kesim noktalarının apsisleri bulunur. Sınırlı bölgenin alanı için kural uygulanır. **2. yol :** Fonksiyonların ortak kesim noktalarının apsisleri bulunur. Kimin üstte kimin altta kaldığı bilinmediği için farkın mutlak değeri alınır. Yani alan $\int_a^b | f(x) - h(x) | . dx$ integrali ile bulunur.)

2. yol :

Soru : **$y = 3x$ ile $y = -x^2 + 4x$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 7. ANALİTİK GEOMETRİ

12. 7. 1. Çemberin Analitik İncelenmesi

Terimler ve Kavramlar : Çemberin genel denklemi, çemberin standart denklemi

Sembol ve Gösterimler : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

12. 7. 1. 1. Merkezi ve yarıçapı verilen çemberin denklemini oluşturur.

A) M (a , b) merkezli ve r yarıçaplı çemberin standart denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ yardımıyla çemberin genel denklemi $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ şeklinde elde edilir.

B) $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminin hangi durumlarda çember oluşturduğu gösterilir.

C) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

12. 7. 1. 2. Denklemleri verilen doğru ile çemberin birbirine göre durumlarını belirleyerek işlemler yapar.

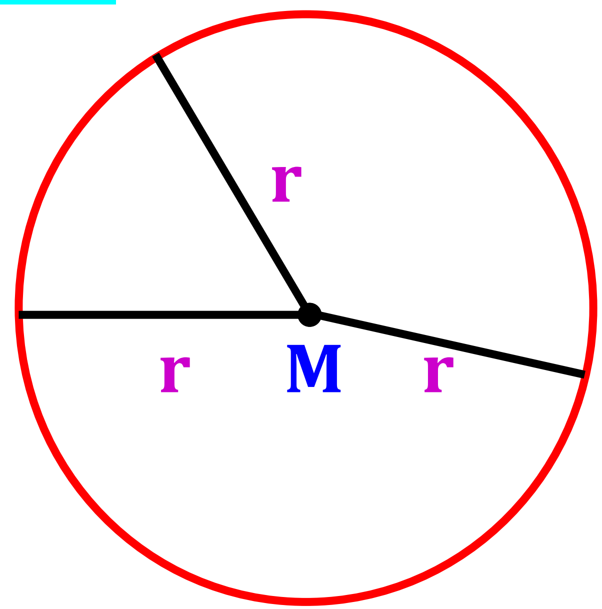
A) Doğru ile çemberin varsa kesişim noktaları bulunur.

B) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

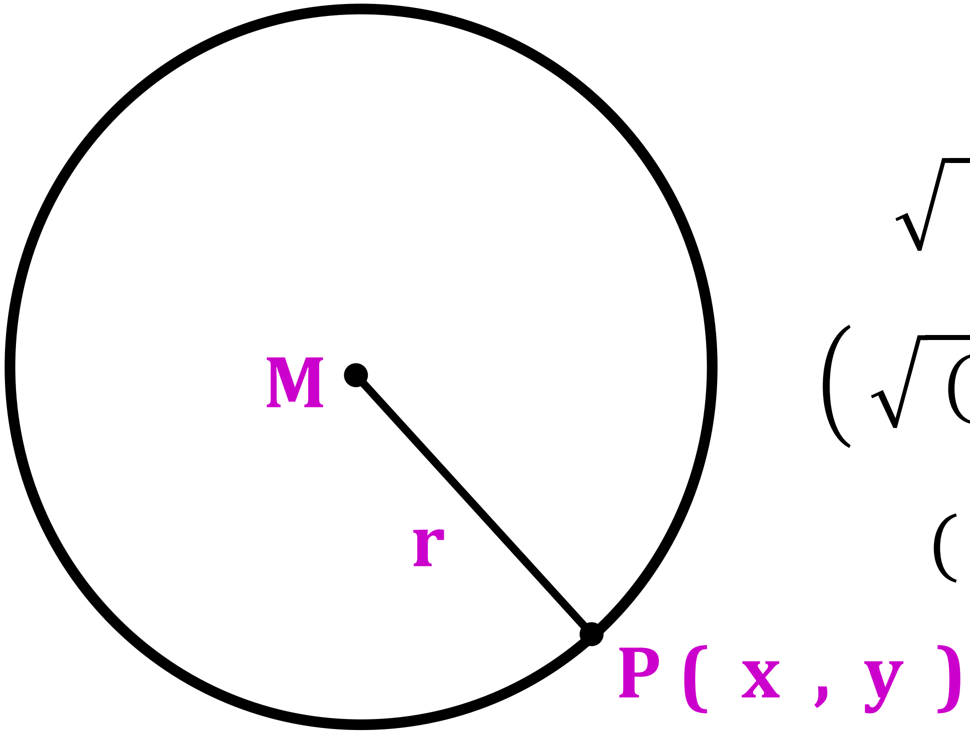
7. ÜNİTE : ANALİTİK GEOMETRİ

Çemberin Analitik İncelenmesi

Hatırlatma : Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine " çember ", sabit noktaya " çemberin merkezi " (M) ve çember üzerindeki bir noktanın çemberin merkezine olan uzaklığa da " çemberin yarıçapı " (r) adı verilirdi.



Tanım : Analitik düzlemde $M(a, b)$ merkezli bir çember alalım. Çember üzerindeki herhangi bir nokta $P(x, y)$ olsun. M ile P noktaları arası uzaklık yarıçapı verir.



$$|MP| = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

olarak bulunur.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ denklemine çemberin " standart denklemi " adı verilir.

$M(a, b)$ merkez nokta, r ise yarıçapı verir.

Soru : **Altta standart denklemi verilen çemberlerin merkez noktalarını ve yarıçaplarını bulunuz.**

A) $(x-5)^2+(y+2)^2=16$

B) $(x-1)^2+(y-6)^2=72$

C) $y^2 + (x + 8)^2 = 81$

D) $x^2 + y^2 = 450$

Soru : **O (4 , – 9) noktasına 11 br mesafede bulunan noktaların oluşturduğu çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **Merkezi $M(-5, 2)$ noktası olan ve $K(0, 14)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.**

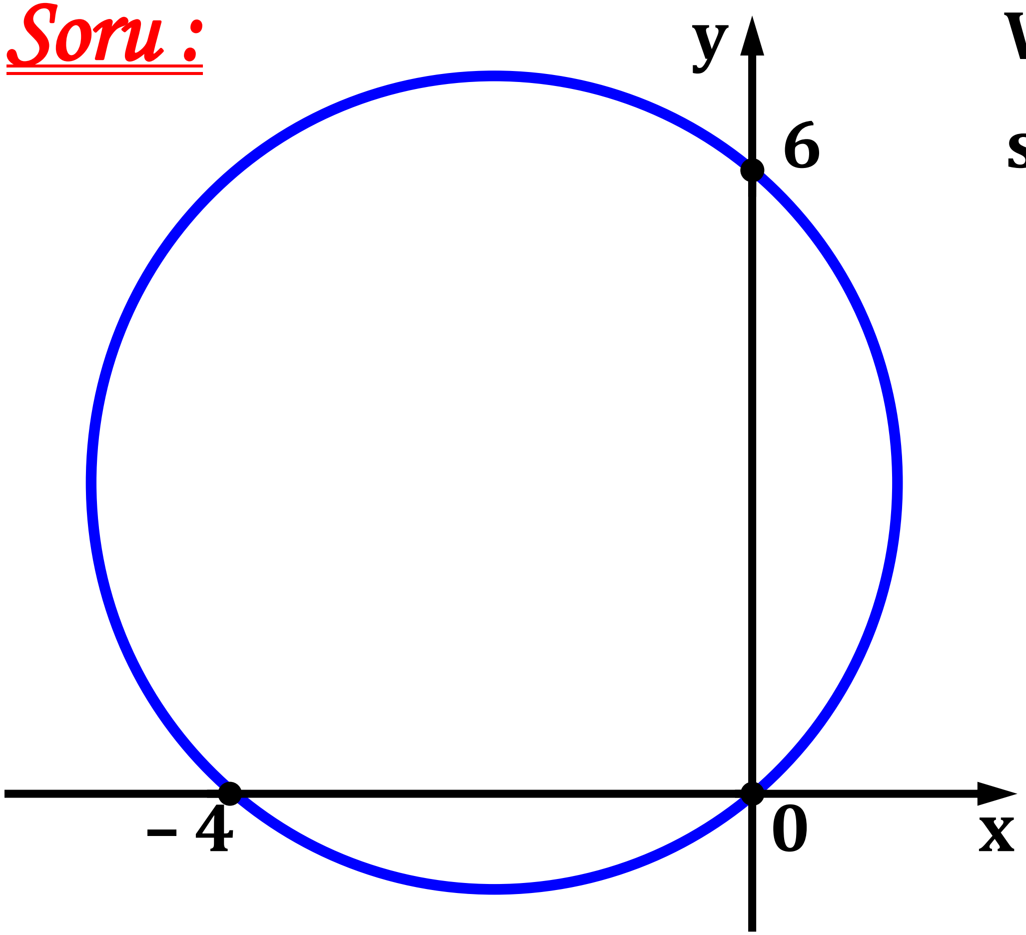
Soru : **Merkezi M (4 , 1) noktası olan ve T (1 , – 5) noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **A (– 4 , 18) ve B (2 , 10) noktalarından geçen ve çapı [AB] doğru parçası olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **A (5 , 2) ve B (– 3 , 10) noktalarından geçen ve <u>çapı</u> [AB] doğru parçası olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **$4x + 3y - 24 = 0$ doğrusunun eksenleri kesen noktaları A ve B ’dir. [AB] doğru parçasını çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru :



Verilen noktalardan geçen çemberin standart denklemini bulunuz. (Çapı gören çevre açı 90° idi.)

Soru : **Standart denklemi $(x+5)^2+(y-3)^2=4$ olan çemberi analitik düzlemde çiziniz.**

Soru : **Standart denklemi $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ olan çember veriliyor. A) Bu çemberi analitik düzlemde çiziniz.**

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

B) **Çemberin x eksenini kestiği noktaları bulunuz.**

Soru : **Standart denklemi** $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ **olan çember veriliyor.** **A)** **Bu çemberi analitik düzlemde çiziniz.**

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4$$

B) **Çemberin y eksenini kestiği noktalar A ve B ise $|AB| = ?$**

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

C) **Çember üzerindeki bir nokta T (2 , k) ise k = ?**

(Nokta denklemi sağlardı.)

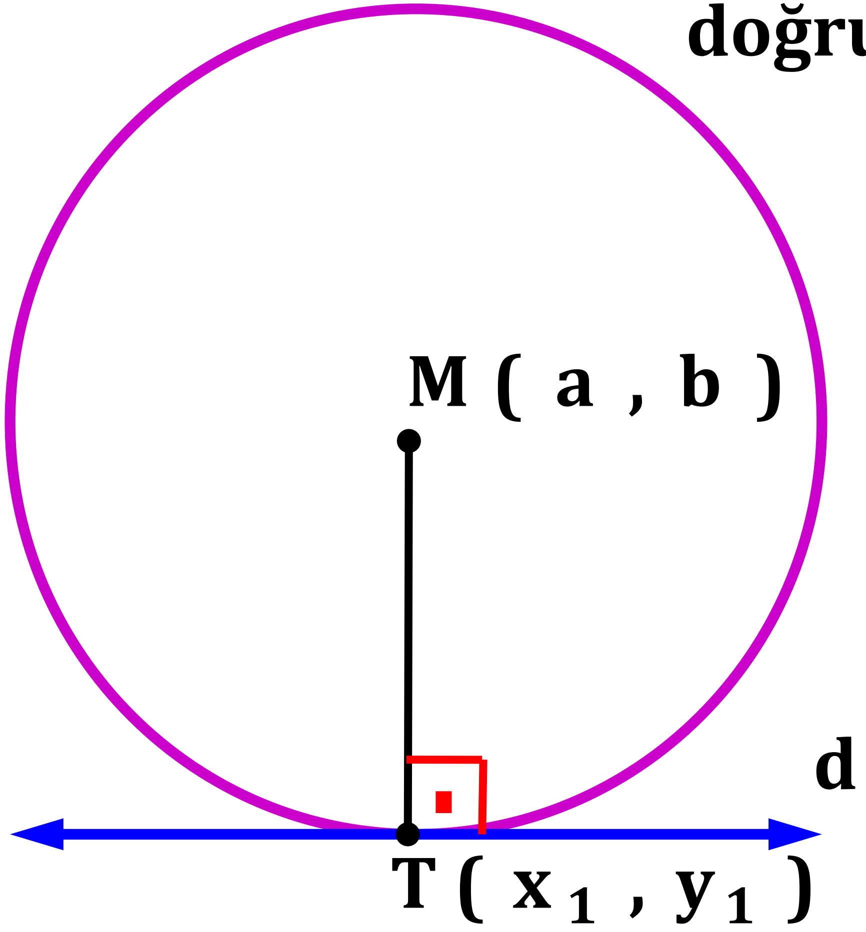
Soru : A (2 , 4) ve B (– 4 , 2) noktalarından geçen çemberin merkezi $y = x + 8$ doğrusu üzerinde ise çemberin standart denklemini bulunuz. (Merkez M (a , b) olsun . r = | MA | = | MB | olur. Eşitlikten a ile b arasındaki ilişki bulunur ve bu ilişki merkezden geçen doğrunun denkleminde kullanılır. a ile b bulunur. Ardından yarıçap bulunur ve verilenler denklemde kullanılır.)

Soru : **A (1 , – 3) ve B (3 , 1) noktalarından geçen çemberin merkezi $2y - 3x - 16 = 0$ doğrusu üzerinde ise çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : A (2 , 6) , B (0 , 0) ve C (4 , 2) noktalarından geçen çemberin standart denklemini bulunuz. (Merkez M (a , b) olsun . r = | MA | = | MB | = | MB | olur. İki eşitlik seçilir ve a ile b arasındaki ilişki bulunur. Elde edilen denklemlerin taraf tarafa çözümü ile a ile b sayıları bulunur. Yarıçap bulunur ve elde edilenler denklemde kullanılır.)

Soru : **A (1 , 3) , B (3 , – 1) ve C (– 1 , – 3) noktalarından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.**

Hatırlatma : 1) Bir çembere T noktasında teğet olan bir d doğrusu verilsin. Çemberin merkezinden ve teğet noktasından geçen doğru parçası teğet doğruna dik idi.



$d \perp [MT]$ olur.

2) Birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı – 1 idi.

$m_d \cdot m_{[MT]} = -1$ olur.

3) Teğet doğrusunun denklemi istenirse

$y - y_1 = m_d \cdot (x - y_1)$ eşitliğinden istenen bulunur.

Soru : **Standart denklemi $(x-1)^2+(y-4)^2=13$ olan çembere $T(3,1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **Standart denklemi $(x+3)^2+(y-2)^2=5$ olan çember veriliyor. Bu çembere $T(0,5)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

Soru : **Merkezi M (1 , 3) olan çemberin yarıçapı $3\sqrt{2}$ br 'dir. Bu çemberin, x eksenini eksenin negatif kısmında kestiği T noktasından geçen teğet doğrusunun denklemini bulunuz.**

Hatırlatma : $A(x_1, y_1)$ noktasının bir $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı $h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ile bulunurdu.

Soru : Merkezi $M(1, -1)$ olan ve bir noktada $3x - 4y + 8 = 0$ doğrusuna teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz

Soru : **Merkezi $M(-4, 2)$ olan ve bir noktada $12x + 5y = -64$ doğrusuna teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz**

Soru : **Merkezi M (1 , 5) olan ve bir noktada $y - x + 4 = 0$ doğrusuna teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz**

Soru : **Merkezi M (a , 3) olan ve bir noktada x – 2y = 1 doğrusuna teğet olan çemberin yarıçapı $\sqrt{5}$ br olan çemberlerin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **Merkezi M (– 2 , 3) olan ve $3x - 4y - 2 = 0$ doğrusundan 6 br'lik bir kiriş ayıran çemberin denklemini bulunuz.**

(Merkezden kirişe indirilen dikme kirişi iki eşit parçaya ayırırdı.)

Soru : x = – 2 ve x = 6 doğrularına teğet olan çemberin merkez noktası x – y – 2 = 0 doğrusu üzerinde ise çemberin standart denklemini bulunuz. (Verilen doğrular düşünülerek merkez nok-tası bulunur. Eksik kısım merkezden geçen doğru denkleminden elde edilir.)

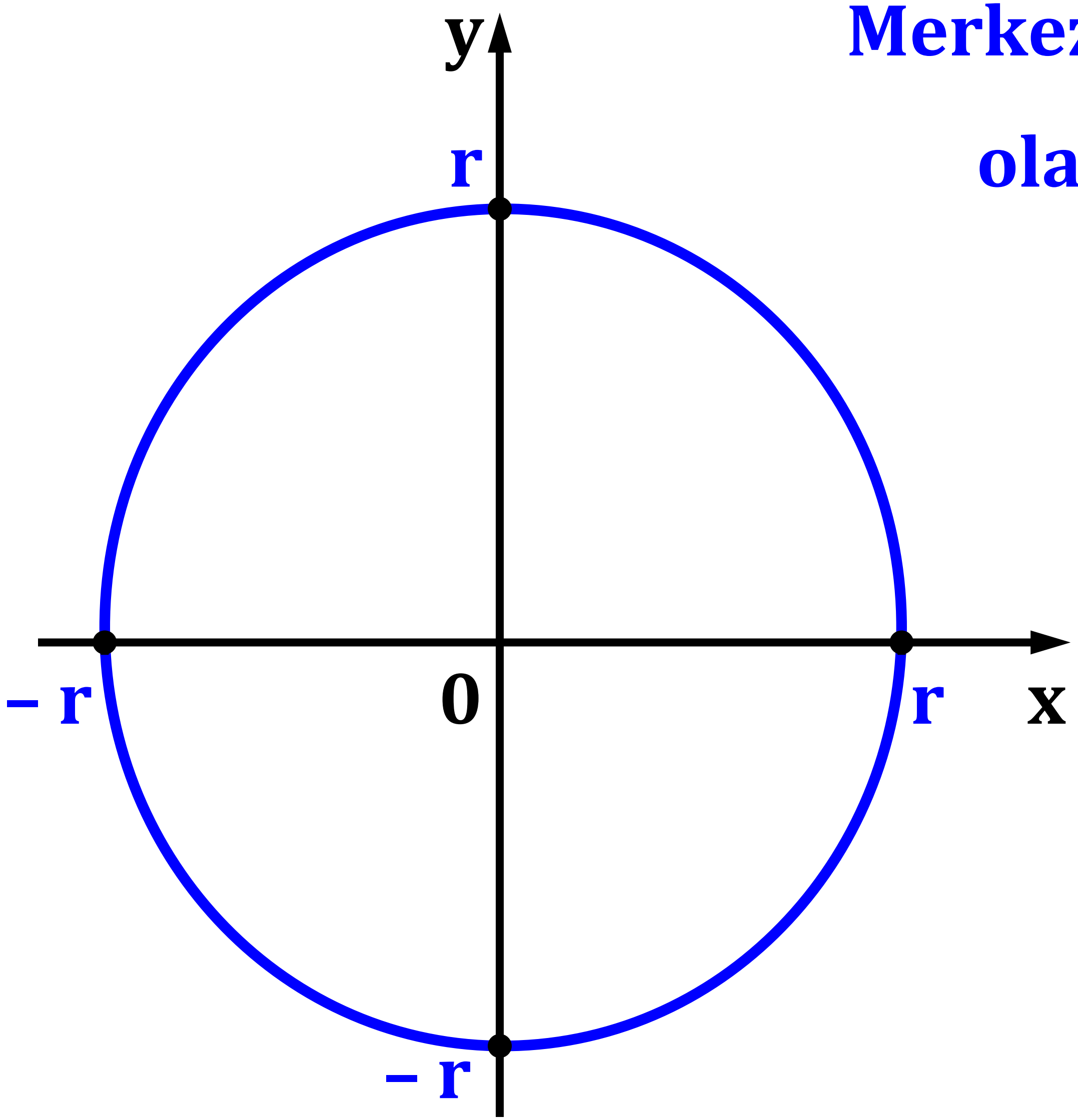
Soru : **$y = 3$ ve $y = 13$ doğrularına teğet olan çemberin merkez noktası $y - 2x + 1 = 0$ doğrusu üzerinde ise çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : $y = -2 - 2x$ ve $y = 18 - 2x$ doğrularına teğet olan çemberin bir teğet noktası $K(9, 0)$ ise çemberin standart denklemini bulunuz. (1) K noktasının yeri bulunur. K noktasının diğer doğruya uzaklığı çapı verir. 2) Teğet noktalardan diğeri $T(x, y)$ olup y yerine x 'li cevabı yazılır. İki nokta arası uzaklıktan istenilen bulunur. 3) Orta nokta yani merkez nokta bulunur ve denklem oluşturulur.)

Soru : $y = 3x - 1$ ve $y = 3x + 9$ doğrularına teğet olan çemberin bir teğet noktası $K(1, 2)$ ise çemberin standart denklemini bulunuz.

Bazı Özel Çemberler

Kural 1: **(Merkezcil Çember)**



Merkezi orijin noktası yani O (0 , 0) olan çembere " merkezcil çember " adı verilir. Merkezcil çemberin standart denklemi,

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

ise $x^2 + y^2 = r^2$ **olarak bulunur.**

Soru : **A (5 , – 12) noktası merkezcil çember üzerinde ise bu çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **A (k , $\sqrt{k+2}$) noktası yarıçapı 2 br olan merkezcil çember üzerinde ise k = ?**

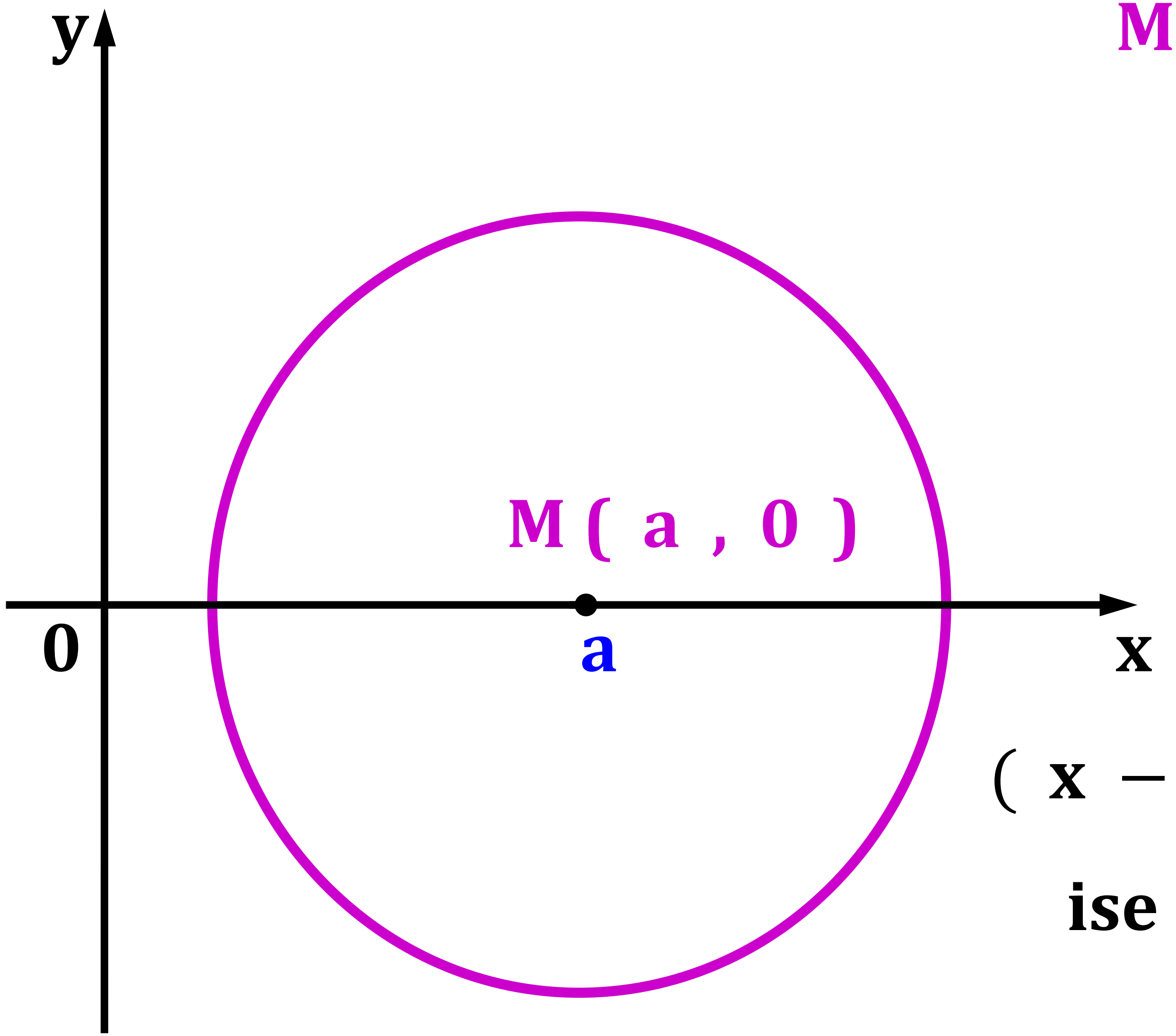
Soru : A (k + 1 , – k – 1) noktası yarıçapı $3\sqrt{2}$ br olan merkezcil çember üzerinde ise A noktası ne olmalıdır ?

Soru : **Merkezcil çember üzerindeki bir T noktasında çembere teğet olan doğrunun denklemi $y - 2x + 10 = 0$ doğrusu ise;**

A) **Çemberin yarıçapını bulunuz.**

B) **T noktasının koordinatlarını bulunuz.**

Kural 2: (Merkezi x Ekseni Üzerinde Olan Çember)



Merkezi x ekseni üzerinde olan çemberin merkez noktası $M(a, 0)$ olacağından çemberin standart denklemi,

$$(x - a)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

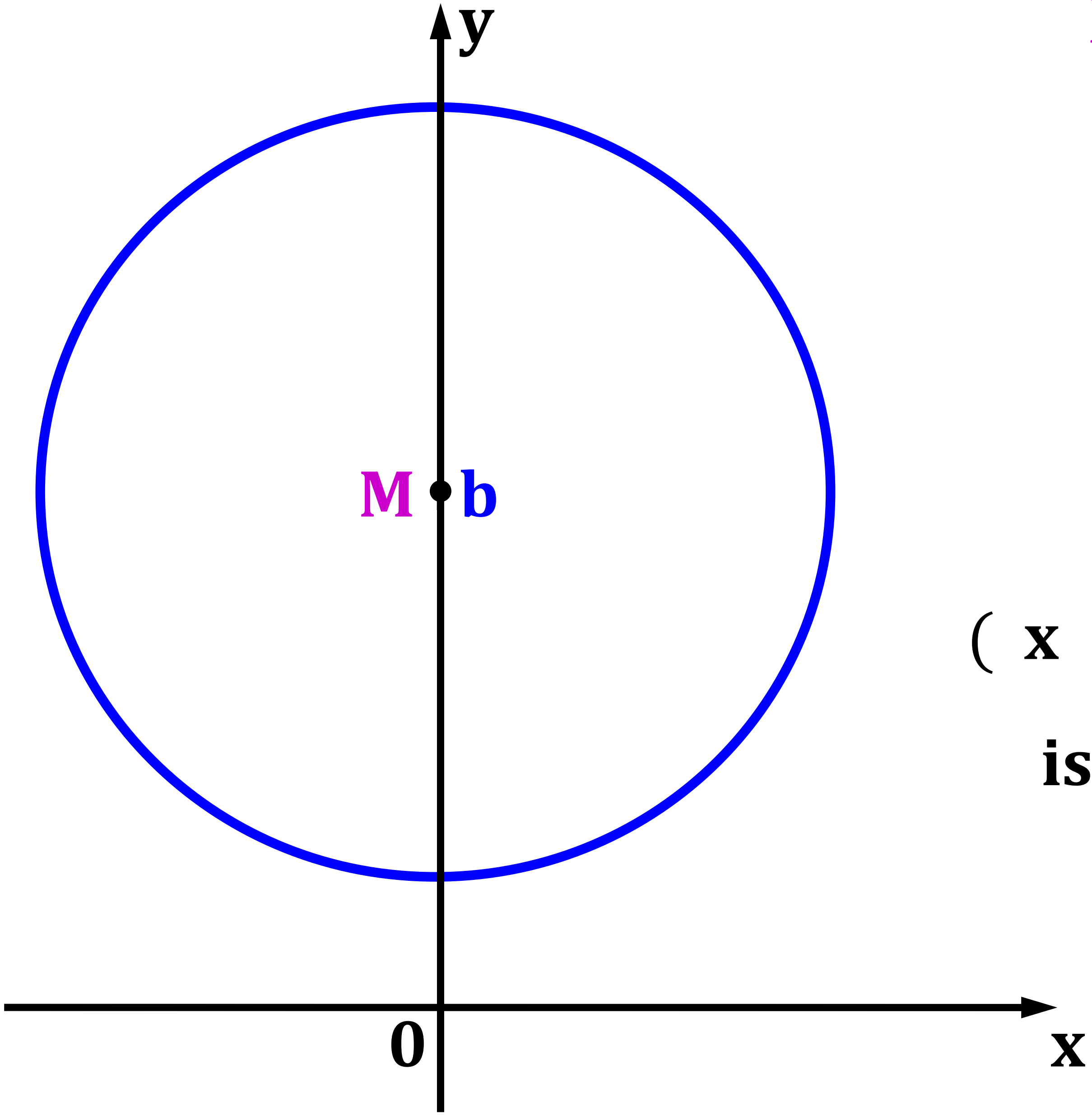
ise $\boxed{(x - a)^2 + y^2 = r^2}$

olarak bulunur.

Soru : **Merkezi x ekseni üzerinde olan ve A (1 , 4) noktasından geçen çemberin yarıçapı 5 br ise çemberin merkez noktasını bulunuz.**

Soru : **Merkezi x ekseni üzerinde olan ve x eksenini A (– 1 , 0) ile B (5 , 0) noktalarında kesen çemberin çizip ardından çemberin standart denklemini bulunuz.**

Kural 3: (Merkezi y Ekseni Üzerinde Olan Çember)



Merkezi y ekseni üzerinde olan çemberin merkez noktası M (0 , b) olacağından çemberin standart denklemi,

$$(x - 0)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

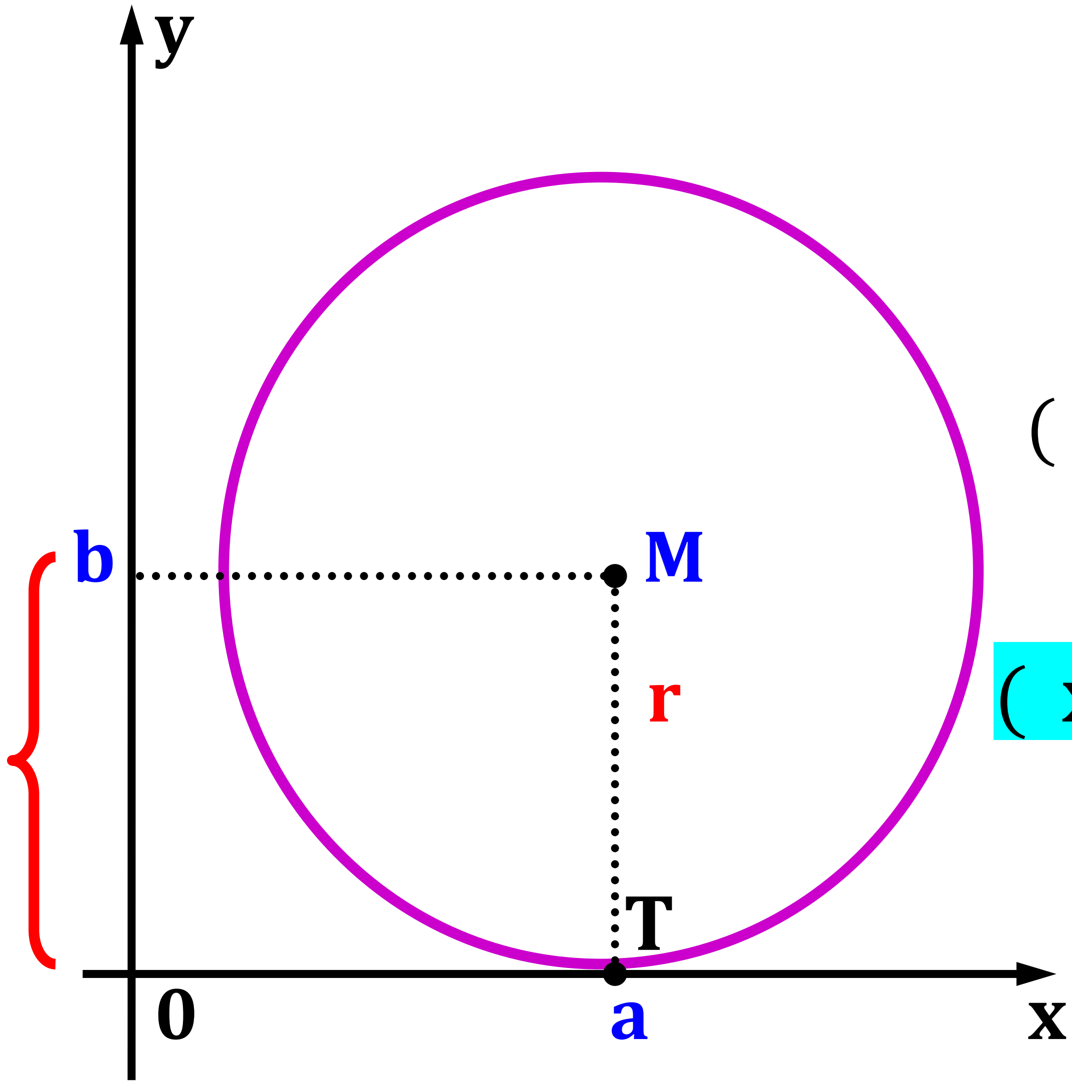
ise $x^2 + (y - b)^2 = r^2$

olarak bulunur.

Soru : **Merkezi y ekseni üzerinde olan ve $A(4, 2)$ noktasından geçen çemberin yarıçapı $\sqrt{41}$ br ise çemberin merkez noktasını bulunuz.**

Soru : **Merkezi y ekseni üzerinde olan ve $y = 2$ ile $y = 10$ doğrularına teğet olan çemberi çizip ardından çemberin standart denklemini bulunuz.**

Kural 4: (x Eksenine Teğet Olan Çember)



Merkezi M (a , b) olan ve

x eksenine teğet olan

çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ise

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

olarak bulunur.

T teğet noktasıdır.

*** Merkez noktanın bölge şartı dikkate alındığında

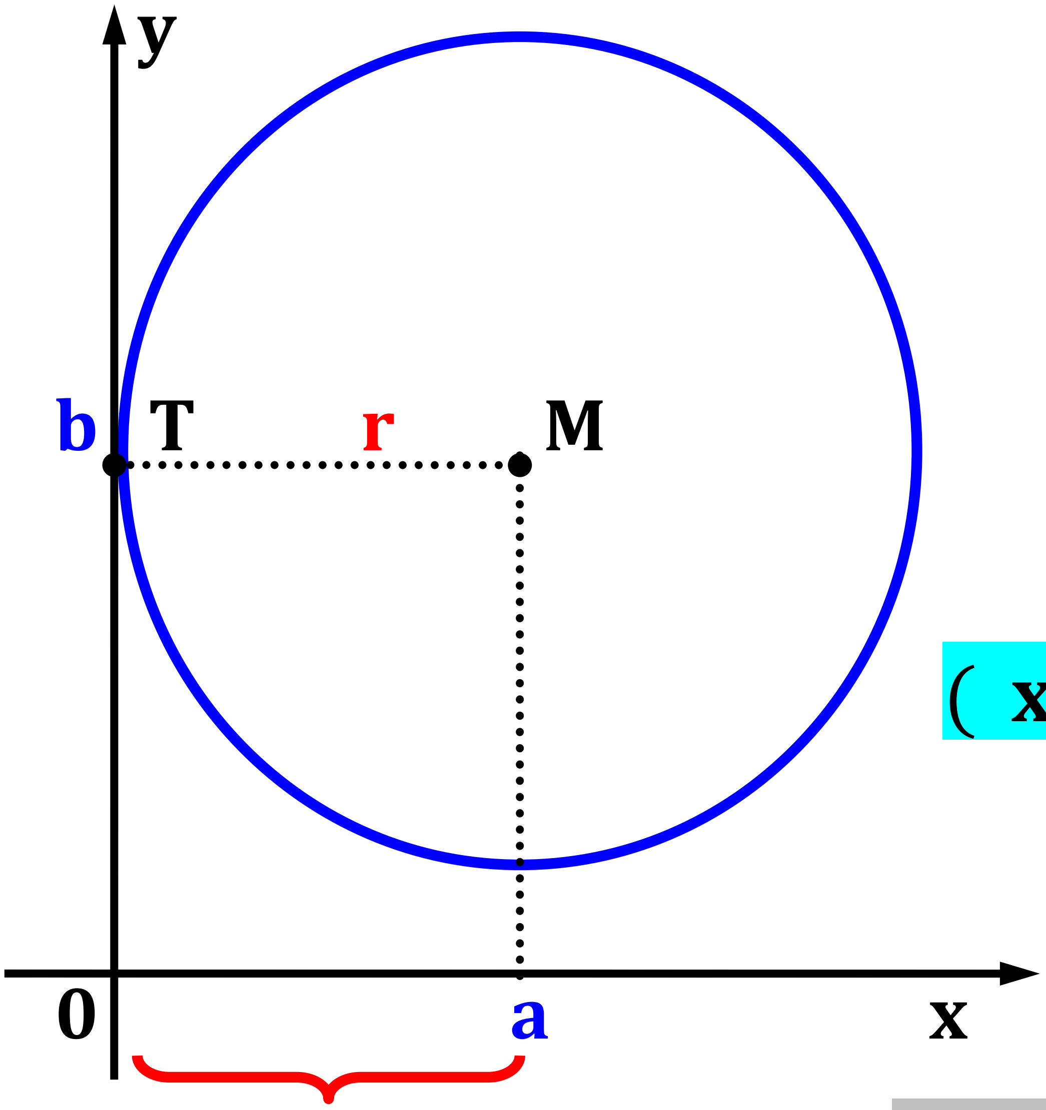
$r = | b |$ olarak alınır.

Soru : **Merkezi M (4 , – 2) olan ve <u>x eksenine teğet</u> olan çemberi analitik düzlemde çizip, çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **Merkezi M (1 , 3) olan ve x eksenine teğet olan çemberi; A) Analitik düzlemde çizip çemberin standart denklemini bulunuz.**

B) **Çemberin y eksenini kestiği noktaları bulunuz.**

Kural 5: (y Eksenine Teğet Olan Çember)



Merkezi M (a , b) olan ve

y eksenine teğet olan

çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ise

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$$

olarak bulunur.

T teğet noktasıdır.

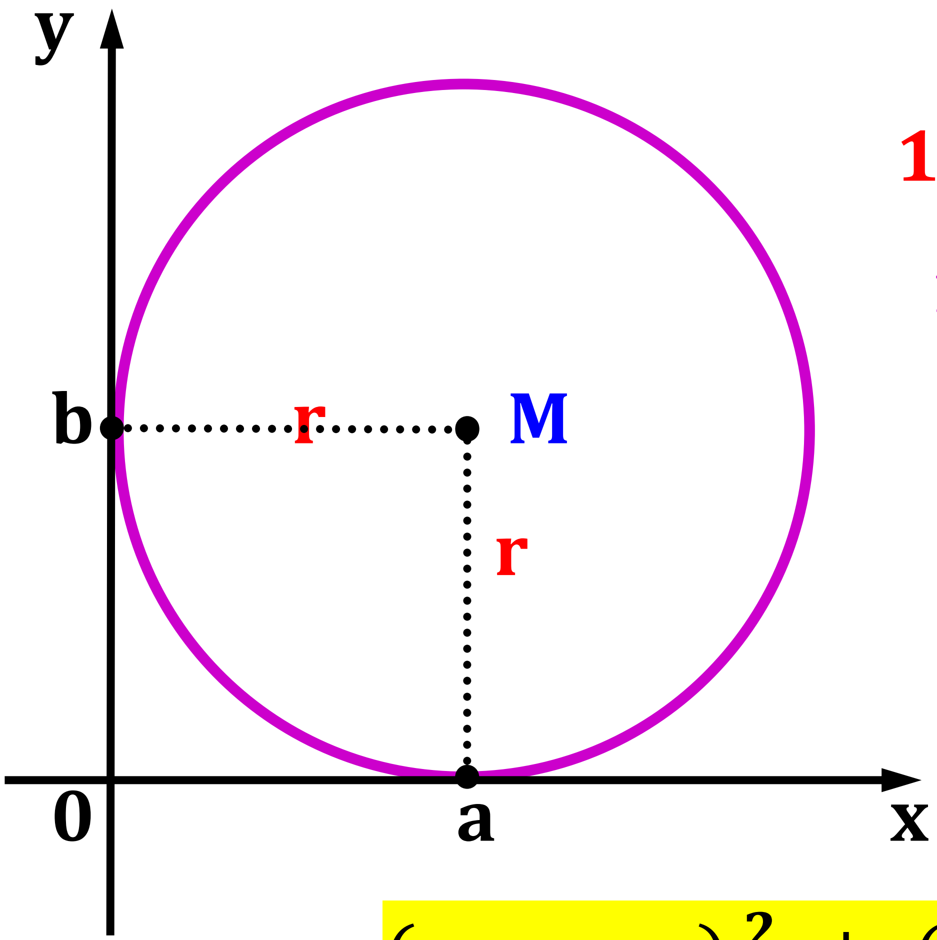
*** **Merkez noktanın bölge şartı dikkate alındığında $r = | a |$ olarak alınır.**

Soru : **Merkezi M (5 , 3) olan ve y eksenine teğet olan çemberi analitik düzlemde çizip, çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **Merkezi M (– 2 , 4) olan ve y eksenine teğet olan çemberi; A) Analitik düzlemde çizip çemberin standart denklemini bulunuz.**

B) Çember üzerindeki bir noktanın apsisi -1 ise bu noktadaki ordinat değeri yerine gelebilecek sayıların <u>toplamı</u> kaç olur ?

Kural 6: **(Her İki Eksene de Teğet Olan Çember)**



1) Merkezi I. bölgede olan ve her iki eksene de teğet olan çemberde, çemberde $r = a = b$ olduğundan çemberin standart denklemi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ise

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

olarak bulunur.

2) Merkezi II. bölgede olan ve her iki eksene de teğet olan çemberin merkez noktası $M (- r , r)$ olup, çemberin stan-

dart denklemi $(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$ olarak bulu-nur.

3) Merkezi III. bölgede olan ve her iki eksene de teğet olan çemberin merkez noktası M (– r , – r) olup, çemberin standart denklemi $(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$ olarak bulunur.

4) Merkezi IV. bölgede olan ve her iki eksene de teğet olan çemberin merkez noktası M (r , – r) olup, çemberin standart denklemi $(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$ olarak bulunur.

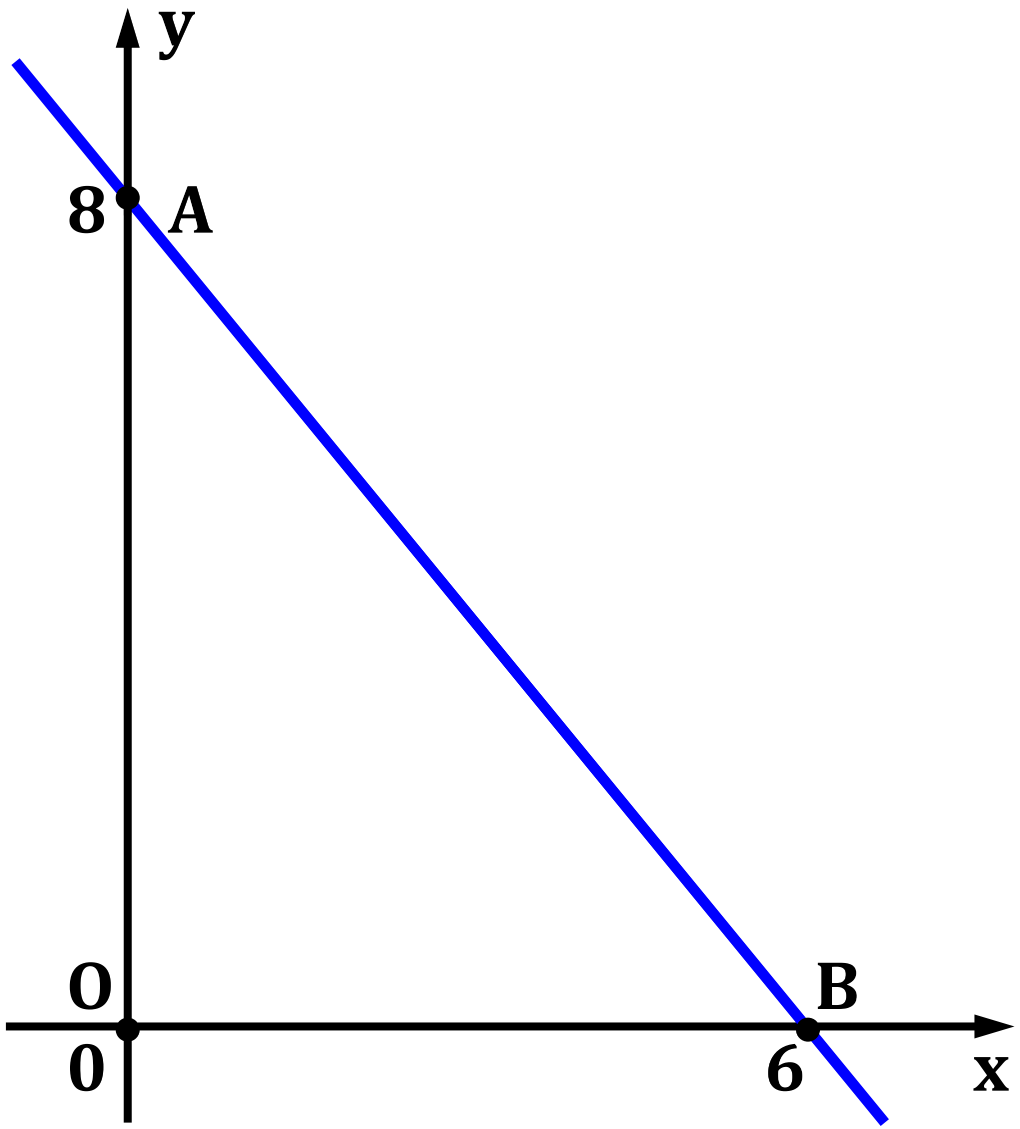
Soru : **A)** **Merkezi II. bölgede olup <u>her iki eksene de teğet</u> olan çemberin yarıçapı 3 br ise çemberin standart denklemini bulunuz.**

B) **Merkezi M (5 , – 5) olup <u>her iki eksene de teğet</u> olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : Merkezi $y - x = 4$ doğrusu üzerinde olan ve **her iki ekse-ne de teğet** olan çemberin standart denklemini bulunuz. **(Doğru grafiği çizildiğinde çemberin merkezinin hangi bölgede olduğu orta-ya çıkar. Sonra da merkez nokta doğru denklemine uygulanır.)**

Soru : **Merkezi $y = 6 - 3x$ doğrusu üzerinde olan ve <u>her iki eksene de teğet</u> olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

Soru : **AOB üçgenine içten teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.** **(İç teğet çemberi çizilir. Teğet parçalarının eşitliği ve özel üçgenden yarıçap bulunur.)**



Soru : **K (8 , – 1) noktasından geçen ve <u>her iki eksene de teğet</u> olan çemberin standart denklemini bulunuz.** **(Noktanın bulunduğu bölgeye bakılarak merkez noktaya karar verilir. Nokta çember denklemine uygulanarak istenen bulunur.)**

Çemberin Genel Denklemi

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r br olan çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ idi.

Parantezleri açalım.

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$ olur. Düzenleme yaparsak,

$$x^2 + y^2 \underbrace{-\,2a}_{D}x \underbrace{-\,2b}_{E}y + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_{F} = 0$$ olur.

$D = -2a$, $E = -2b$ ve $F = a^2 + b^2 - r^2$ olarak alınırsa

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olur. Bu denkleme " çemberin genel denklemi " adı verilir.

1) $D = -2a$ ise $a = -\dfrac{D}{2}$ ve $E = -2b$ ise $b = -\dfrac{E}{2}$

olur. $M(a, b) = M(-D/2, -E/2)$ olarak bulunur.

2) $F = a^2 + b^2 - r^2$ ise

$F = (-D/2)^2 + (-E/2)^2 - r^2$

$F = D^2/4 + E^2/4 - r^2$ eşitlik 4 ile çarpılır.

$4F = D^2 + E^2 - 4r^2$ olur. $4r^2$ yalnız bırakılır.

$4r^2 = D^2 + E^2 - 4F$ olur. Eşitliğin karekökü alınır.

$2r = \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olur. r yalnız bırakılırsa,

$r = \dfrac{1}{2} . \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olarak bulunur.

Soru : **Aşağıda genel denklemi verilen çemberlerin merkez noktasını ve yarıçapını bulunuz.**

A) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 40 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 33 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 20y + 88 = 0$

E) $x^2 + y^2 - x + \frac{y}{2} - \frac{59}{16} = 0$

F) $3x^2 + 3y^2 + 36x - 6y + 84 = 0$

(Çember denklemine benzer hale getirilir.)

Soru : $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$ **genel denklemi verilen çemberin çapı $[AB]$'dir. $A(-1, -1)$ ise B noktasını bulunuz.**

Soru : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ **genel denklemi verilen çemberin yarıçapı 5 br ise $k = ?$**

Soru : $x^2 + y^2 + (k - 1)x + 2y + 1 = 0$ **genel denklemi verilen çemberin yarıçapı 8 br ise $k = ?$**

Kural 1: Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çemberde yarıçap $r = \frac{1}{2}.\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ idi.

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmediği için aşağıdaki işlemlere dikkat edilir.

1) $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ise verilen denklem bir çember belirtir.

2) $D^2 + E^2 - 4F = 0$ ise verilen denklem bir noktayı belirtir. Noktayı bulmak istiyorsak verilen denklemi tam karelere dönüştürmeliyiz. Elde edilen denklemden çözüm bulunur.

3) $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise verilen denklem bir çember belirtmez.

Kural 2: **1)** **Çember denklemi x ve y ’ye göre ikinci derece-den bir denklemdir.**

2) **Çember denklemi içinde x ve y ’nin çarpımı şeklinde bir terim bulunmaz.**

3) **Çember denklemi içinde x^2 ve y^2 ’nin katsayıları birbiri-ne eşit olmalıdır.**

Soru : **Alttaki denklemi verilen ifadelerin çember belirtip belirt-mediğini kontrol ediniz.**

A) $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 7 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$

C) $x^2 + y^2 + \frac{4x}{5} - \frac{96}{25} = 0$

D) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 24y + 80 = 0$

E) $5x^2 - 5y^2 + 10x - 25y + 35 = 0$

F) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 4xy + 1 = 0$

Soru : **Altta verilen denklemler <u>bir nokta</u> belirtiyor. Buna göre bu noktaları bulunuz.** **($(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2$ tam kare özdeşliği idi. Verilenler tam kare özdeşliğine çevrilir ve alttaki hatırlatma kullanılır. $a^2 + b^2 = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$ idi.)**

A) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 10x - 16y + 89 = 0$

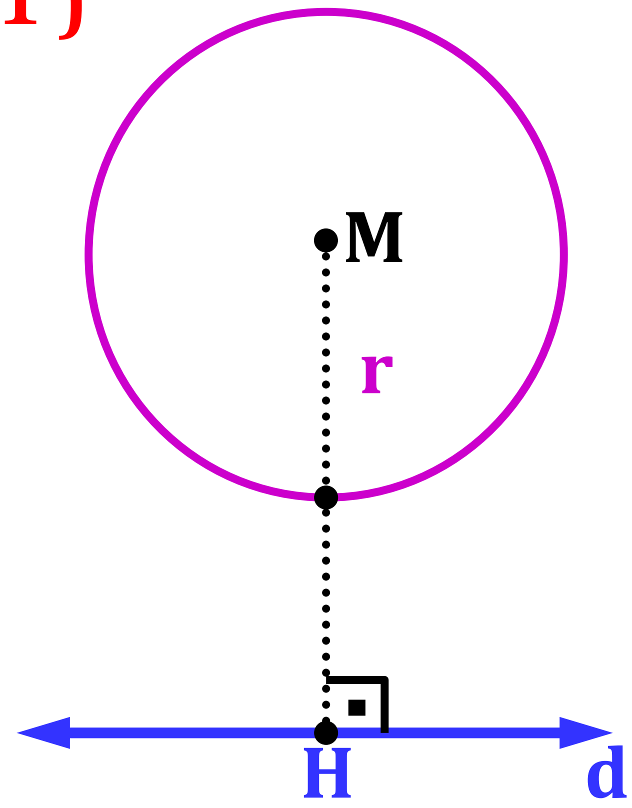
Soru : $(-1+2k)x^2+3y^2+6x-18y+10k-2=0$ **denklemi bir çember belirtiyorsa çemberin merkez noktasını ve yarıçapını bulunuz.**

Soru : $x^2 + y^2 + (2m + 4)xy + 6x + 8y + n - m = 0$ **denklemi bir çember belirtiyorsa n yerine gelebilecek en büyük tam sayı kaç olur ?**

Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Bir çember ile bir doğrunun <u>üç farklı</u> durumu vardır.

1)

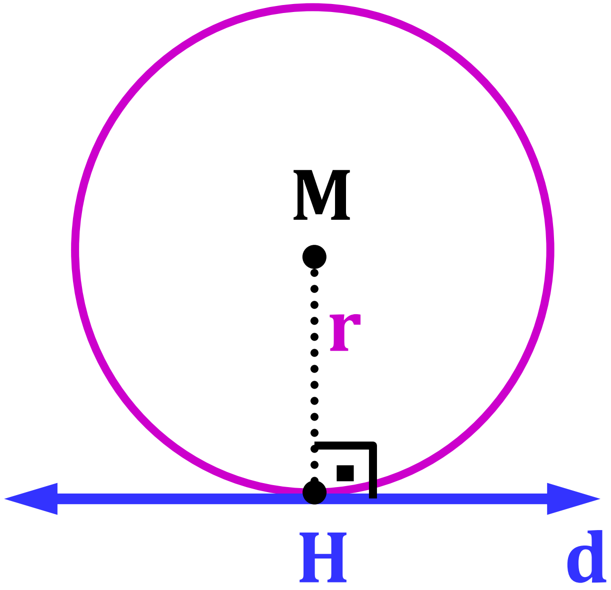


r < | MH | ise

doğru çemberi

kesmez.

2)



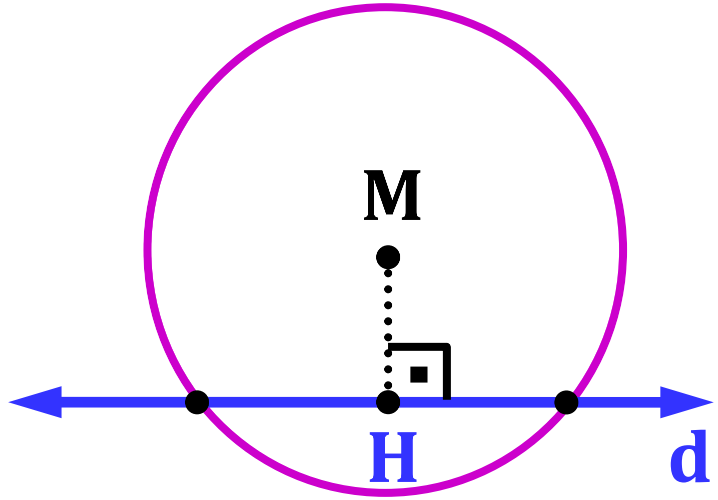
r = | MH | ise

doğru çembere

teğettir. (Yani

bir noktada keser.)

3)



r > | MH | ise

doğru çemberi

iki farklı

noktada keser.

Soru : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ **çemberi ile** $y - x + 5 = 0$ **doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.**

Soru : $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ **çemberi ile** $3x - 4y = 18$ **doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.**

Soru : $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ **çemberi ile** $-5x + 12y + m = 0$ **doğrusu birbirini** **iki noktada kesiyorsa** **m 'nin çözüm aralığı ne olur ?**

Soru : $(x+5)^2 + y^2 = r^2$ **çemberi ile $6x + 8y - 5 = 0$ doğrusu birbirini <u>kesmiyorsa</u> r 'nin alabileceği <u>en büyük tam sayı</u> değeri kaç olur ?**

Soru : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ **çemberi ile** $y = x - 1$ **doğrusu birbirine göre durumunu inceleyip varsa ortak kesim noktalarını bulunuz.** **(Ortak kesim noktası varsa çözüm için iki denklemin ortak çözümü yapılır.)**

Soru : $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$ çemberi ile $y + x - 2 = 0$ doğrusunun varsa ortak kesim noktalarını bulunuz.

Soru : $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$ **çemberinde; A) Merkez noktanın $3y + 4x + 25 = 0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.**

B) **Çemberin doğruya en yakın noktasının doğruya olan uzaklığını bulunuz.**

Soru : $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$ **çemberinde; A) Merkez noktanın $-8x + 15y + 168 = 0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.**

B) **Çemberin doğruya <u>en yakın</u> noktasının doğruya olan uzak-lığını bulunuz.** **C)** **Çemberin doğruya <u>en uzak</u> noktasının doğruya olan uzaklığını bulunuz.**