9. SINIF

MATEMATİK

DERS NOTLARI

9. 1. SAYILAR – 1

Bu temada sizlerden;

- **Gerçek sayıların üslü ve köklü gösterimleri ile yapılan işlemlere ilişkin matematiksel çıkarımlar yaparak çıkarımlarınızı doğrulamanız,**
- **Gerçek sayı aralıklarının gösteriminde ve aralıklarla ilgili işlemlerde farklı temsillerden yararlanabilmeniz, sayı kümelerinin özelliklerini karşılaştırabilmeniz,**
- **Gerçek sayıların işlem özelliklerini cebirsel olarak ifade etmeniz beklenmektedir.**

Günlük hayatta çoğunlukla tam sayılar kullanılırken fizik, kimya, biyoloji, astronomi ve mühendislik gibi alanlarda farklı sayı kümelerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Örneğin mikroskobik canlıların kütlesini hesaplarken çok küçük sayılara, gezegenler arası uzaklıkları ifade ederken çok büyük sayılara ihtiyaç duyulmaktadır.

Eşit kenarları 1 birim olan ikizkenar dik üçgende hipotenüs uzunluğunu ifade etmek için köklü gösterimden yararlanılmaktadır.

Bir bitkinin ideal koşullarda yetiştirilebilmesi amacıyla gerekli olan sıcaklığı ifade etmek için gerçek sayı aralıkları kullanılmaktadır.

Örneklerde verilen durumları ifade ederken gerçek sayıların ondalık, üslü, köklü gösterimleri ve gerçek sayı aralıkları kullanılmaktadır.

Gerçek Sayıların Üslü Gösterimi

Üslü sayılar matematikte sıkça kullanılan bir kavramdır ve bir sayının kendisiyle kaç defa çarpıldığına dair bir gösterimdir. Üslü sayıların modern gösterimini İskoç matematikçi John Napier (1550 – 1617) tarafından bulunmuştur. Belirli bir sayıdan fazlasını yazmak veya işlem yapmak çok uzun sürecek hatta hesaplanamayacak duruma geleceği için sayıları üslü olarak ifade edilmeye başlanmıştır.

İnsan vücudundaki atom sayısının yaklaşık değeri, 29 basamaklı

100000 . . . 0 sayısı ile ifade edilebilir.

Arşimet, tüm evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını ifade etmek için 63 basamaklı 800 . . . 0 sayısını kullanmıştır.

Evrendeki yıldızların sayısının yaklaşık değeri, 23 basamaklı 10 . . . 0 sayısı ile ifade edilebilir.

Bir hidrojen atomunun çekirdeğinin çapı 0,0000000000000175 metredir.

<u>Bir Hikaye :</u> Bundan yaklaşık 1400 yıl evvel Hindistan'da savaşmayı çok seven bir kral vardı. Bu kralın en büyük zevki savaş stratejilerini komutanlarına denetmekmiş. Savaş yıllarca sürer karşılıklı halklar büyük zarar görürmüş. Sonunda halk bilge bir kişiden yardım istemişler.

Bilge kişide “ Kralım siz savaşmayı çok seviyorsunuz. Bu sebeple size aynı gün içerisinde defalarca savaşma imkanı verecek satranç oyununu getirdim. ” demiş. Kral oyunu öyle sevmiş ki bir daha komşularıyla savaşmamış çünkü satranç tahtasında savaşmak hem masrafsız hem de daha eğlenceliymiş.

Kral bu oyunu öyle beğenmiş ki bilgin’e dile benden ne dilersin demiş. Parada pulda gözü olmayan bilgin **“ Kralım sizden çok fazla şey istemem buğday verseniz yeter. Bakın bu satranç tahtası 64 kare. Birinci kareye 1 buğday, ikincisine 2 , üçüncü kareye 4 , dördüncü kareye 8 ve sonra hep böyle iki misli olacak şekilde her kareyi doldurmaya yetecek kadar buğday yeter. ” demiş.** Kral öncesinde istediği ödülü küçümsese de hesap yapıldığında bu ödülün verilmesinin imkansız olduğu krala bildirilmiş ve bilgini verdiği dersten dolayı tebrik etmiş. Toplam buğday hesaplanınca **570 milyar ton** buğday gerektiği bulunmuş. Bu kadar buğday **yaklaşık 1000 yılda** ancak üretilirmiş.

*** Verilen örneklerdeki sayıların yazılması ve okunması oldukça zahmetlidir. Üslü gösterim çok büyük veya çok küçük sayıların yazımında ve bu sayılarla yapılan işlemlerde kolaylık sağlamaktadır.**

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için a^n ifadesine " üslü ifade " adı verilir.

a^n → **Üs (kuvvet)**

a^n → **Taban** **olarak adlandırılır.**

$$a^n = \underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, . \, . \, a}_{n \text{ adet}}$$ **olarak açılır.**

Aynı sayının birden çok çarpımını kolay bir şekilde göstermek için üslü ifadeler kullanılır.

Not : $x \neq 0$ **olmak üzere** $x^0 = 1$ **olarak alınır.**

Soru : $3^{4} + (-2)^{3} = ?$

Soru : $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{5} = ?$

Soru : $2^{4} + (-3)^{3} + \dfrac{5^{0}}{63^{1} - 8^{2}} = ?$

Soru : $-5^{2} + (-1)^{2025} - \dfrac{10^{2}}{(-1)^{0} + 3^{2}} = ?$

Kural 1 : (Üslü İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemi)

$a, b, x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $a \cdot x^m + b \cdot x^m = (a + b) \cdot x^m$

$a \cdot x^m - b \cdot x^m = (a - b) \cdot x^m$ olarak alınır.

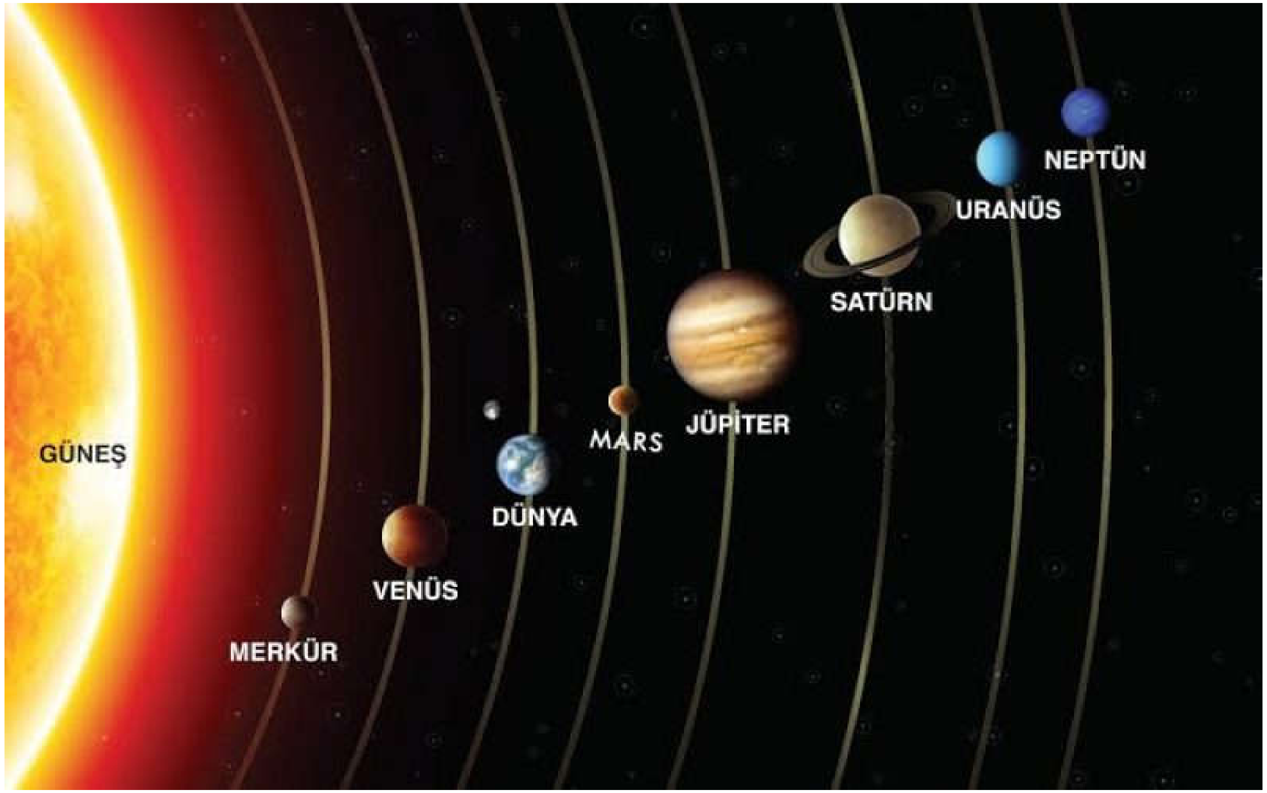
Tabanı ve üssü aynı olan üslü ifadeler, ortak çarpan parantezine alınarak toplanabilir ve çıkartılabilir.

Soru : **A)** $5 \cdot 3^{22} + 3^{22} = ?$

B) $15 \cdot 2^{55} + 4 \cdot 2^{55} - 2^{55} = ?$

C) $6{,}5 \cdot 5^{12} + 2{,}1 \cdot 5^{12} - 3{,}7 \cdot 5^{12} + 0^{12} = ?$

D) **Aynı doğrultuda bulunduklarında Merkür ve Jüpiter'in merkezlerinin Güneş'e olan yaklaşık uzaklıkları sırasıyla $5,8 \cdot 10^{7}$ km ve $75 \cdot 10^{7}$ km 'dir. Buna göre Merkür ve Jüpiter'in merkezlerinin arasındaki uzaklık yaklaşık kaç km 'dir ?**



Kural 2 : (Üslü İfadelerde Çarpma İşlemi)

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ olarak alınır.

Yani çarpma işleminde; üslü ifadelerin tabanları aynı ise, sonucu aynı tabanda üslerin toplanması olarak alabiliriz.

Soru : **Aşağıda verilenleri tek tabanda üslü ifade olarak yazmaya çalışınız.**

A) $3^{12} \cdot 9 \cdot 3^{5} = ?$

B) $5^{12} \cdot 25 \cdot 5^{-2} \cdot 625 = ?$

C) $-2x^4 \cdot x^6 \cdot 3x^5 \cdot (-x^6) = ?$

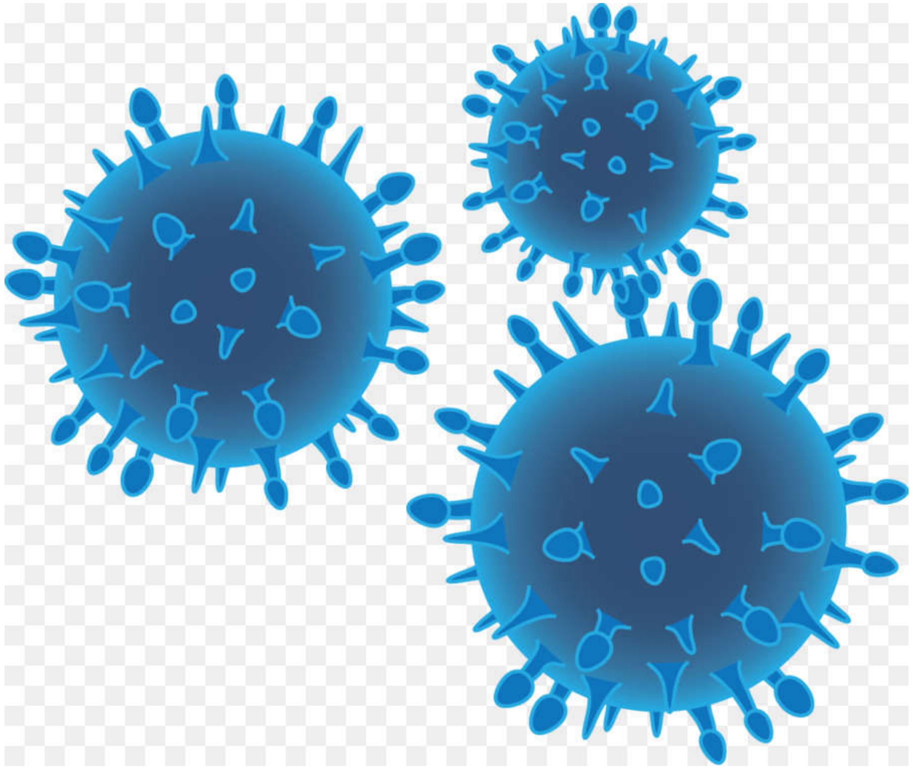
D) $16y^2 \cdot 32y^3 \cdot 4y^{11} = ?$

E) $a^{3x-3} \cdot a^{4-x} \cdot a^{-2x+1} = ?$

Soru : **Yeryüzündeki kumsallarda yaklaşık $4 . 10^{21}$ kum tanesi olduğu düşünülmektedir.**

Arşimet, yaptığı bir çalışmada bütün evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını yaklaşık olarak hesaplamıştır. Arşimet'in bulduğu sayı, Dünya'daki kumsallarda bulunan kum tanesi sayısının $2 . 10^{42}$ katıdır. Buna göre tüm evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını hesaplayınız.

Soru :



Bir bakteri türünün sayısı <u>her saat sonunda</u> 3 katına çıkmaktadır. Başlangıçta bakteriden 9 adet vardır. <u>Bir gün sonra</u> bakterinin ulaştığı sayıyı bulunuz.

Tanım : **$n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $1 \leq |a| \leq 10$ olmak üzere $a \cdot 10^{n}$ ifadesine “ bilimsel gösterim ” denir.**

Not : **Örneğin ;**

$1{,}24 = 124 \cdot 10^{-2}$, $51{,}246 = 51246 \cdot 10^{-3}$

$3412 = 3{,}412 \cdot 10^{3}$, $27 = 0{,}27 \cdot 10^{2}$ şeklinde yazılırdı.

(Virgül sağa kaydırılırsa, kaydırma sayısı negatif olarak 10 sayısının kuvveti olarak yazılır. Virgül sola kaydırılırsa, kaydırma sayısı pozitif olarak 10 sayısının kuvveti olarak yazılırdı.)

Soru : **A) $2{,}154 \cdot 10^{25}$ sayısını virgülden kurtarınız.**

B) $0,000102 \; . \; 10^{11}$ **sayısını virgülden kurtarınız.**

C) $0,04 \; . \; 2,5 \; . \; 10^{32}$ **sayısını üslü ifade olarak yazınız.**

Soru : **Aşağıda Adana, Kahramanmaraş ve Tokat il merkezleri ile Çanakkale il merkezi arasındaki karayolu mesafeleri metre cinsinden ve yaklaşık olarak verilmiştir.**

Adana – Çanakkale	$1,09 . 10^{6}$ m
Kahramanmaraş – Çanakkale	$123 . 10^{4}$ m
Tokat – Çanakkale	$10,54 . 10^{5}$ m

Buna göre Adana, Kahramanmaraş ve Tokat il merkezleri ile Çanakkale il merkezi arasındaki karayolu mesafelerini küçükten büyüğe sıralayınız.

Kural 3 : **(Reel Sayının Negatif Tam Sayı Kuvveti)**

$a , b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) ve $m \in \mathbb{Z}$ için,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$$

olarak alınır. **Yani sayının negatif kuvvetinde, tabanın çarpmaya göre tersi alınır ve kuvvet pozitife dönüştürülür.**

Soru : A) $(1 / 2)^{-5} = ?$

B) $(-3)^{-4} = ?$

C) $5^{6} \cdot (-1/5)^{-4} = ?$

Soru : $2^{-1} + (6 / 5)^{-1} = ?$

Soru : $(2 / 3)^{-4} + (1 / 4)^{2} = ?$

Soru : $$\frac{3^{-1} + 2^{-2}}{4^{-1}} = ?$$

Kural 4 : (Üslü İfadelerde Bölme İşlemi)

$x \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$ ve $m , n \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^{m}}{x^{n}} = x^{m-n}$ olarak alınır. **Yani bölme işleminde; üslü ifadelerin tabanları aynı ise, sonucu aynı tabanda üslerin farkı olarak alabiliriz.**

Soru : $\dfrac{3^{11}}{3^{5}} \cdot 3^{27} = ?$

Soru : $\dfrac{5^{21}}{5^{10}} \cdot \dfrac{5^{9}}{5^{18}} = ?$

Soru : **1 metreküp suyun 1000 litreye eşit olduğu bilinmektedir. Ankara'da barajlardaki su miktarı; 2001 yılı Ocak ayında yaklaşık $4 . 10^6$ metreküp, 2023 yılı Ocak ayında yaklaşık $1{,}6 . 10^8$ metre-küp olarak ölçülmüştür.** **A)** **2001 yılı Ocak ayında Ankara'da barajlardaki su miktarının kaç litre olduğunu bulunuz.**

B) **2023 yılı Ocak ayındaki su miktarının 2001 yılı Ocak ayındaki su miktarının kaç katı olduğunu bulunuz.**

Soru : **Dördüncü sayfadaki hikayeye dayanarak karelere konulacak buğday sayılarının bir kısmı şekilde belirtilmiştir. Bu düzene göre**

$$\frac{A \,.\, B}{C} = ?$$

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}				
		A					
	C						
					B		

Soru : $$\frac{3^{25} + 7 . 3^{25} + 3^{25}}{3^{18}} = ?$$

Soru : $$\frac{4 \cdot 2^{15} + 2^{15} + 16 \cdot 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}}{2^{3} + 2^{3} + 2^{3}} = ?$$

Soru : $\dfrac{3^{12} + 3^{13} + 3^{14}}{3^{7} + 3^{8} + 3^{9}} = ?$ **(Terimler aynı değilse aynı hale getirilir. Kuvvetlerdeki fazlalık ayrılır ve katsayılar toplanır sonra da kural uygulanır.)**

Soru :

$$\frac{5 \cdot 2^{22} + 3 \cdot 2^{24} + 2^{26}}{2^{10} + 2^{11} + 2^{13}} = ?$$

Kural 5 : (Ortak Paranteze Alma)

A) $x , y \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $x^m . y^m = (x . y)^m$ olarak alınır.

B) $x , y \in \mathbb{R}$ ($y \neq 0$) ve $m \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y} \right)^m$ olarak alınır.

Yani üslü ifadelerin kuvvetleri aynı ise, ortak üs altında parantez içerisine tabanlar alınabilir.

Soru : $(a / b)^3 . (2b)^3 = ?$

Soru : $10^{6} \cdot (2 / 5)^{6} \cdot 3^{6} = ?$

Soru : $\dfrac{12^{a}}{0{,}3^{a}} = ?$

Soru : $(0{,}25)^2 \cdot \dfrac{1}{(0{,}005)^2} = ?$

Soru : $2^{12} \cdot 3^{13} = ?$ **(Fazlalığı ayır ve kuralı kullan.)**

Soru : $2^{10} \cdot 5^{9}$ **sayısının sonunda kaç sıfır vardır ?**

Soru : $6 \cdot 2^{15} \cdot 5^{17}$ **sayısı için;**

A) **Sayının sonunda kaç sıfır vardır ?**

B) **Sayı kaç basamaklıdır ?**

Kural 6 : (Üslü İfadenin Kuvveti)

$x \in \mathbb{R}$ ve m , $n \in \mathbb{Z}$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ olarak alınır. Yani üslü ifadenin kuvveti varsa taban aynı kalır ve kuvvetler çarpılır.

Soru : 27^{14} ifadesini 3 'ün kuvveti olarak yazınız.

Soru : $8^{6} \cdot 16$ ifadesini 2 'nin kuvveti olarak yazınız.

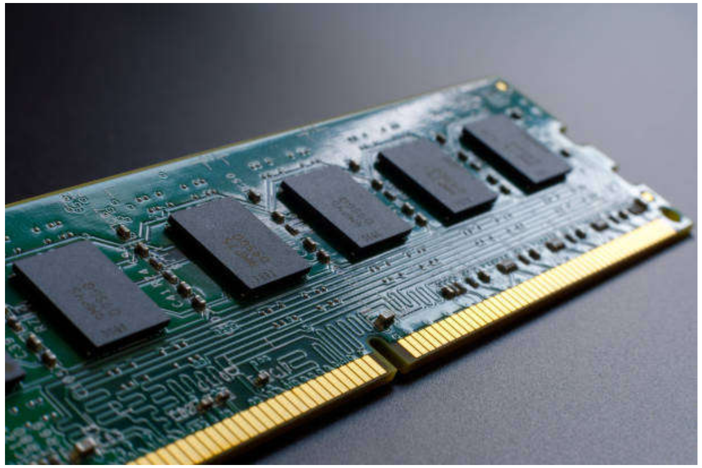
Soru : $\dfrac{125^{12}}{25^{4}}$ ifadesini 5 'in kuvveti olarak yazınız.

Soru : $\dfrac{(a^2 . b^3)^5}{(a^3)^3} = ?$

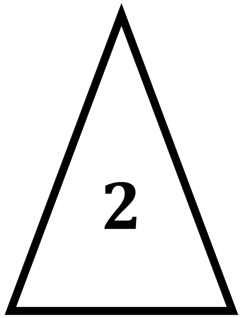
Soru : $$\frac{(x^3 . y^4)^4}{(x^2 . y^3)^5} = ?$$

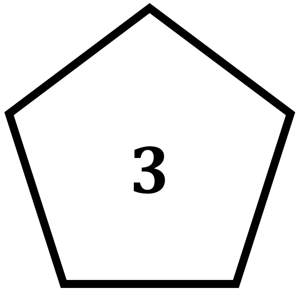
Soru : **Günümüzde veri depolama birimi olarak kullanılan bayt (B) , megabayt (MB) ve gigabayt (GB) arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.** $1 \text{ GB} = 2^{10} \text{ MB} = (2^{10})^3 \text{ B}$

Buna göre $2{,}5 \cdot 10^4$ gb kapasiteye sahip bir depolama aracı kaç bayt bilgi alır ?

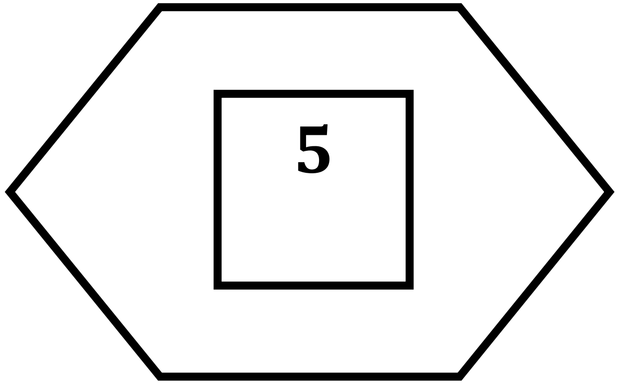


Soru : **Tanımlanan bir işleme göre çokgenlerin kenar sayısı, içine yazılan sayının kaçıncı kuvvetinin alınacağını göstermektedir.**

Örneğin 

= 2^{3} 

= 3^{5} **olmaktadır.**

Buna göre 

= ?

Karışık Uygulamalar

Soru : $2^{x} = m$, $3^{x} = n$ ise 72^{x}'in m ve n türünden sonucunu bulalım. **(72 sayısı asal çarpanlarına ayrılır.)**

Soru : $2^x = m$, $5^x = n$ ise 400^x'in m ve n türünden sonucunu bulunuz.

Soru : $2^x = m$, $3^x = n$ ve $5^x = p$ ise 900^x'in m , n ve p türünden sonucunu bulunuz.

Soru : **$3^{x} = a$ ise 3^{2x+1} ifadesini a türünden bulunuz.**

(İstenende 3^{x} ifadesini elde edip, verileni yerine yazarız.)

Soru : $2^{x} = m$ ise $8^{x+2} = ?$

Soru : $5^{x-1} = k$ ise $25^{x+1} = ?$

Soru : $3^{x+1} = m$ ise $27^{x+2} = ?$