

## 6. 1. 2. Karmaşık Sayılar

$x^2 + 1 = 0$  denkleminde  $x^2 = -1$  olur. Reel sayılarda karesi  $-1$  olan sayı olmadığından denklemin çözüm kümesi boş küme olarak alınır.

Tanım: Bu tarz denklemlerin çözüm kümesini ve reel sayılar kümesini de kapsayan kümeye “karmaşık sayılar” kümesi adı verilir. Küme  $\mathbb{C}$  harfi ile gösterilir.  $\mathbb{C}$  en geniş kapsamlı olan sayı kümesidir.

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Kural:  $\sqrt{-1}$  sayısı reel sayı değildir.  $\sqrt{-1} = i$  sayısı tanımlanarak bu  $i$  sayısına “sanal birim” adı verilir.

$$i = \sqrt{-1} \text{ ise } i^2 = -1 \text{ olarak alınır.}$$

Örnek:  $x^2 + 4 = 0$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Soru:  $100 + 4x^2 = 0$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

## İşlem Soruları :

Örnek:  $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = ?$  ( Kök dereceleri aynı olsa bile karmaşık sayılarda çarpım tek kök altında yazılmaz. )

Soru :  $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-25} \cdot \sqrt{-1} = ?$

Soru :  $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-100} = ?$

**Soru :**  $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-24} = ?$

**Soru :**  $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-6} = ?$

**Soru :**  $\sqrt{-64} + \sqrt{-16} - \sqrt{-4} = ?$

**Soru :**  $\sqrt{-36} - \sqrt{-25} + \sqrt{64} + \sqrt{-9} - \sqrt{-49} = ?$

**Kural:** ( i 'nin kuvvetleri )

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

...

Adımlara bakılırsa gidişatta döngü olduğu görülür. i 'nin tüm kuvvetleri bu dört sonuçtan birini verir.

**Not:** i 'nin büyük kuvvetleri verilirse, bu kuvvetin 4 'e bölümden kalan sayı i 'nin kuvvetini verir.

Örnek:  $i^{61} + i^{23} = ?$

Soru:  $i^{72} - i^{102} = ?$

*Soru :*  $2i^{195} + 5i^{501} = ?$

*Soru :*  $i^{25} - 4i^{80} - i^{47} + 3i^{162} = ?$



*Soru :*  $3i^{1908244} - 2i^{56001} = ?$

*Soru :*  $i^{21} \cdot i^{68} + \frac{i^{104}}{i^7} = ?$

*Soru :*  $i^{4n+3} = ?$

*Soru :*  $i^{12n-6} = ?$

***Soru :***  $2i^{16n+15} - 3i^{9-12n} = ?$

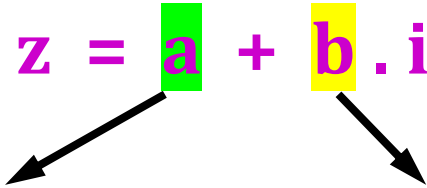
**Soru :**  $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{48} + i^{49} + i^{50} = ?$

( Hangi grubun birbirini sıfırladığı bulunur. Kalanlar sonucu verir. )

***Soru :***  $i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{100} + i^{101} + i^{102} + i^{103} = ?$

**Kural:** Karmaşık sayılarda ( C ) herhangi bir sayı  $z$  olsun.

$a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $z = a + b.i$  olarak gösterilir.

$$z = a + b.i$$


Sayının **reel** kısmı olarak  
adlandırılır ve **Re ( z )**  
olarak gösterilir.

Sayının **sanal ( imaginary )**  
kısmı olarak adlandırılır ve  
**Im ( z )** olarak gösterilir.

Aşağıdaki sayıların reel ve sanal kısımlarını tabloya yerleştiriniz.

Sayı	Re ( z )	Im ( z )
$z = 6 - 5i$		
$z = 9i$		
$z = 8$		
$z = 4i + 2$		

Örnek:  $z = -i^{51} + \sqrt{-36} \cdot \sqrt{-9}$

ise  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = ?$

Soru:  $z = i^{14} + i + 2i^9 + i^5$

ise  $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = ?$

*Soru :*  $z = 4i^{43} - 6i^{33} + 2i^{120}$

ise  $\text{Im}(z) : \text{Re}(z) = ?$

*Soru :*  $z = (3 - 4i) \cdot (5 + 2i)$

ise  $\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = ?$



Örnek:  $z^2 - 2z + 2 = 0$  denkleminin karmaşık sayılardaki çözüm kümesini bulunuz. ( Not: Denklem çarpanlarına ayrılmıyorsa  $\Delta$  'dan faydalanılır. )

**Soru :**  $z^2 - 2z + 10 = 0$  denkleminin karmaşık sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

**Soru :**  $z^2 - 4z + 7 = 0$  denkleminin karmaşık sayılardaki kökleri  $z_1$  ve  $z_2$  ise  $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) = ?$

**Kural:**  $z$  karmaşık sayısının eşleniği  $\bar{z}$  ile gösterilir.

$z = a + b.i$  ise  $\bar{z} = a - b.i$  olarak alınır.

**\*\*\*** Eşlenik bulunurken verilen karmaşık sayının sadece sanal kısmının işareti değiştirilir.

Aşağıdaki sayıların eşleniğini tabloda yazınız.

Sayı	Eşleniği	Sayı	Eşleniği
$z = 4 - 2i$		$z = 80$	
$z = 3i$		$z = -i - 6$	


**Örnek:**  $z = 8 - 3i$  ise  $z - 2\bar{z} = ?$

**Soru :**  $z = 5i - 6$  ise  $\bar{z} + z \cdot \bar{z} = ?$

**Soru :**  $z_1 = 2 + 2i$  ve  $z_2 = i + 3$  ise  $z_1 - 3z_2 + (\overline{z_1})^2 = ?$

**Soru :**  $z_1 = 7 + i$  ve  $z_2 = 4 - 5i$  ise  $\overline{3z_1 - 4\overline{z_2}} = ?$

**Kural:** Kesirli ifadelerde paydayı  $i$  'li terimden kurtarmak için;  
kesrin pay ve paydası, paydanın eşleniği ile çarpılır.


$$\frac{x}{a + b \cdot i} = \frac{x \cdot (a - b \cdot i)}{(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)}$$

parantezlerde  
dağılma özelliği kullanılır.

**Örnek:**  $\frac{1}{3 - 2i} = ?$

**Kısayol:**  $(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$  olarak alınır.



*Soru :*  $\frac{2}{4i - 5} = ?$

*Soru :*  $z = 3 + 5i$  sayısının çarpma işlemine göre tersini  $(z^{-1})$  bulunuz.

*Soru :*  $z = \frac{3 - 2i}{1 + 4i}$  ise  $\text{Re} ( z ) = ?$

*Soru :*  $z = \frac{-5 + 3i}{3 + 4i}$  ise  $\text{Im} ( z ) = ?$

*Soru :*  $z = \frac{3i + 2}{i + 1}$  ise  $\bar{z} = ?$

**Soru :**  $z = \frac{1 + i}{-2 + i} \cdot \frac{3}{1 + 2i}$  ise  $z = ?$

**Soru :**  $z_1 = 1 - i$  ,  $z_2 = 2 + i$  ,  $z_3 = 3 - 2i$  ve  $z_4 = 4 + 3i$  ise

$\frac{z_1 - z_4}{z_2 + z_3}$  sayısının reel kısmını bulunuz.

Kural: A)  $(a + b.i)^{2n} = [(a + b.i)^2]^n$

$$= [(a + b.i) \cdot (a + b.i)]^n$$

olarak düzenlenir. Parantezin içinde dağılma özelliği kullanılır ve düzenleme sonucunda bulunan ifadenin  $n$  kuvveti alınır.

B)  $(a + b.i)^{2n+1} = (a + b.i)^{2n} \cdot (a + b.i)^1$

$$= [(a + b.i)^2]^n \cdot (a + b.i)$$

olarak düzenlenir. Birinci parantezin çözümü A maddesinde olduğu gibi yapılır. Bulunan sonuç ikinci parantez ile çarpılır.

Örnek:  $(1 - i)^{30} = ?$



*Soru :*  $(1 + i)^{44} = ?$

***Soru :***  $( 2 + 2i )^{82} = ?$

*Soru :*  $( 1 + i )^{31} = ?$

*Soru :*  $(1 - i)^{49} = ?$

**Kural:** İki karmaşık sayının eşitliği verildiğinde; birinin sanal kısmı diğerinin sanal kısmına, aynı şekilde birinin reel kısmı diğerinin reel kısmına eşitlenir.

$$z_1 = a + b.i \text{ ve } z_2 = x + y.i \text{ olsun.}$$

$z_1 = z_2$  yani;  $a + b.i = x + y.i$  ise  $a = x$  ve  $b = y$  olmalıdır.

**Örnek:**  $3a + 2bi - 3 = 3 - 6i + a + bi$  ise  $a.b = ?$

**Soru :**  $z = 2ki - 4i + 5$  ve  $w = -2m + 8i - 1$  sayıları birbirine eşit ise  $k + m = ?$

**Soru:**  $z = 2x + xi - 2i + y$  ve  $w = 8 + 2yi - 3i$  sayıları birbirine eşit ise  $x + y = ?$  ( Bulunan iki denklem taraf tarafa çözülür. )

**Soru :**  $m - 2 + ni + 3i = n + 2mi + 7 + 4i$  ise  $m . n = ?$



Örnek:  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $z + \bar{z} \cdot i = \bar{z} + 6i$  ise  $z$  karmaşık sayısını bulunuz. (  $z = a + bi$  alınır. )

**Soru:**  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $5 + 2z + \bar{z} = 4\bar{z} - 5i$  ise  $z$  karmaşık sayısını bulunuz.

**Soru :**  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $z - 4i = 2z \cdot i + 3$  ise  $z$  karmaşık sayısını bulunuz.

**Soru :**  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $-5i - z = 5 + 3z.i$  ise  $\operatorname{Re}(z) = ?$

**Soru :**  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $2z - \bar{z} = i + 5 - z \cdot i$  ise  $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = ?$

**Soru :**  $z \in \mathbb{C}$  olsun.  $z \cdot (2 + i) = \bar{z} + 3i$  ise  $\bar{z} = ?$

[www.egitimhane.com](http://www.egitimhane.com)